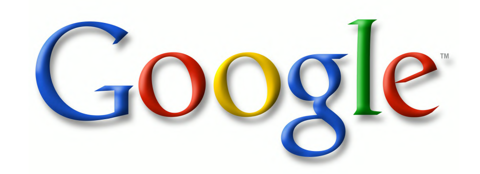
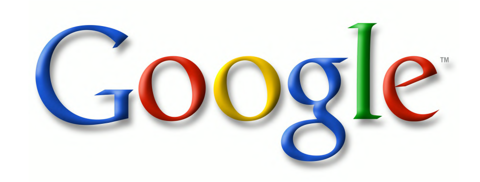
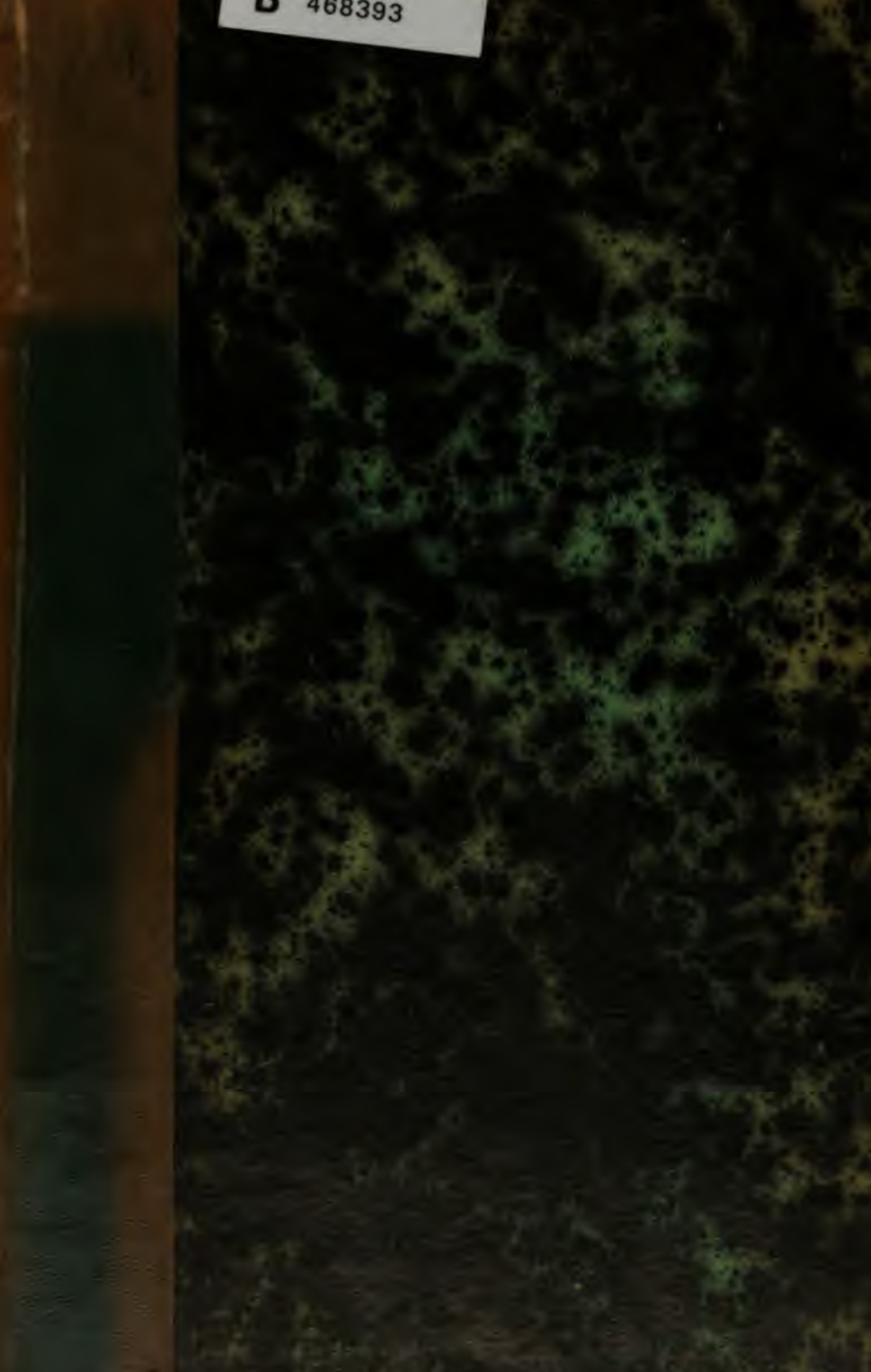
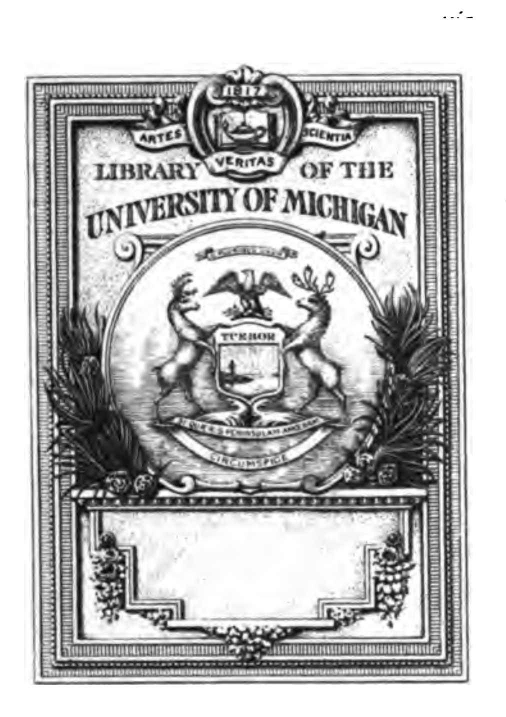
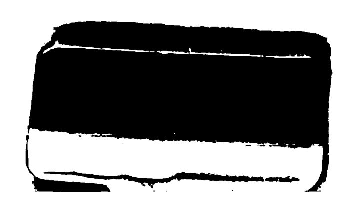





B 468393




1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL (12 NUMÉROS) :
Paris .... 7 fr. | Dép. et Union postale... 8 fr. 50

Les douze numéros forment chaque année un Volume de 300 pages au moins.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET É. LEMOINE,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Examinateur à l'École Polytechnique,

Émile LEMOINE,
Ingénieur civil,
Ancien Élève de l'École Polytechnique,

Ed. MAILLET,
Docteur ès Sciences,
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

A. GRÉVY,
Docteur ès Sciences,
Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Professeur au Lycée Saint-Louis.

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique.

TOME XI. — 1904.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

55, Quai des Grands-Augustins, 55.

1904





Printed in France

LISTE ALPHABÉTIQUE

DES ABRÉVIATIONS CONVENTIONNELLES

EMPLOYÉES POUR DÉSIGNER LES PRINCIPAUX RECUEILS CITÉS (1).

A. A. M. — Abhandlungen der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München (Munich). (Depuis 1832.)

A. A. N. — Atti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli (Naples). (Depuis 1788.)

A. D. M. — Annali di Matematica pura ed applicata (Tortolini, etc.) (Rome). (Depuis 1845.)

A. E. N. — Annales scientifiques de l'École Normale supérieure (Paris). (Depuis 1864.)

A. F. — Association française pour l'avancement des Sciences. Comptes rendus des Congrès (Paris). (Depuis 1872.)

A. G. — Annales de Mathématiques (Gergonne) (Nîmes). (De 1810 à 1831.) (21 volumes.)

A. Gr. — Archiv der Mathematik und Physik (Archives de Grunert) (Leipzig). (Depuis 1841.)

---

(1) Les abréviations que nous adoptons sont celles qui ont été arrêtées par la *Commission du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques* et qui paraissent entrer dans l'usage international des mathématiciens; c'est une entente qui offre des avantages sur lesquels il est inutile d'insister.

Nous profitons de l'occasion pour recommander à nos lecteurs le *Répertoire* dont s'occupe ladite Commission; il est publié sous forme de fiches, réunies par séries de cent. (Paris; librairie Gauthier-Villars. Prix de la série : 2fr.)

Treize séries sont déjà en vente; elles donnent l'indication d'environ 11700 Mémoires. La quatorzième série est actuellement à l'impression.

On trouvera la liste complète des abréviations dans l'*Index du Répertoire bibliographique,* également publié par la librairie Gauthier-Villars (prix : 2fr).

La Rédaction.

A. J. M. — American Journal of Mathematics (Baltimore). (Depuis 1878.)

A. M. — Acta mathematica (Stockholm). (Depuis 1882.)

A. M. C. — Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (Christiania).

A. M. F. — Archiv Mathematiky a Fisiky (de M. Em. Weyr) (Prague). (Depuis 1875.)

A. P. C. — Commentarii Academiæ imperialis Scientiarum Petropolitanæ (Saint-Pétersbourg). (Depuis 1726.)

A. T. — Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

A. W. — Archives de la Société mathématique d'Amsterdam. (3 volumes, parus en 1859, 1866 et 1874. Publication remplacée en 1875 par *N. A. W.*)

B. A. — Bulletin des Sciences astronomiques (Paris). (Depuis 1870.)

B. A. B. — Bulletin de l'Académie de Belgique (Bruxelles). (Depuis 1833.)

B. Bon. — Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato dal P. B. Boncompagni (Rome). (De 1868 à 1887.)

B. D. — Bulletin des Sciences mathématiques, publié par M. Darboux (Paris). (Depuis 1870.)

B. M. — Bibliotheca mathematica (de M. G. Eneström) (Stockholm et Leipzig). (Depuis 1884.)

B. M. E. — Bulletin de Mathématiques élémentaires de M. Niewenglowski (Paris). (Depuis 1894.)

B. M. S. — Bulletin de Mathématiques spéciales de M. Niewenglowski (Paris). (Depuis 1894.)

C. G. Q. — Correspondance mathématique et physique, par Garnier et Quetelet (Bruxelles). (De 1825 à 1839.) (11 volumes.)

C. M. J. — Cambridge Mathematical Journal (Cambridge). (De 1839 à 1845.)

C. R. — Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris). (Depuis le 3 août 1835.)

Cr. — Journal für die reine und angewandte Mathematik (Journal de Crelle) (Berlin). (Depuis 1826.)

D. V. M. — Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Leipzig).

E. M. — Enseignement mathématique (Paris). (Depuis 1899.)

E. T. R. — Educational Times Reprint (Londres). (Depuis 1864.)

G. B. — Giornale di Matematiche (Battaglini) (Naples). (Depuis 1862.)

I. M. — Intermédiaire des Mathématiciens (Paris). (Depuis 1894.)

J. B. — Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (Berlin). (Depuis 1868.)

J. E. — Journal de Mathématiques élémentaires de MM. de Longchamps et Bourget (Paris). (De 1877 à juin 1901.)

J. E. P. — Journal de l'École Polytechnique (Paris). (Depuis 1794.)

J. E. V. — Journal de Mathématiques élémentaires de Vuibert (Paris). (Depuis 1876.)

J. M. — Journal de Mathématiques pures et appliquées (Paris). (Depuis 1836.)

J. R. I. — Journal of the Royal Institution of Great-Britain (Londres).

J. S. — Journal de Mathématiques spéciales de M. de Longchamps (Paris). (De 1880 à juin 1901.)

J. S. M. — Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas de M. Gomes Teixeira (Coïmbre). (Depuis 1877.)

J. T. — Journal de la Société physico-mathématique de Tokio.

M. — Mathesis (Gand). (Depuis 1881.) (Fait suite à la *N. C.*)

M. A. — Mathematische Annalen (Leipzig). (Depuis 1869.)

M. A. A. — Mémoires de l'Académie royale des Sciences d'Amsterdam. (Depuis 1854.)

M. A. B. — Mémoires de l'Académie de Belgique (Bruxelles). (Depuis 1846.) (Suite des *N. M. A. B.*)

M. A. L. R. — Memorie della Reale Accademia dei Lincei (Rome). (Depuis 1875.)

M. A. P. — Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris.

M. H. — Monatshefte für Mathematik und Physik (Vienne). (Depuis 1889.)

M. M. — The Messenger of Mathematics (Londres et Cambridge). (Depuis 1872.)

M. P. A. — Le Matematiche pure ed applicate (Oristano). (De février 1901 à janvier 1903.) (2 volumes.)

M. S. B. — Mémoires de la Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques de Bordeaux. (Depuis 1857.)

M. S. L. — Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége. (Depuis 1843.)

M. U. Ka. — Mémoires de l'Université de Kasan.

M. U. M. — Mémoires scientifiques de l'Université impériale de Moscou (section physico-mathématique).

N. A. — Nouvelles Annales de Mathématiques (Paris). (Depuis 1842.)

N. A. W. — Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. (Amsterdam.) (Depuis 1875.) (Suite des *A. W.*)

N. C. — Nouvelle Correspondance mathématique de M. E. Catalan (Bruxelles). (De 1874 à 1880.) (6 volumes.) (Publication reprise en 1881 sous le titre de *Mathesis.*)

N. L. M. — Memorie della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei (Rome).

N. M. A. B. — Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles. (De 1817 à 1845. 19 volumes.)

P. L. M. S. — Proceedings of the London Mathematical Society (Londres). (Depuis 1866.)

P. M. — The Philosophical Magazine, or Annals of Chemistry, Mathematics, etc. (Londres).

P. M. R. — Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario (Livourne). (Depuis 1885.)

P. M. S. — El Progreso Matematico, de M. Z.-G. de Galdeano (Saragosse). (De 1891 à 1895 et de 1899 à 1900 : 7 volumes. Publication reprise en 1901 sous le titre de *Revista trimestral de Matematicas.*)

P. R. S. E. — Proceedings of the Royal Society of Edinburgh (Édimbourg). (Depuis 1883.)

P. R. S. L. — Proceedings of the Royal Society of London (Londres).

Q. J. — The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics (Londres). (Depuis 1859.)

R. A. L. R. — Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei (Rome). (Depuis 1885.)

R. A. N. — Rendiconti della Reale Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli (Naples). (Depuis 1842.)

R. B. A. — Reports of the British Association for the advancement of science (Londres).

R. C. M. P. — Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (Palermo). (Depuis 1884.) (Annuels depuis 1888.)

R. M. — Rivista di Matematica (Turin). (Depuis 1891.)

R. M. S. — Revue de Mathématiques spéciales (Paris). (Depuis octobre 1890.)

R. Q. S. — Revue des questions scientifiques (Bruxelles). (Depuis 1877.)

R. T. M. — Revista trimestral de Matematicas (Saragosse). (Depuis 1901.) (Suite du *P. M. S.*)

S. A. B. — Sitzungsberichte der Kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin). (Depuis 1836.)

S. A. M. — Sitzungsberichte der Mathematisch-Physikalischen Kl. der Kgl. Akad. der Wiss. zu München (Munich). (Depuis 1871.)

S. A. W. — Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien (Vienne). (Depuis 1848.)

S. E. — Mémoires des Savants étrangers (Paris).

S. M. - Bulletin de la Société mathématique de France (Paris). (Depuis 1872.)

S. M. A. — Société mathématique d'Amsterdam.

S. M. Am. — Bulletin of the American Mathematical Society (New-York).

S. M. H. — Mittheilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft (Hambourg et Leipzig). (Depuis 1889.)

S. M. Ka. — Bulletin de la Société mathématique de Kasan.

S. M. Kh. — Société mathématique de Kharkow.

S. M. M. — Société mathématique de Moscou.

S. N. J. — Sitzungsberichte der Naturforchergesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat).

S. P. — Bulletin de la Société philomathique de Paris. (Depuis 1788.)

T. M. — Nyt Tidsskrift for Mathematik (Copenhague). (Depuis 1859.)

T. R. S. L. — Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Londres). (Depuis 1710.)

W. O. — Wiskundige opgaven met de Oplossingen (Amsterdam).

Z. H. — Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (von Hoffmann) (Leipzig). (Depuis 1870.)

Z. S. — Zeitschrift für Mathematik und Physik (von Schlömilch) (Leipzig). (Depuis 1856.)

La Rédaction accueillera avec reconnaissance les additions et modifications que nos Correspondants voudront bien lui signaler

pour compléter et préciser tant cette liste que celle de l'*Index du Répertoire bibliographique* susmentionné, mais surtout cette dernière. Ces informations seront utilisées, en leur temps, soit dans le prochain volume de l'*Intermédiaire,* soit dans une réédition de l'*Index du Répertoire bibliographique,* de façon à réaliser, progressivement et aussitôt que possible, un premier inventaire synoptique et chronologique des principales publications contemporaines avec l'indication de leurs devancières.

OBSERVATIONS IMPORTANTES.

I. — Les indications qui précèdent l'énoncé de chaque question sont celles qui en donnent la classification d'après l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

II. — La notation Σ après une question indique que c'est un sujet d'étude et non une question proprement dite.

En principe, le journal ne publiera, en ce qui concerne ces sujets d'étude, que les renseignements bibliographiques qui peuvent permettre de les aborder ou l'indication sommaire des recherches qu'ils auront provoquées; à moins qu'ils ne comportent une courte réponse.

III. — La notation (S) après une question indique que l'auteur en a déjà une solution, mais qu'il voudrait en obtenir une autre.

IV. — Comme nous l'avons déjà fait depuis 1897, nous continuons à signaler les réponses multiples par l'indication, entre parenthèses, du millésime et de la page où a été publiée chaque réponse précédente.

Avec la même notation, et pour faciliter les recherches, nous indiquerons aussi, pour chaque réponse, l'endroit où a été publiée la question correspondante.

V. — Eu égard aux résultats déjà obtenus, nous continuerons à reproduire les questions déjà anciennes qui sont restées jusqu'ici sans réponse. Nous le ferons dans la mesure du possible, c'est-à-dire autant que nous le permettront les questions nouvelles adressées à la Rédaction, et la place dont nous disposerons. Grâce à cette réimpression, il peut se rencontrer de nouveaux collaborateurs en état de répondre à ces questions.

Pour ces questions rééditées, nous indiquerons également entre parenthèses leur publication primitive.

VI. — La Rédaction reçoit des Correspondants étrangers qui craindraient de ne pas posséder suffisamment la langue française les questions, réponses et communications en *allemand, anglais, espagnol, italien, russe* et *latin* (¹). Les auteurs pourront, s'ils savent un peu le français, joindre à leur envoi une traduction française. La Rédaction se charge en tous cas de faire ou de reviser la traduction.

Les Communications en *esperanto* (*voir* **1900**, p. 230) sont également accueillies; cette langue internationale auxiliaire, d'une compréhension si facile, au moins pour toutes les nations européennes, peut être une précieuse ressource pour quelques Correspondants.

VII. — A. Nos dispositions sont prises pour publier *rapidement* les questions que nous avons en portefeuille, de manière à pouvoir désormais faire paraître toutes les questions dans le numéro sous presse à leur réception ou tout au moins dans le suivant.

B. Quand une réponse dépasse 12 ou 15 lignes, nous demandons à l'auteur de cette réponse de vouloir bien nous l'envoyer sous deux formes : 1° une rédaction *très sommaire*, quelques lignes seulement, donnant la réponse sans explication ou la constatant simplement, si tout résumé est impossible; 2° une réponse plus détaillée, avec les développements nécessaires ou intéressants.

La réponse (1°) sera insérée sans aucun délai, ainsi que celles des réponses complètes qui, par leur nature, peuvent être courtes.

La réponse (2°) sera communiquée par nous à l'auteur de la question, s'il nous a manifesté ce désir en nous l'envoyant, ou postérieurement; puis, après qu'il nous l'aura retournée, aux correspondants qui nous en feraient la demande; enfin, nous l'insérerons dans le journal, comme à l'ordinaire, aussitôt que la chose deviendra possible ou nous essaierons d'en obtenir la publication dans un autre Journal mathématique en signalant cette publication dans l'*Intermédiaire*.

C. Si l'auteur d'une réponse développée en désire l'insertion très prochaine, il pourra l'obtenir par une souscription de 7^{fr} par page d'impression (le minimum de la souscription étant de 2 pages,

(¹) M. Papelier, professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Orléans, s'est chargé de traduire les manuscrits russes.

soit 14[fr], quand même celle-ci comprendrait moins de 2 pages; le surplus serait employé à augmenter le débit normal de l'*Intermédiaire*) adressée, par notre entremise, à M. Gauthier-Villars. Cette souscription donnera droit à l'auteur de recevoir 25 exemplaires d'un tirage à part de sa Communication. (*Voir* l'Avis de 1901 à nos Correspondants.)

VIII. — Les questions publiées dans l'*Intermédiaire* ne sont pas des problèmes ou exercices; ce sont des demandes faites dans l'intérêt de la Science ou dans celui de l'auteur. Le journal cherche donc : 1° à appeler l'attention des mathématiciens sur des questions importantes ou intéressantes : prix académiques, sujets de thèses, sujets d'études, recherches historiques ou bibliographiques, questions d'enseignement, expériences et observations vérifiant des théories mathématiques ou inversement, etc., les réponses devant, en principe, être développées dans d'autres recueils mathématiques, physiques, astronomiques, météorologiques, techniques, etc.; à ce point de vue il s'adresse surtout aux savants et aux débutants; 2° à servir d'intermédiaire entre les divers mathématiciens pour des questions d'importance absolument quelconque, même pour des détails ou des problèmes relativement simples; à ce point de vue il s'adresse à tous, en particulier aux professeurs, aux ingénieurs, aux curieux; 3° à vulgariser : il peut donc, à propos d'une question, publier des renseignements bibliographiques ou l'indication de résultats qui peuvent être connus de l'auteur de la question, mais qui seront utiles à ceux qu'elle intéresse et qui ne sont pas suffisamment au courant du sujet, de façon à éviter autant que possible des demandes d'explications complémentaires.

De cette manière, le journal établit un lien entre les mathématiciens de divers ordres; que ceux-ci diffèrent par leur force ou leurs spécialités, il peut contribuer à leur inspirer le goût d'études plus difficiles ou d'une autre nature.

IX. — Éviter autant que possible les doubles emplois en s'assurant si les questions ou réponses ont déjà paru dans le journal.

Introduire le millésime dans toutes les références bibliographiques.

Porter de préférence son attention sur les questions restées jusqu'ici sans réponse.

X. — La Rédaction se réserve de ne pas insérer les questions ou réponses qui ne sont pas écrites au recto seulement de chaque feuille, ou encore celles qui seraient rédigées d'une façon peu soignée, ou mal écrites, ou qui ne laisseraient pas en tête la place suffisante (une ou deux lignes) pour les diverses indications qui doivent y figurer.

Elle prie les correspondants de ne pas mettre, autant que possible, deux questions ou réponses sur une même feuille, ou tout au moins de laisser entre elles deux ou trois lignes.

L'oubli de certaines de ces prescriptions peut, en effet, obliger la Rédaction à recopier une question ou une réponse si elle veut l'insérer.

XI. — La Rédaction est assurée du 1er mai au 1er novembre par M. A. Grévy, 62, rue Saint-Placide, Paris; du 1er novembre au 1er mai par M. Edmond Maillet, rue de Fontenay, 11, Bourg-la-Reine (Seine). — Les Communications, questions, réponses, etc. peuvent être adressées à MM. C.-A. Laisant, 162, avenue Victor-Hugo, Paris; E. Lemoine, 4, boulevard de Vaugirard, Paris; A. Grévy ou Ed. Maillet. *Les Communications urgentes doivent être adressées au rédacteur de service.*

XII. — Nous prions ceux de nos Correspondants qui veulent bien nous signaler des *errata* de ne nous indiquer que les corrections non évidentes, c'est-à-dire celles seulement que le lecteur peut hésiter à faire lui-même.

A l'avenir, les réponses non insérées, mais mentionnées comme étant à la disposition des auteurs des questions, seront conservées pendant un an par la Rédaction; au bout de ce temps elles pourront être détruites.

Les auteurs de questions ou réponses sont priés de faire connaître leur adresse à la Rédaction, par exemple en marge de leur Communication. Ils ont la faculté de les signer d'un pseudonyme; mais, en principe, leurs Communications ne sont insérées que s'ils nous font connaître leur nom.

C.-A. Laisant, E. Lemoine,
Ed. Maillet, A. Grévy.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

QUESTIONS.

2505. [Σ] (**1903**, 7) PRIX ACADÉMIQUES. — *Académie des Sciences de Paris.* — Nous avions annoncé que, pour le grand prix des Sciences mathématiques, le prix Bordin et le prix Vaillant, les manuscrits devaient être envoyés au Secrétariat de l'Académie sans nom d'auteur et avec devise avant le 1er octobre 1904. Cette date est inexacte : au contraire de ce qui se passait auparavant, l'Académie des Sciences a décidé que, *à partir de* 1902, la date de clôture du concours pour ces trois prix serait la même que pour les autres prix, c'est-à-dire celle du 1er juin (et non 1er octobre), et que les manuscrits pourraient être signés par leur auteur.

LA RÉDACTION.

2701. [**I19c**] (S) Si $ab - cd = -1$, l'équation

$$a^2c^2 - 2b^2d^2 = \pm 2$$

ne saurait être satisfaite par des valeurs entières de a, b, c, d (supposées positives pour fixer les idées) que de deux manières :

1° $a = b = d = 1$, $c = 2$;

2° $a = d = 1$, $b = 3$, $c = 4$.

Je désirerais une démonstration directe de cette proposition.

P.-F. TEILHET.

2702. [L^1 16a] *Billard elliptique.* — Étant donnés deux points A et B à l'intérieur d'une ellipse, déterminer deux points C et D sur l'ellipse tels qu'une bille partant de A rencontre l'ellipse en C, soit réfléchie en D et revienne en B, après une double réflexion. Combien le problème comporte-t-il de solutions?

Généraliser pour 3, 4, ..., n réflexions successives.

Cas où l'ellipse devient un cercle. E.-N. Barisien.

2703. [V1a] Le Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (feuilles lithographiées) ou même les Cours d'Analyse imprimés indiquent, mais rarement, les applications pratiques de ce Cours; en particulier il est exceptionnel que des applications aux carrières ultérieures de la plupart des Polytechniciens y soient indiquées (il ne s'agit ici, bien entendu, que de renseignements bibliographiques). Il serait pourtant, croyons-nous, bien utile, soit dans le but d'inculquer aux jeunes Polytechniciens la conviction que les diverses parties du Cours leur sont indispensables, soit pour les renseigner au sujet de ces applications et leur montrer en détail le lien qui existe entre le Cours d'Analyse et leurs occupations futures, que des renseignements bibliographiques développés fussent publiés à cet égard, soit dans les Cours d'Analyse de l'École, soit à part. Un travail de cette nature ne serait pas bien difficile, soit pour les professeurs, soit pour l'ensemble du corps enseignant de l'École, composé en majorité d'anciens élèves.

Une observation semblable peut s'appliquer, par exemple, au Cours de Mécanique, peut-être à d'autres.

Nous émettons le vœu qu'un travail bibliographique de ce genre soit ou annexé aux feuilles lithographiées, ou publié à part et tenu à jour. *Un Antique.*

2704. [C2k] Peut-on abaisser successivement l'exposant n de l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{x(\log x)^n\,dx}{\mathrm{Ch}^2 x},$$

de façon à réduire progressivement cet exposant à l'unité, valeur pour laquelle

$$\int_0^\infty \frac{x \log x}{\mathrm{Ch}^2 x}\,dx = -\log 2\left(\frac{3}{2}\log 2 - 1\right),$$

ou même à zéro, valeur pour laquelle

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\mathrm{Ch}^2 x} = \log 2\ ?$$

V. Williot.

2705. [**K2a**] En appliquant les formules des coordonnées homogènes à un certain problème de Géométrie, j'ai trouvé les théorèmes suivants dont je possède aussi des démonstrations élémentaires et qui admettent des conséquences intéressantes :

I. *Si l'on désigne par* B_1, B_2, B_3 *les sommets d'un triangle inscrit au triangle* $A_1A_2A_3$ *et par r le rayon du cercle* $A_1A_2A_3$, *on a l'aire du triangle*

$$B_1B_2B_3 = \frac{A_1B_3 . A_2B_1 . A_3B_2 + A_1B_2 . A_2B_3 . A_3B_1}{4r},$$

en considérant le segment A_iB_k *positif ou négatif, selon qu'il est* $\lessgtr$ *que le côté sur lequel il est situé.*

II. *Si les droites* PA_1, PA_2, PA_3 *qui joignent un point* P *aux sommets d'un triangle* $A_1A_2A_3$ *forment les angles*

$$PA_1A_2 = \alpha'_1,\quad PA_1A_3 = \alpha''_1,\quad PA_2A_1 = \alpha''_2,$$
$$PA_2A_3 = \alpha'_2,\quad PA_3A_1 = \alpha'_3,\quad PA_3A_2 = \alpha''_3;$$

avec les côtés du triangle, on a l'identité

$$\cot\alpha'_1 + \cot\alpha'_2 + \cot\alpha'_3 + \cot\alpha''_1 + \cot\alpha''_2 + \cot\alpha''_3$$
$$= \cot\alpha'_1 \cot\alpha'_2 \cot\alpha'_3 + \cot\alpha''_1 \cot\alpha''_2 \cot\alpha'''_3.$$

Ces théorèmes sont-ils connus?

A. Tafelmacher.

2706. [M¹5a] Quelles sont les propriétés particulières des cubiques à point double dont les tangentes en ce point sont rectangulaires, en dehors de la suivante?

Toute corde vue du point double sous un angle droit coupe la cubique en un point fixe. T. LEMOYNE.

2707. [M¹5e] Le théorème suivant est-il connu?

Les coniques, qui passent par le point double d'une cubique et deux points fixes de cette courbe, qu'elles coupent suivant des cordes vues du point double sous un angle droit, ont un quatrième point commun.

On en déduit facilement, dans le cas des cubiques circulaires, que :

Les milieux des cordes d'une cubique circulaire, vues du point double sous un angle droit, sont sur une parallèle à l'asymptote de la courbe. T. LEMOYNE.

2708. [M¹5cα] Le théorème suivant de la strophoïde est-il connu? Renseignements bibliographiques.

Si par le point double d'une strophoïde on mène deux cordes quelconques, le cercle qui a son centre sur l'une d'elles et passe par les extrémités de l'autre coupe le cercle qui a son centre sur la seconde et passe par les extrémités de la première, en un point de la strophoïde.

T. LEMOYNE.

2709. [M¹5kα] Connaît-on le théorème suivant de la Théorie des cubiques circulaires? Renseignements bibliographiques.

Si, par le point double O *d'une cubique circulaire, on mène une droite quelconque* Δ, *les cercles passant par* O *et ayant leurs centres sur* Δ *interceptent dans la cubique des cordes qui passent par un point fixe* C *de cette courbe.*

Le point C est l'intersection de la courbe et de la parallèle à l'asymptote menée par l'extrémité M de la corde OM perpendiculaire en O à Δ.

Ce théorème que l'on démontre d'ailleurs facilement renferme, évidemment, comme cas particulier, la définition ordinaire de la strophoïde. T. LEMOYNE.

2710. [**M¹6h**] Y a-t-il des Ouvrages français, anglais ou allemands qui donnent une étude analytique ou géométrique assez étendue du limaçon de Pascal? Indiquer les noms des auteurs et des éditeurs. T. LEMOYNE.

2711. [**V**] Existe-t-il des traductions françaises de l'Ouvrage de Newton : *Enumeratio linearum tertii ordinis*, de celui de Stirling : *Lineae tertii ordinis Neutonanæ*, et enfin des Ouvrages de Plücker : *System der analytischen Geometrie*; et *Théorie des courbes algébriques?*

FÉLIX GODEY.

2712. [**D6iβ**] M. J.-L.-W.-V. Jensen a indiqué (*I. M.*, **1895**, 346) une expression remarquable en intégrale définie de la fonction holomorphe $(s-1)\zeta(s)$ de Riemann :

$$(1) \qquad F(s) = (s-1)\zeta(s) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}+yi\right)^{1-s}}{(e^{\pi y}+e^{-\pi y})^2}\,dy.$$

Cette expression met en lumière la dissymétrie absolue de la fonction $(s-1)\zeta(s)$ à droite et à gauche de la parallèle à l'axe imaginaire : $s=\frac{1}{2}$.

En effet :

$$F\left(\frac{1}{2}+\sigma+ti\right) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}+yi\right)^{\frac{1}{2}-i}}{(e^{\pi y}+e^{-\pi y})^2} \left(\frac{1}{2}+yi\right)^{-\sigma} dy,$$

$$F\left(\frac{1}{2}-\sigma+ti\right) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}+yi\right)^{\frac{1}{2}-ti}}{(e^{\pi y}+e^{-\pi y})^2} \left(\frac{1}{2}+yi\right)^{+\sigma} dy,$$

et fait ressortir l'impossibilité de l'égalité de ces deux fonctions pour de mêmes valeurs de t et de σ.

Comme l'a fait observer M. Ernst Lindelöf (1), cette dissymétrie rend *plus que probable* l'inexistence de racines de $\zeta(s)$ de la forme

$$\frac{1}{2} \pm \sigma \pm \alpha i \qquad (\sigma, \alpha \text{ réels et positifs}),$$

et justifie la prévision de Riemann que toutes les racines complexes de $\zeta(s)$ sont de la forme

$$\frac{1}{2} \pm \alpha i.$$

Il serait à désirer que la démonstration de la formule (1) fût donnée dans l'*Intermédiaire*. V. WILLIOT.

2713. [I9b] Riemann a introduit dans l'Analyse une fonction $\zeta(s)$ qui coïncide avec les deux membres de l'identité d'Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right),$$

tant qu'ils convergent. Or cette convergence exige que

$$s = 1 + \frac{1}{N},$$

N pouvant être *très grand, mais fini*.

Si la variable s décroît depuis cette valeur jusqu'à 1, la coïncidence entre les deux fonctions cesse et, quand N devient infini,

$$\zeta(s) = \pm N + C,$$

selon que s tend vers 1 par des valeurs supérieures ou inférieures à 1 ; tandis que

$$\sum_{1}^{N} \frac{1}{n^s} = \log N + C,$$

valeur infiniment petite par rapport à celle de $\zeta(s)$.

(1) *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXI, 1902, n° 3, p. 41.

Cependant on voit constamment substituer la fonction $\zeta(s)$ à $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ et faire tendre ensuite s vers l'unité, bien que les deux fonctions aient cessé de coïncider avant la limite $s = 1$.

Comment remédier à ce défaut (au moins apparent) de rigueur?

V. WILLIOT.

2714. [**E1g**] Au cours de leurs savantes recherches sur le prolongement analytique, MM. Le Roy et Ernst Lindelöf ont donné comme application la formule suivante qui détermine la fonction Γ dans la partie du plan à partie réelle positive :

$$(1) \qquad \Gamma(1-s) = \lim_{x=1} (1-x)^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}, \qquad R(s) < 1.$$

En recherchant une démonstration élémentaire de cette remarquable relation, je suis amené à poser

$$x = 1 - \frac{1}{N},$$

et à l'écrire

$$\Gamma(1-s) = \lim_{N=\infty} \frac{1}{N^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^n}{n^s},$$

et je trouve ensuite

$$P(1-s) = \lim_{N=\infty} \frac{1}{N^{1-s}} \sum_{n=1}^{N} \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^n}{n^s},$$

et par différence

$$Q(1-s) = \lim_{N=\infty} \frac{1}{N^{1-s}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^n}{n^s},$$

P et Q désignant les fonctions de Prym.

Je désirerais être fixé sur l'exactitude de ces résultats et, s'ils sont exacts, en avoir une démonstration rigoureuse.

V. WILLIOT.

2715. [**O7b**] On donne un point lumineux K placé à une hauteur $OK = k$ au-dessus d'un écran horizontal et un abat-jour conique dont l'axe vertical $OH = h$ passe par le point K, ayant α pour demi-angle au sommet et l pour côté. On demande quelle valeur il faut donner à la hauteur h pour que l'éclairement de l'écran au point O soit maximum. Il serait intéressant de trouver aussi la loi de l'éclairement de l'écran.

Examiner les cas qui résultent des hypothèses suivantes :

1° L'abat-jour est mat ou réfléchissant.

2° L'écran est mat, réfléchissant ou noir.

On pourra commencer par examiner le cas particulier de $\alpha = 90°$, $l = \infty$.

H. DELLAC.

2716. [**D2b**] Pourrait-on citer un exemple de fonction entière $f(z)$ d'ordre fini $\rho \neq 0$, qui, pour toute valeur de $\varphi(z = r e^{i\varphi})$, ait son module $= e^{r^{\rho+\varepsilon}}$ pour une infinité de valeurs de r (ε positif ou négatif, tendant vers 0 quand r croît indéfiniment)? (Comp. *A. E. N.*, nov. 1903, p. 506 et 515.)

E. MAILLET.

2717. [Σ] Nous avons indiqué (*J. de Math.*, 1902, p. 353-355, théorèmes IV et V), le moyen de déterminer le facteur exponentiel d'une fonction entière d'ordre apparent fini non entier, et indiqué dans ce cas, *mais dans ce cas seulement* (l'énoncé du théorème V devant comporter cette réserve), un critère pour reconnaître les fonctions entières simples, c'est-à-dire celles qui n'ont pas de facteur exponentiel.

Il serait utile de résoudre la question, même en partie (pour les ordres 1, 2, 3, ...) dans le cas d'une fonction entière d'ordre apparent fini entier.

Il suffit de connaître : BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1900; E. MAILLET, *Sur les fonctions entières et quasi-entières* (*J. de Math.*, 1902).

E. MAILLET.

2718. [Σ] Nous posons

$$x = e_0(x) = \log_0(x),$$
$$e^x = e_1(x) = \log_{-1}(x),$$
$$e^{e^x} = e_2(x) = \log_{-2}(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\log x = e_{-1}(x), \qquad \log\log x = \log_2 x = e_{-2}(x), \qquad \ldots.$$

On a

$$e_k[e_{k_1}(x)] = e_{k+k_1}(x),$$

k, k_1 entiers quelconques, positifs ou négatifs.

I. Existe-t-il des valeurs de k, m (m entier : 1° positif > 0; 2° quelconque) qui rendent $e_k(m)$ entier?

II. Quand il n'y en a pas, peut-on assigner une limite inférieure à la différence entre $e_k(m)$ et l'entier le plus voisin, quels que soient k et m?

Quand $k = 1$, on sait que e^m ($m \neq 0$ bien entendu) est transcendant; mais on n'a pas, croyons-nous, de réponse à notre deuxième question. E. Maillet.

2719. [**K11e**] Comment démontre-t-on simplement cette propriété :

La tangente extérieure et la tangente intérieure à deux cercles ont des longueurs dont le rapport est égal au rapport analogue que l'on obtient pour les tangentes à deux cercles transformés des premiers par inversion? *Canon.*

2720. [**I10**] Je désirerais la démonstration du théorème suivant de M. Sylvester (*C. R.*, t. XCVI) :

Si le nombre N *n'est pas une puissance de* 2, *il peut être formé par une suite de nombres consécutifs, et le nombre de ces suites qui donnent pour somme* N *est égal au nombre des diviseurs impairs de* N.

Plakhowo (Gouv[t] de Tambow, St. Tokarewka, Russie).

2721. [**B**] Je serais désireux de posséder une bibliographie aussi complète que possible des Traités d'un *caractère*

élémentaire ou d'enseignement concernant la Théorie des formes algébriques.

Il sera inutile de mentionner les Ouvrages en langue russe ou polonaise. P. RENARD.

2722. [**I2**] Tous les nombres N (écrits dans un système de numération à base unique et entière x), composés de chiffres égaux a, et tels que leurs carrés soient aussi composés de chiffres égaux b, sont donnés par les suites :

a	1	5	29	169	...	$a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$
x	1	7	41	239	...	$x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$
b	1	4	21	120	...	$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} - 2$

N^2 étant toujours formé de quatre chiffres.

On a ainsi

Base 7	4444	$= 55^2$,
» 41	(21)(21)(21)(21)	$= \overline{(29)(29)}^2$,
» 239	(120)(120)(120)(120)	$= \overline{(169)(169)}^2$,
....	....	

Peut-on déterminer tous les nombres, composés de chiffres égaux, et tels que leur puissance $q\,(q > 2)$ soit aussi composée de chiffres égaux ? P.-F. TEILHET.

2723. [**I2bα**] A-t-on remarqué que :

Tout diviseur premier du nombre

$$N = \frac{a^b + \varepsilon}{a + \varepsilon} \qquad (\varepsilon = \pm 1 \text{ et } b \text{ impair})$$

est de la forme $\lambda d + 1$, *d étant un diviseur premier, supérieur à l'unité, de b? Toutefois si b et $a + \varepsilon$ ont un facteur commun* D, *ce facteur divise aussi* N. *En particulier, si b est premier et premier avec $a + \varepsilon$, tout diviseur de* N *est de la forme* $\lambda b + 1$.

Si oui, a-t-on donné une démonstration de cette proposition ? P.-F. TEILHET.

RÉPONSES.

364. (**1895**, 164; **1903**, 145) (E.-M. Lémeray). — Voici la réponse dans un cas assez étendu, et susceptible de généralisations faciles. Soient c, c_0, c_1, ..., c_r des fonctions de n; $\alpha(x, n)$ une intégrale de l'équation aux différences mêlées

$$\alpha(x, n+1) = c_0\alpha + c_1\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \ldots + c_r\frac{\partial^r\alpha}{\partial x^r},$$

et $\varphi(x)$ une intégrale de l'équation linéaire

$$c\varphi - c_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + c_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \ldots + (-1)^r c_r\frac{\partial^r\varphi}{\partial x^r} = 0.$$

Si l'on pose

$$S_n = \int_p^q \alpha(x, n)\varphi(x)\,dx,$$

on aura, en intégrant successivement par parties et en indiquant par L l'expression aux limites,

$$S_{n+1} = (c_0 - c)S_n + L.$$

Or on peut disposer des arbitraires de l'intégration pour annuler L, et l'on a ainsi

$$S_{n+1} = (c_0 - c)S_n.$$

Anonyme.

Il resterait à donner des solutions un peu étendues de l'équation aux différences mêlées en α. E.-M. Lémeray.

595. (**1895**, 203) (*Pierref*). — *Résolution du système*

$$8x + 1 = z^2, \qquad 8x^2 + 1 = y^2$$

(**1896**, 47; **1897**, 226). — C'est une des nombreuses questions auxquelles peut s'appliquer simplement *la méthode d'élimination par les conditions résiduelles.*

Le système proposé revient à celui-ci

$$8z^2 - 8 = t^2, \qquad t = y^2 - 1.$$

Les solutions de la première équation sont

$$t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8 \quad 48 \quad 280 \quad 1632 \quad \ldots$$

avec la formule de récurrence

$$t_{n+1} = 6t_n - t_{n-1}.$$

Si, à l'aide de cette formule, nous formons la suite des résidus de t par rapport à 9, 25, 49 et aux premiers 11, 13, 17, 19, ..., 53, 59, 61 et si nous éliminons toutes les valeurs qui, augmentées d'une unité, ne sont pas des résidus quadratiques, nous voyons que t_{870} est le plus petit terme de la suite (en dehors de ceux qui fournissent les solutions connues, t_1 et t_2) qui reste à examiner. Or on a

$$t_{870} > 48.33^{434} > 5,203.10^{660},$$

c'est-à-dire que toute valeur nouvelle de x aurait au moins 660 chiffres.

Comme pour la question **2228** et à défaut d'une démonstration irréfutable, cette méthode semble bien indiquer qu'il n'y a pas d'autres solutions que celles déjà établies. P.-F. Teilhet.

641. (**1895**, 314) (C. Couturier). — *Convergence de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

pour $s > \frac{1}{2}$ (**1900**, 86). — La Note insérée (**1900**, 86) ne vise que la région $s > 1$. Il y a donc intérêt à revenir sur cette question pour $0 \leqq s \leqq 1$.

Il importe de bien distinguer la fonction $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, qui ne coïncide avec la première que pour $s > 1 + \varepsilon$, ε étant positif et fini, bien qu'aussi petit que l'on voudra.

Pour $s > -1$ on peut définir $\zeta(s)$,

$$\zeta(s) = \lim_{N=\infty} \left(\sum_{1}^{N} \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1 -} \right)$$

Pour $0 < s \leqq 1$, ce n'est pas la fonction $\frac{1}{\zeta(s)}$ qui se développe en la série $\sum \frac{\mu(n)}{n^s}$, mais bien la fonction $\frac{1}{\sum \frac{1}{n^s}}$.

En effet, la relation d'Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right) = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \ldots \right)$$

est une identité évidente pour $s > 0$, puisque le développement du produit reproduit identiquement la somme du premier membre. Tant que les deux membres restent finis, c'est-à-dire pour $s > 1 + \varepsilon$, on a une égalité entre deux expressions finies; pour $0 < s \leqq 1$ ces expressions deviennent infinies du même ordre, l'identité n'en subsistant pas moins.

Aussi, quand on renverse cette identité pour l'écrire

$$\frac{1}{\sum \frac{1}{n^s}} = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$$

$$= 1 - \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{p^s} + \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(pp')^s} - \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(pp'p'')^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

les deux membres deviennent infiniment petits et s'annulent pour $0 < s \leqq 1$.

Rappelons que la notation $\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ n'est qu'une manière abrégée d'écrire le développement ci-dessus du produit $\prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$ et qu'il paraît impossible d'étudier directement cette série dont les signes sont inconnus pour les termes éloignés.

Pour le cas limite $s = 0$, on peut considérer que la fonction de Jacobi,

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x},$$

s'inverse sous la forme

$$e^{-\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \psi(n^2 x).$$

A la limite $x = 0$,

$$e^{-\pi x} = 1, \qquad \psi(n^2 x) = \psi(0),$$

d'où

$$\frac{1}{\psi(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n),$$

et comme $\psi(0)$ est infini,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) = 0.$$

On peut donc répondre que $\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ est nulle pour $0 \leqq s \leqq 1$; mais il s'agit ici de l'inverse de la fonction $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ et non de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann qui, dans cet intervalle, ne coïncide pas avec le premier membre de l'identité d'Euler ; et l'on ne saurait tirer de la somme de cette série aucune conséquence relative à la fonction $\zeta(s)$.

V. WILLIOT.

680. (**1895**, 387) (A. BOUTIN). — *Solution en nombres entiers de l'équation*

$$x^3 + y^3 = z^3 + v^3$$

(**1896**, 121 ; **1897**, 63 ; **1898**, 253 ; **1902**, 72). — *Voir* notre réponse à la question **2179** ci-dessous (**1904**, 31). P.-F. TEILHET.

870. (**1896**, 174) (ED. HÉNET). — *Carrés écrits avec les mêmes chiffres* (**1897**, 38 ; **1903**, 232). — *Voir* la réponse à la question **954** ci-dessous, qui généralise notre précédente solution (**1903**, 232) de la question 870. P.-F. TEILHET.

954. (**1897**, 2) (H. TARRY). — *Nombres consécutifs dont certaines puissances s'écrivent avec les mêmes chiffres que d'autres puissances de même degré.* — On a la proposition suivante :

On peut former autant de groupes que l'on veut, chacun comprenant autant de nombres consécutifs que l'on veut, tels qu'avec les chiffres de la $q^{\text{ième}}$ puissance de l'un quelconque de ces nombres on puisse former une infinité de $q^{\text{ièmes}}$ puissances différentes, pour toutes les valeurs de q inférieures à m, m étant un entier donné, mais d'ailleurs aussi grand que l'on veut.

En effet, si [question 870 (1903, 232)] n et n' sont limitées en petitesse de façon à satisfaire aux inégalités (2), non seulement P^m et Q^m s'écrivent avec les mêmes chiffres, mais encore P^q et Q^q $(q < m)$ s'écrivent aussi avec les mêmes chiffres et

$$(3) \qquad P_\gamma = (\alpha . a^n + \beta - \gamma) a^p, \qquad Q_\gamma = (\overline{\beta - \gamma} . a^{n'} + \alpha) a^{p'}$$

jouissent de la même propriété que P et Q, pour toutes les valeurs $\gamma \leqq \beta$.

On a donc $\beta + 1$ nombres P_γ consécutifs dont toutes les puissances $q \leqq m$ s'écrivent avec les mêmes chiffres que les puissances q d'une infinité de nombres Q_γ [n' ayant seulement une limite inférieure donnée par l'inégalité (2)]. Bien qu'il semble d'ailleurs peu probable que l'on puisse renfermer dans une formule unique toutes les solutions de la question, il est facile de généraliser les résultats précédents. Soit

$$(4) \qquad P = (\alpha_1 . a^{n_1} + \alpha_2 a^{n_2} + \ldots + \alpha_l a^{n_l});$$

soient A_ν le coefficient de a_ν dans le développement de P^m, et ν_λ, $\nu_{\lambda+1}$ deux valeurs consécutives de ν. Si pour toutes les valeurs de λ on a

$$(5) \qquad A_\nu < a^{\nu_{\lambda+1} - \nu_\lambda},$$

on pourra en général former aisément des nombres Q tels que Q^m s'écrive avec les mêmes chiffres que P^m.

Soit en particulier

$$(6) \qquad n_2 = n_1 + r, \qquad n_3 = n_1 + 2r, \qquad \ldots, \qquad n_l = n_1 + \widehat{l-1} . r.$$

L'inégalité (5) devient

$$(7) \qquad A_\nu < a^r.$$

Considérons

$$(8) \qquad R = (\alpha_1 . a^{n_l} + \alpha_2 . a^{n_{l-1}} + \ldots + \alpha_l . a^{n_1}).$$

Le coefficient de $a^{(n_1 + kr)m}$ dans Q^m sera le même que celui de $a^{(n_1 + \widehat{l-1-k}. r)m}$ dans P^m et si donc r est plus grand que la limite inférieure r_1 déterminée par la plus grande valeur de A_ν, P_q et Q_q s'écriront avec les mêmes chiffres pour toutes les valeurs de $q \leqq m$ et

pour toutes les valeurs de $r \geqq r_1$, et P_γ et Q_γ, valeurs correspondantes de P et Q, où l'on aurait remplacé un ou plusieurs α, α_{ρ_1}, $\alpha_{\rho_2}, \ldots$, par $\alpha_{\rho_1} - \gamma_1$, $\alpha_{\rho_2} - \gamma_2, \ldots$, présentent la même particularité que P et Q.

On voit l'infinie diversité de combinaisons que permettent ces formules.

Si d'ailleurs on se donne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ et m, et que l'on fasse varier r au delà de sa limite inférieure r_1, on voit que l'on a des solutions d'une généralisation de la proposition énoncée dès le début.

Exemple. — Si

$$P = 10^{n_1}(\alpha_1 + \alpha_2 . 10^{7+\lambda_1} + \alpha_3 . 10^{14+2\lambda_1} + \alpha_4 . 10^{21+3\lambda_1}),$$
$$Q = 10^{n_2}(\alpha_4 + \alpha_3 . 10^{7+\lambda_2} + \alpha_2 . 10^{14+2\lambda_2} + \alpha_1 . 10^{21+3\lambda_2}),$$

α_1, α_2, α_3 et α_4 représentant l'un quelconque des chiffres 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9; n_1, n_2, λ_1 et λ_2 étant des entiers (positifs ou nuls) quelconques; q un entier quelconque $\leqq 5$, P^q et Q^q s'écrivent avec les mêmes chiffres. On a donc en particulier, si $n_1 = 0$ pour chaque valeur λ_1, α_1 variant de 0 à 9, des groupes de 10 nombres consécutifs P tels que les 1re, 2e, 3e, 4e et 5e puissances de chacun de ces nombres s'écrivent avec les mêmes chiffres que respectivement les 1re, 2e, 3e, 4e et 5e puissances d'une infinité de nombres Q.

Remarque. — Il est évident que toutes les solutions qui précèdent reposent sur le non-chevauchement des coefficients de a^ν. Il serait intéressant de résoudre la question dans le cas beaucoup plus complexe où ces coefficients chevauchent les uns sur les autres.

P.-F. TEILHET.

955. (**1897**, 2) (H. TARRY). — *Groupes de deux (ou plusieurs) nombres ayant plusieurs puissances composées des mêmes chiffres.* — *Voir* notre réponse à la question 954 qui fournit des solutions de la question 955 généralisée. P.-F. TEILHET.

1011. (**1897**, 50) (G. DE ROCQUIGNY). — *Proposition sur les nombres* (**1897**, 235; **1898**, 16). — La proposition légèrement modifiée : *Tout nombre entier excepté* 23 *est la somme arithmétique de deux carrés et de deux cubes positifs ou nuls* semble devoir être exacte.

La décomposition est immédiate pour tout nombre :

$$z = x^2 + \left\{ \begin{matrix} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 16,\ 17,\ 18 \\ 20,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36 \\ 37,\ 38,\ 39,\ 41,\ 43,\ 44,\ 45,\ 49,\ 50,\ 51,\ 52,\ 53,\ 54 \\ 55,\ 57,\ 58,\ 60,\ 63,\ 64,\ 65,\ 66,\ 68,\ 69,\ 70,\ 71 \\ 72,\ 73,\ 74,\ 76,\ 77,\ 79,\ 80,\ 81,\ 82,\ 83,\ 84,\ \ldots \end{matrix} \right\}$$

ou

$$z = t^3 + \left\{ \begin{matrix} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 16 \text{ à } 21 \\ 24 \text{ à } 38,\ 40,\ 41,\ 42,\ 44 \text{ à } 54,\ 56 \text{ à } 69,\ 72 \text{ à } 77 \\ 79 \text{ à } 86,\ 88 \text{ à } 93,\ 95 \text{ à } 102,\ 104,\ \ldots \end{matrix} \right\}.$$

Par suite les exceptions, s'il y en avait, seraient des deux formes à la fois :

$$z = x^2 + \left\{ \begin{matrix} 7,\ 14,\ 15,\ 19,\ 21,\ 22,\ 23,\ 30,\ 40,\ 42,\ 46 \\ 47,\ 48,\ 56,\ 59,\ 61,\ 62,\ 67,\ 75,\ 78,\ 85,\ \ldots \end{matrix} \right\},$$

$$= t^3 + \left\{ \begin{matrix} 7,\ 15,\ 22,\ 23,\ 39,\ 43,\ 55,\ 70,\ 71,\ 78,\ 87 \\ 94,\ 103,\ \ldots \end{matrix} \right\}.$$

J'ai ainsi vérifié en quelques minutes que jusqu'à 600, et même au delà, la règle se confirme. Le nombre de décompositions augmente d'ailleurs en même temps que z, avec, comme pour tous les théorèmes empiriques analogues (théorème de Goldbach...), des retours à des minima.

Remarque. — Il résulte de ma proposition démontrée [question **2687** (**1903**, 280)] que tout nombre entier > 10 est la somme de p cubes et q carrés positifs (et non nuls) pour deux certaines valeurs p et q telles que $\overline{p+q} = 5$. P.-F. Teilhet.

1050. (**1897**, 98) (E.-B. Escott). — *Plus petit nombre égal à la somme de deux cubes de deux façons* (**1897**, 286; **1898**, 66). — *Voir* notre réponse à la question **2179** (**1904**, 31).

P.-F. Teilhet.

1401. (**1898**, 266) (G. Tarry). — *Problème chinois* (**1899**, 142). — *Consulter* l'article « Sui numeri composti p, che verificano la congruenza di Fermat $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ », par M. Michele Cipolla (*A. D. M.*, 1903, p. 139). La Rédaction.

1459. (**1899**, 32) (G. Fontené). — *Somme de* 2^n *carrés* (*Algèbre*). — Réponse de M. P.-F. Teilhet communiquée à l'auteur de la question.
La Rédaction.

1470. (**1899**, 52) (G. de Rocquigny). — (**1899**, 191; **1900**, 65). — On a les identités

$$7^4 = 12^3 + 23^2 + 12^2 = 8^3 + 40^2 + 17^2 = 5^3 + 40^2 + 26^2,$$

$$8^4 = 14^3 + 34^2 + 14^2 = 12^3 + 48^2 + 8^2 = 6^3 + 62^2 + 6^2$$
$$= 3^3 + 63^2 + 10^2 = 3^3 + 62^2 + 15^2.$$

P.-F. Teilhet.

1544. (**1899**, 149) (E.-N. Barisien). — *Cercle des neuf points* (**1899**, 264; **1900**, 314). — Parmi toutes les constructions connues pour déterminer le point où le cercle des neuf points d'un triangle touche le cercle inscrit à ce triangle, voici, je crois, la plus simple :

Sur le cercle de centre I *inscrit au triangle* ABC, *on prend le point* E *diamétralement opposé au point où ce cercle touche* BC; *la droite, qui passe par* E *et par le milieu de* AI, *coupe le cercle inscrit au point où celui-ci est touché par le cercle des neuf points du triangle* ABC.
Mannheim.

1632. (**1899**, 219) (J.-J. Duran-Loriga). — *Les restricteurs* (**1901**, 314). — Le 27 novembre 1848, Cauchy présentait une Note *Sur les coefficients limitateurs considérés comme valeurs particulières de fonctions continues d'une ou de plusieurs variables* (*C. R.*, t. XXVII, p. 537; *Œuvres*, 1re série, t. XI, p. 89).

Dans la suite, il publia sur le même sujet d'autres Communications intitulées :

Sur les diverses formes qu'on peut assigner au limitateur I_x, *en prenant, par exemple,*

$$I_x = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}} \qquad \text{ou} \qquad I_x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\varepsilon + \sqrt{x^2}}\right),$$

ε *désignant un nombre infiniment petit* (*C. R.*, t. XXVII, 1848, p. 572; *Œuvres*, 1re série, t. XI, p. 90).

Mémoire sur les coefficients limitateurs ou restricteurs :

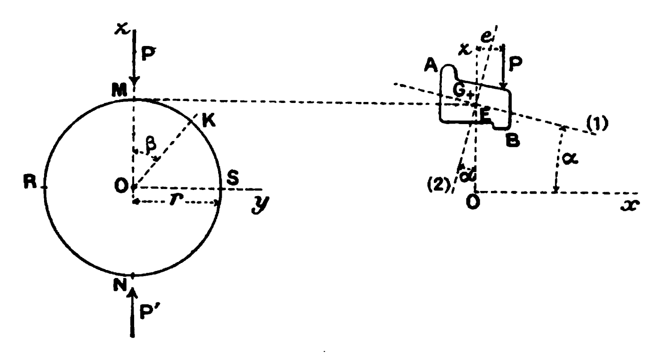
I. *Considérations générales.*

II. *Application au calcul des probabilités* (*Œuvres*, 1re série, t. XII, p. 79-94).

En *note,* il dit : « Dans les *Comptes rendus* de 1849, j'avais indiqué les facteurs de cette espèce sous le nom de *coefficients limitateurs*. Le mot *restricteur,* qui est plus court, offre aussi l'avantage de bien exprimer le rôle que ces coefficients jouent dans le calcul. » (*C. R.,* t. XXXVII, 1853, p. 150–162.)

(Cette indication bibliographique a été omise dans la réédition susmentionnée.) H. BROCARD.

1677. (**1899**, 265) et **2381.** (**1902**, 172) (E. FRANCKEN). — (**1903**, 114). — On donne un solide élastique, engendré par la révolution autour d'un axe Ox d'une figure AB *quelconque* de surface S, soumis à deux forces opposées passant par l'axe de révolution et perpendiculaires à cet axe. On demande les déplacements d'un point quelconque de la section méridienne zOx contenant les forces P, P′ et de la section par le plan méridien perpendiculaire au précédent xOy.



Pour avoir toute l'exactitude possible avec les méthodes de la résistance des matériaux, je considère la section AB, par le plan zOx, comme constituée par un feuillet dont les éléments auraient pour densité $\frac{1}{d}$ (d distance à l'axe de révolution). Le centre de gravité de ce feuillet infiniment mince sera le point autour duquel tournera, par rapport à une section méridienne infiniment voisine, la section considérée sous l'action d'un couple quelconque ([1]).

([1]) Le point E est un peu plus près de l'axe de révolution que le centre de gravité G d'un feuillet de densité constante. Dans le cas de la figure où les masses les plus éloignées de l'axe de révolution sont à gauche, il est un peu à droite de G.

Le cercle de rayon r décrit par le point E est ce qu'on appelle la *fibre neutre* dans la résistance des matériaux. Ce point est facile à construire graphiquement. M. Léauté a d'ailleurs donné (*Comptes rendus*, 16 juin 1884) un moyen de l'obtenir approximativement au moyen des centres de percussion.

On déterminera par un procédé analytique ou graphique les deux axes principaux d'inertie 1 et 2 du feuillet et ses moments d'inertie I_1 et I_2 par rapport à ces axes, en supposant aux éléments une densité $\frac{r}{d}$ (1).

Je considère une moitié de l'arc élastique MSN. L'arc MRN lui transmet en M des efforts qui peuvent être décomposés en trois forces et trois couples suivant les trois directions perpendiculaires, Oz parallèle à P et P', Ox l'axe de révolution et Oy; de même en N. Tout étant symétrique par rapport aux plans xOz et xOy, ces forces et les couples le sont.

Le solide MSN étant en équilibre, les deux forces extérieures de même sens parallèles à Oy sont nulles; de même les forces parallèles à Ox. La force verticale transmise à MSN et la réaction subie par MRN sont de sens contraire; par raison de symétrie elles devraient être de même sens, donc elles sont nulles. Donc les forces extérieures sur le demi-bandage MSN se réduisent à deux forces opposées $\frac{P}{2}$.

Les couples parallèles à la fibre neutre en M, par raison de symétrie, tendraient tous deux à pousser R et S en avant de la figure, par exemple. Mais étant l'un, l'action, l'autre, la réaction, ils devraient être de sens contraire, donc ils sont nuls. Les couples parallèles à Oz, par raison de symétrie, agiraient dans le même sens sur MSN en M et en N, donc ce solide ne pourrait être en équilibre s'ils étaient différents de zéro. Donc ces couples se réduisent à un couple μ parallèle à Ox (à calculer); auquel il faut joindre, pour avoir l'action de toutes les forces extérieures, un couple $\frac{Pe}{2}$ parallèle à Oy, e étant la distance de la force P à l'axe Oz passant par le centre d'élasticité.

---

(1) On peut aussi, avec des erreurs, très faibles en général, confondre le centre d'élasticité avec le centre de gravité et supposer une densité constante au feuillet pour déterminer I_1 et I_2.

Les formules connues de la déformation d'une pièce prismatique sont

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} a = \int \Bigg[& \frac{M_1 m_1}{EI_1} + \frac{M_2 m_2}{EI_2} + \frac{Nn}{ES} \\ & + 2(1+\eta)\left(\frac{Tt}{ES} + \frac{Mm}{E(I_1+I_2)}\right)\Bigg] dl, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\qquad \varphi = \int \left(\frac{M_1 m'_1}{EI_1} + \frac{M_2 m'_2}{EI_2} + 2(1+\eta)\frac{Mm'}{E(I_1+I_2)}\right) dl.$$

En appelant :

a la projection sur une direction arbitraire du déplacement d'un point de la pièce par rapport à une section origine considérée comme fixe;

φ la rotation autour d'une direction arbitraire d'un point de la pièce par rapport à un axe lié à la section origine;

M, M_1, M_2 les moments des forces extérieures, agissant sur l'extrémité libre du tronçon de la pièce auquel on étend l'intégration, par rapport aux axes suivants passant par le centre d'élasticité : la normale à la section, l'axe principal d'inertie 1, l'axe principal d'inertie 2 du feuillet de densité $\frac{r}{d}$;

m, m_1, m_2 les moments par rapport aux mêmes axes d'une force fictive égale à l'unité qui serait portée dans la direction arbitraire sur laquelle on cherche la projection du déplacement;

m', m'_1, m'_2 les moments par rapport aux mêmes axes d'un couple fictif égal à l'unité qui serait porté dans le sens de la rotation cherchée φ;

N projection de l'effort extérieur agissant à l'extrémité libre du tronçon auquel on étend l'intégration sur la normale à la section;

n projection de l'unité de la direction considérée sur cette même normale;

T projection de l'effort extérieur sur le plan de la section;

t projection de l'unité de la direction considérée sur T;

E coefficient d'élasticité;

η coefficient de contraction latérale.

A cause de la double symétrie dans la déformation, les sections, passant avant déformation par xOy et xOz restent perpendiculaires. Donc, en faisant la sommation de S en M, on doit

obtenir $\varphi = 0$, par rapport à une parallèle à l'axe de révolution, par exemple; ce qui déterminera μ. Pour une section k quelconque, on a (en prenant pour sens positif des moments ceux que donne la force verticale P)

$$M_1 = \left(\mu + \frac{P}{2} r \sin\beta\right) \cos\alpha, \qquad m'_1 = \cos\alpha,$$

$$M_2 = \left(\mu + \frac{P}{2} r \sin\beta\right) \sin\alpha, \qquad m'_2 = \sin\alpha,$$

$$M = \frac{P}{2} e \cos\beta, \qquad m' = 0,$$

$$dl = r\, d\beta.$$

En substituant dans (2), il vient

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{EI_1} + \frac{\sin^2\alpha}{EI_2}\right) r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mu + \frac{P}{2} r \sin\beta\right) d\beta = 0,$$

(3) $$\mu = -\frac{Pr}{\pi}.$$

Réduction w *du diamètre* $2r$ *de la fibre neutre dans le sens des forces extérieures* P (*flèche de flexion*). — On a

$$M_1 = Pr\left(-\frac{1}{\pi} + \frac{\sin\beta}{2}\right)\cos\alpha, \qquad m_1 = r \sin\beta \cos\alpha,$$

$$M_2 = Pr\left(-\frac{1}{\pi} + \frac{\sin\beta}{2}\right)\sin\alpha, \qquad m_2 = r \sin\beta \sin\alpha,$$

$$N = \frac{P}{2} \sin\beta, \qquad n = \sin\beta,$$

$$T = \frac{P}{2} \cos\beta, \qquad t = \cos\beta,$$

$$M = \frac{P}{2} e \cos\beta, \qquad m = 0.$$

Substituons dans le double de l'intégrale (1) étendue de 0 à $\frac{\pi}{2}$:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[Pr^2\left(-\frac{\sin\beta}{\pi} + \frac{\sin^2\beta}{2}\right)\left(\frac{\cos^2\alpha}{EI_1} + \frac{\sin^2\alpha}{EI_2}\right) + \frac{P}{2}\frac{\sin^2\beta}{ES} + 2(1+\eta)\frac{P}{2}\frac{\cos^2\beta}{ES}\right] r\, d\beta,$$

et intégrons. Il vient

(4) $$w = \frac{Pr^3}{E}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_1} + \frac{\sin^2\alpha}{I_2}\right)\left(-\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{Pr\pi}{4ES} + 2(1+\eta)\frac{Pr\pi}{4ES}.$$

Si $\eta = 0,3$, on a

$$(4') \qquad w = \frac{Pr}{E}\left[0,1488.r^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_1} + \frac{\sin^2\alpha}{I_2}\right) + \frac{2,827}{S}\right].$$

Rotation de la section verticale autour de la fibre neutre. — Prenons comme sens positif de la rotation celui du couple Pe, par rapport au centre d'élasticité, on a

$$m'_1 = -\sin\beta\sin\alpha, \qquad m'_2 = \sin\beta\cos\alpha, \qquad m' = \cos\beta.$$

Substituons dans l'équation (2), il vient

$$\varphi_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-Pr\left(-\frac{\sin\beta}{\pi} + \frac{\sin^2\beta}{2}\right)\left(\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{EI_1} - \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{EI_2}\right) + 2(1+\eta)\frac{P}{2}e\frac{\cos^2\beta}{E(I_1+I_2)}\right] r\,d\beta,$$

$$(5) \quad \varphi_y = Pr^2\left(\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{8}\right)\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{E}\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) + (1+\eta)\frac{Pre}{E(I_1+I_2)}\frac{\pi}{4}.$$

Si $\eta = 0,3$, on a

$$(5') \quad \varphi_y = \frac{Pr}{E}\left[r\cos\alpha\sin\alpha\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right)0,07438 + \frac{e}{I_1+I_2}1,0210\right].$$

Allongement v du diamètre $2r$, de la fibre neutre, dirigé perpendiculairement aux forces. — On a de même :

$$m_1 = -r\cos\beta\cos\alpha, \qquad m_2 = -r\cos\beta\sin\alpha, \qquad n = -\cos\beta,$$
$$t = \sin\beta, \qquad m = 0.$$

Substituons dans le double de l'intégrale étendue de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et intégrons. Nous obtiendrons

$$(6) \quad v = \frac{Pr^3}{E}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_1} + \frac{\sin^2\alpha}{I_2}\right)\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right) - \frac{Pr}{2ES} + 2(1+\eta)\frac{Pr}{2ES},$$

$$(6') \quad v = \frac{Pr}{E}\left[0,1366r^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_1} + \frac{\sin^2\alpha}{I_2}\right) + \frac{0,8}{S}\right].$$

Calcul de la rotation de la section par le plan xOy, autour de la fibre neutre. — On a

$$m'_1 = \cos\beta\sin\alpha, \qquad m'_2 = -\cos\beta\cos\alpha, \qquad m' = -\sin\beta.$$

Substituons dans l'intégrale (2) étendue de o à $\frac{\pi}{2}$ et intégrons. Il vient

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_z &= \frac{Pr^2\cos\alpha\sin\alpha}{E}\left(\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_2}\right)\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}\right) \\ &+(1+\eta)\frac{Pre}{E(I_1+I_2)}\frac{1}{4}, \end{aligned}\right.$$

$$(7')\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_z &= \frac{Pr}{E}\left[r\cos\alpha\sin\alpha\left(\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_2}\right)0,0683\right. \\ &\left.+\frac{e}{I_1+I_2}0,325\right]. \end{aligned}\right.$$

Flèche de gauchissement. Déplacement suivant O*x*. — On a

$$m_1 = -r\sin\alpha\sin\beta,\qquad m_2 = r\sin\alpha\cos\beta,\qquad n = 0,$$
$$t = 0,\qquad m = -r(1-\cos\beta).$$

Substituons dans l'intégrale (1) étendue de o à $\frac{\pi}{2}$ et intégrons. Il vient

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{Pr^3}{E}\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_2}\right)\left(\frac{2}{\pi}-\frac{\pi}{4}\right) \\ &-(1+\eta)\frac{Per^2}{E(I_1+I_2)}\left(1-\frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(8')\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{Pr^2}{E}\left[r\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_1}\right)0,1488\right. \\ &\left.-\frac{e}{I_1+I_2}0,2790\right]. \end{aligned}\right.$$

On aurait de même le déplacement d'un point quelconque en limitant les intégrations à la section qui le contient, ce qui ne présente aucune difficulté.

MESNAGER.

1892. (**1900**, 238) (G. DE ROCQUIGNY). — *Sommes de triangulaires.* — Réponse de M. Brocard communiquée à l'auteur de la question.

LA RÉDACTION.

2024. (**1901**, 37) (E.-N. BARISIEN). — *Capillarité du tire-ligne* (**1901**, 213). — L'étude suivante, dont je ne connais que le titre, a peut-être quelque rapport avec le sujet de la présente question :

J. DELEMER, *Sur le mouvement varié de l'eau dans les tubes capillaires, cylindrigires, évasés à leur entrée.* Paris, 1895, in-4°, 76 pages.

H. BROCARD.

2029. (**1901**, 38) (E.-N. Barisien). — *Solution complète de l'équation*

$$N = \frac{x^2 - y^2}{z^2 - t^2},$$

quel que soit l'entier N (**1901**, 238). — Tout nombre entier N est de l'une des formes :

1° $2(a^2 - b^2)$ (N impairement pair);
2° $a^2 - b^2$ (N impair ou pairement pair).

Dans le premier cas on a les deux séries générales de décomposition :

$$(\text{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} N &= 2(a^2 - b^2) \\ &= \frac{\left(\dfrac{2(a^2 - b^2)(\lambda^2 - \mu^2)}{\Delta} + \Delta\right)^2 - \left(\dfrac{2(a^2 - b^2)(\lambda^2 - \mu^2)}{\Delta} - \Delta\right)^2}{\overline{2\lambda}^2 - \overline{2\mu}^2}, \end{aligned} \right.$$

λ et μ étant des entiers quelconques et Δ un diviseur quelconque de $2(a^2 - b^2)(\lambda^2 - \mu^2)$;

$$(\text{II}) \quad N = 2(a^2 - b^2) = \frac{\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{2(a^2 - b^2)(\lambda.\overline{\lambda+1} - \mu.\overline{\mu+1})}{\Delta} + \Delta\right)^2 \\ &- \left(\frac{2(a^2 - b^2)(\lambda.\overline{\lambda+1} - \mu.\overline{\mu+1})}{\Delta} - \Delta\right)^2 \end{aligned} \right\}}{(2\lambda + 1)^2 - (2\mu + 1)^2},$$

λ et μ étant des entiers quelconques et Δ un diviseur quelconque de $2(a^2 - b^2)(\lambda.\overline{\lambda+1} - \mu.\overline{\mu+1})$.

Le simple examen de ces formules et de celles que j'ai déjà données (**1901**, 240) montre que, contrairement à la supposition énoncée (**1901**, 239) les décompositions signalées et fournies par les fractions continues ne sont pas les plus petites que l'on puisse obtenir. On a, par exemple,

$$\begin{aligned} 10 &= \frac{9^2 - 1^2}{3^2 - 1^2} = \frac{12^2 - 8^2}{3^2 - 1^2} = \frac{21^2 - 19^2}{3^2 - 1^2} \\ &= \frac{11^2 - 1^2}{4^2 - 2^2} = \frac{13^2 - 7^2}{4^2 - 2^2} = \frac{17^2 - 13^2}{4^2 - 2^2} = \frac{31^2 - 29^2}{4^2 - 2^2} = \ldots, \end{aligned}$$

et

$$130 = \frac{33^2-7^2}{3^2-1^2} = \frac{36^2-16^2}{3^2-1^2} = \frac{57^2-47^2}{3^2-1^2}$$
$$= \frac{69^2-61^2}{3^2-1^2} = \frac{132^2-128^2}{3^2-1^2} = \frac{261^2-259^2}{3^2-1^2}$$
$$= \frac{43^2-27^2}{4^2-2^2} = \frac{49^2-29^2}{4^2-2^2} = \frac{71^2-59^2}{4^2-2^2}$$
$$= \frac{83^2-73^2}{4^2-2^2} = \frac{133^2-127^2}{4^2-2^2} = \frac{197^2-193^2}{4^2-2^2} = \frac{391^2-389^2}{4^2-2^2} = \ldots.$$

Mes précédentes formules (**1901**, 240) (il faut y lire $\pm$ devant $b\lambda$) donnent pour 33 :

$$33 = \frac{10^2-1^2}{2^2-1^2} = \frac{18^2-15^2}{2^2-1^2} = \frac{50^2-49^2}{2^2-1^2}, \qquad \ldots.$$

On peut d'ailleurs les écrire

$$(\text{II}) \quad \begin{cases} N = a^2-b^2 \\ \quad = \dfrac{\left(\dfrac{(a^2-b^2)(\lambda^2-\mu^2)}{\Delta}+\Delta\right)^2-\left(\dfrac{(a^2-b^2)(\lambda^2-\mu^2)}{\Delta}-\Delta\right)^2}{\lambda^2-\mu^2}, \end{cases}$$

et l'on aura toutes les solutions différentes (sans obtenir deux fois la même) pour chaque couple (λ, μ) en donnant à Δ toutes les valeurs des diviseurs de $(a^2-b^2)(\lambda^2-\mu^2)$ inférieurs à la racine de

$$(a^2-b^2)(\lambda^2-\mu^2).$$

Hans Rifoctitlee.

2147. (**1901**, 190) (E.-N. Barisien). — *Normales à une ellipse.* — Soit

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

l'équation d'une droite quelconque : si, par les points P et Q où elle rencontre l'ellipse

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

on mène les normales à cette ellipse, celles-ci se coupent en un point M d'où l'on pourra abaisser encore deux normales à l'ellipse $\overline{MR}$ et $\overline{MS}$; l'équation de la droite $\overline{RS}$ sera alors

$$\lambda' x + \mu' y + \nu' = 0,$$

moyennant que l'on fasse $\lambda' = \frac{b^2}{\lambda}$, $\mu' = \frac{a^2}{\mu}$, $\nu' = -\frac{a^2 b^2}{\nu}$. Quant au point M, ses coordonnées α, β sont données par les égalités

$$(2) \qquad \alpha = \frac{(b^2\mu^2 - \nu^2)c^2\lambda}{(a^2\lambda^2 + b^2\mu^2)\nu}, \qquad \beta = -\frac{(a^2\lambda^2 - \nu^2)c^2\mu}{(a^2\lambda^2 + b^2\mu^2)\nu};$$

tout cela étant une conséquence immédiate de l'identification du produit $(\lambda x + \mu y + \nu)(\lambda' x + \mu' y + \nu')$ à l'expression

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + k(c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y),$$

qui, égalée à zéro, représente, suivant la valeur du paramètre k que l'on considère, celle que l'on voudra des coniques du faisceau déterminé par les quatre points P, Q, R, S. Il est clair encore que les coordonnées ξ et η du point F, intersection des droites $\overline{PQ}$ et $\overline{RS}$, seront

$$(3) \qquad \xi = -\frac{(b^2\mu^2 + \nu^2)a^2\lambda}{(a^2\lambda^2 - b^2\mu^2)\nu}, \qquad \eta = \frac{(a^2\lambda^2 + \nu^2)b^2\mu}{(a^2\lambda^2 - b^2\mu^2)\nu}.$$

Enfin, par des calculs sur lesquels nous n'insisterons pas (*voir* **1901**, 321, notre réponse à **2103**), on parvient à établir entre α, β, ξ et η, les relations

$$(4) \quad \alpha = \frac{c^2\xi}{a^2}\,\frac{b^2\xi^2 - a^2\eta^2 + a^2b^2}{b^2\xi^2 + a^2\eta^2 + a^2b^2}, \qquad \beta = \frac{c^2\eta}{b^2}\,\frac{b^2\xi^2 - a^2\eta^2 - a^2b^2}{b^2\xi^2 + a^2\eta^2 + a^2b^2}.$$

Indépendamment du couple de droites $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, les quatre points P, Q, R, S déterminent deux autres couples $\overline{PR}$, $\overline{QS}$, et $\overline{PS}$, $\overline{QR}$, auxquels une infinité de coniques seront tangentes. Ces coniques, dont les centres sont en ligne droite avec les milieux I, J des cordes $\overline{PQ}$ et $\overline{RS}$, admettront, comme triangle autopolaire commun, celui que forment les droites $\overline{PQ}$ et $\overline{QR}$ jointes à la polaire de leur point d'intersection F, relativement à l'une quelconque des coniques du faisceau ponctuel (P, Q, R, S). Si donc l'une des coniques inscrites dans le quadrilatère PRQSP est un cercle, la droite $\overline{IJ}$ passera par l'orthocentre de ce triangle, d'après un théorème bien connu : cette condition évidemment nécessaire est d'ailleurs suffisante, car une conique dont on donne le centre et qui doit admettre comme autopolaire un triangle donné est entièrement déterminée.

Je cherche d'abord l'équation de la droite $\overline{IJ}$.

Pour cela, je transporterai l'origine en F, sans changer la direc-

tion des axes coordonnés : l'équation (1) devient

$$(1\ bis)\quad b^2x^2+a^2y^2+2b^2\xi x+2a^2\eta y+b^2\xi^2+a^2\eta^2-a^2b^2=0,$$

et il est clair que l'équation

$$(5)\qquad b^2x^2+a^2y^2+b^2\xi x+a^2\eta y=0$$

représente l'ellipse, homothétique à l'ellipse (1), qui est le lieu du milieu des cordes de cette ellipse menées par la nouvelle origine. Si je prends en conséquence

$$lx+my+n=0,$$

pour l'équation de $\overline{\mathrm{IJ}}$, l'équation

$$b^2x^2+a^2y^2+b^2\xi x+a^2\eta y+(lx+my+n)(b^2\xi x+a^2\eta y)=0$$

devra pouvoir être identifiée au produit

$$(\lambda x+\mu y)(\lambda' x+\mu' y)\equiv b^2x^2+a^2y^2+(\lambda\mu'+\lambda'\mu)xy.$$

On peut remplacer $\lambda\mu'+\lambda'\mu$ par $\dfrac{a^2\lambda^2+b^2\mu^2}{\lambda\mu}$, mais il vaut mieux l'exprimer en fonction des coordonnées ξ, η du point F, ce à quoi l'on parvient en faisant le produit membre à membre des deux égalités

$$-\nu=\lambda\xi+\mu\eta,$$
$$-\nu'=\lambda'\xi+\mu'\eta,$$

et en tenant compte des relations $\lambda\lambda'=a^2$, $\mu\mu'=b^2$, $\nu\nu'=-a^2b^2$, on aura

$$\lambda\mu'+\lambda'\mu=-\frac{b^2\xi^2+a^2\eta^2+a^2b^2}{\xi\eta},$$

et conséquemment

$$(\lambda x+\mu y)(\lambda' x+\mu' y)\equiv\frac{(b^2x^2+a^2y^2)\xi\eta-(b^2\xi^2+a^2\eta^2+a^2b^2)xy}{\xi\eta},$$

et par suite encore

$$n=-1,\qquad 1+l\xi=1+m\eta=-\frac{(mb^2\xi+la^2\eta)\xi\eta}{b^2\xi^2+a^2\eta^2+a^2b^2}.$$

Si donc je pose $l=\dfrac{\rho}{\xi}$, $m=\dfrac{\rho}{\eta}$, il me viendra

$$\rho=-\frac{b^2\xi^2+a^2\eta^2+a^2b^2}{2b^2\xi^2+2a^2\eta^2+a^2b^2},$$

et l'équation de $\overline{\mathrm{IJ}}$ sera

$$(b^2\xi^2 + a^2\eta^2 + a^2b^2)\left(\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + 2\right) - a^2b^2 = 0.$$

Toutefois cette équation est rapportée à des axes parallèles à ceux de la conique (1) et passant par le point F; pour revenir aux axes primitifs il suffit de changer, dans l'équation qui vient d'être obtenue, x en $x - \xi$ et y en $y - \eta$, ce qui conduit au résultat cherché :

$$(6) \qquad (b^2\xi^2 + a^2\eta^2 + a^2b^2)\left(\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta}\right) - a^2b^2 = 0.$$

Je calculerai maintenant les coordonnées de l'orthocentre du triangle formé par les droites $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{RS}}$ et par la polaire de F relativement à l'ellipse (1).

L'équation de cette polaire est

$$b^2\xi x + a^2\eta y - a^2b^2 = 0,$$

mais elle deviendra

$$b^2\xi x + a^2\eta y + b^2\xi^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

en transportant l'origine en F; l'équation des droites $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{QR}}$, est dans la même hypothèse, comme on vient de le voir,

$$\xi\eta(b^2x^2 + a^2y^2) - (b^2\xi^2 + a^2\eta^2 + a^2b^2)xy = 0,$$

et de là suit que l'équation

$$\begin{aligned}(b^2\xi x + a^2\eta y + b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2)(\eta x + \xi y)\\ - [\xi\eta(b^2x^2 + a^2y^2) - (b^2\xi^2 + a^2\eta^2 + a^2b^2)xy] = 0\end{aligned}$$

représente une conique circonscrite au triangle considéré : c'est du reste une hyperbole équilatère, puisque les termes du second degré se réduisent à $(2b^2\xi^2 + 2a^2\eta^2 + a^2b^2)xy$, et ainsi elle passera par l'orthocentre cherché, que l'on obtiendra en faisant, dans l'équation qui vient d'être écrite, $x = \sigma b^2\xi$, $y = \sigma a^2\eta$; cette substitution donne, pour σ, la valeur suivante :

$$(7) \qquad \sigma = -\frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}\,\frac{b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2}{2b^2\xi^2 + 2a^2\eta^2 + a^2b^2}.$$

Du reste, relativement aux axes de l'ellipse (1), les coordonnées de

l'orthocentre seront

$$x = (\sigma b^2 + 1)\xi, \qquad y = (\sigma a^2 + 1)\eta,$$

et par suite, en substituant dans l'équation (6), j'aurai la condition cherchée sous la forme

(8) $$(b^2\xi^2 + a^2\eta^2 + a^2b^2)[\sigma(a^2 + b^2) + 2] - a^2b^2 = 0.$$

Or, si je pose

(9) $$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = \theta^2 a^2 b^2,$$

la valeur de σ devient

$$\sigma = -\frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}\,\frac{\theta^2 - 1}{2\theta^2 + 1},$$

et l'équation (8) se réduit en même temps à une équation du deuxième degré en θ^2, savoir

(8 *bis*) $$c^4\theta^4 - 6a^2b^2\theta^2 - (a^4 + 3a^2b^2 + b^4) = 0.$$

Les racines ne sont pas susceptibles d'une expression simple et tout ce qu'il y a lieu de retenir, c'est que l'une d'elles est positive et l'autre négative : on pourra alors énoncer le théorème suivant :

Par un point F, *pris dans le plan d'une ellipse donnée, il est toujours possible de mener deux cordes* $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, *telles que les points* P, Q, R, S *soient les pieds sur l'ellipse des normales abaissées d'un certain point* M : *Si le point* F *est pris sur une certaine ellipse concentrique et homothétique à l'ellipse donnée, les quatre droites de jonction des points* P, Q, R, S, *autres que* $\overline{PQ}$ *et* $\overline{RS}$, *toucheront un même cercle, et le centre de ce cercle décrira lui-même une ellipse concentrique et homothétique à l'ellipse donnée.*

On remarquera que l'hypothèse $\theta^2 = 1$ rendant négatif le premier membre de l'équation (8 *bis*), l'ellipse en question est toujours plus grande que l'ellipse donnée.

La substitution des expressions (3) dans l'équation (9) change celle-ci en une équation homogène en λ, μ, ν du sixième degré : l'enveloppe des droites $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ serait donc une courbe de la sixième classe; mais il se peut que l'équation (9) transformée soit réductible (c'est un point que je n'ai pas élucidé).

Comme enfin les valeurs de ξ et de η peuvent, en vertu de l'équa-

tion (9), être mises sous la forme de fonctions rationnelles du second ordre d'un paramètre auxiliaire t, il est clair que les relations (4) permettent d'exprimer α et β, coordonnées de M, sous forme de fonctions rationnelles du sixième ordre du même paramètre. Le lieu de M serait donc une unicursale du sixième ordre, à moins de réductions dont l'examen reste réservé. On observera que les conditions du problème sont satisfaites par les hypothèses $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, et que ces solutions particulières ne rentrent pas dans la solution générale que l'on vient d'indiquer. E. Malo.

2179. (**1901**, 224) (E.-B. Escott). — *Tables de solutions d'équations cubiques* (**1902**, 51, 164). — Les intéressantes formules de M. Werebrusow ne me paraissent pas, *a priori*, résoudre complètement la question. Il peut donc être utile de faire connaître deux identités [extraites d'une étude (1897) de la question primitive 680 trop longue pour être publiée], identités qui donnent toutes les solutions en nombres entiers de l'équation $A^3 + B^3 = C^3 + D^3$ dans le cas particulier où $\dfrac{A - D}{C - B} = \dfrac{3}{4}$:

1°
$$\left(\frac{21 n_1^2 + n_2^2 + 2 n_1 n_2}{2}\right)^3 + \left(\frac{21 n_1^2 - n_2^2 - 16 n_1 n_2}{4}\right)^3$$
$$= \left(\frac{21 n_1^2 - n_2^2 + 16 n_1 n_2}{4}\right)^3 + \left(\frac{21 n_1^2 + n_2^2 - 2 n_1 n_2}{2}\right)^3;$$

2°
$$\left(\frac{3 n_1^2 + 7 n_2^2 + 2 n_1 n_2}{2}\right)^3 + \left(\frac{3 n_1^2 - 7 n_2^2 - 16 n_1 n_2}{4}\right)^3$$
$$= \left(\frac{3 n_1^2 - 7 n_1^2 + 16 n_1 n_2}{4}\right)^3 + \left(\frac{3 n_1^2 + 7 n_2^2 - 2 n_1 n_2}{2}\right)^3.$$

A, B, C et D sont entiers si n_1 et n_1 sont des entiers de *même parité,* mais d'ailleurs quelconques. P.-F. Teilhet.

2274. (**1902**, 8) (E. Maillet). — *Décomposition d'un nombre entier.* — Énoncés :

Théorème I. — *Tout nombre entier* N, *sauf* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 18, 21, 28, 33 et 36, *est la somme de* 4 *carrés et de* 4 *bicarrés, tous* $\neq 0$:

$$N = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^4 + f^4 + g^4 + h^4$$
$$(a, b, c, d, e, f, g, h \neq 0).$$

Plus généralement, on a

$$N = a^{2\alpha} + b^{2\beta} + c^{2\gamma} + d^{2\delta} + e^2 + f^2 + g^2 + h^2$$
$$(a, b, c, d, e, f, g, h \neq 0),$$

sauf pour certaines valeurs de N, à déterminer, comme je l'ai fait pour le théorème énoncé plus haut.

COROLLAIRE. — *Le produit de deux sommes de cette forme est une somme de la même forme.*

THÉORÈME II. — *On a pareillement*

$$N = a^{2\alpha+1} + b^{2\beta+1} + c^{2\gamma+1} + d^{2\delta+1} + e^2 + f^2 + g^2 + h^2$$
$$(a, b, c, d, e, f, g, h \neq 0).$$

Remarque et corollaire comme ci-dessus.

THÉORÈME III. — *Tout nombre entier* N, *sauf* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 17 et 20, *est la somme de sept carrés* $\neq 0$.

Corollaire comme au théorème I.

Tout nombre entier N, *sauf* 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10 et 17, *est la somme de deux cubes et de trois carrés* $\neq 0$.

Je possède la démonstration des propositions ou théorèmes ci-dessus.

Dans l'*Intermédiaire* (**1902**, 133), M. Brocard dit que

$$N = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \qquad (\text{N entier}),$$

d'après Smith et Minkowski. Je serais curieux de savoir si a, b, c, d, e sont toujours $\neq 0$? G. DE ROCQUIGNY.

2315. (**1902**, 91) (G. ESPANET). — *Enveloppe des côtés d'un triangle* (**1903**, 17). — Une réponse à cette question nous a été adressée par M. E. Malo. Sur notre demande, la Rédaction des *Archiv der Math. und Phys.* a bien voulu la publier (1903, p. 347).

LA RÉDACTION.

2348. (**1902**, 117) (*Artigensis*). — *Hexagramme de Pascal* (**1902**, 312; **1903**, 112, 241). — Nous avons reçu une démonstration de M. Plakhowo, d'après la Géométrie russe de M. Davidow; elle a été communiquée à M. *Artigensis*. LA RÉDACTION.

QUESTIONS.

2724. [**I18c**] A-t-on déjà énoncé le théorème suivant?

Tout nombre entier N *est la somme arithmétique de* p $\left[p = 2^n - 2 + \mathrm{E}\left(\overline{1,5}^n\right)\right]$ *puissances* $n^{\text{ièmes}}$ *positives ou nulles.*

Peut-on en donner une démonstration rigoureuse simple?

Si $n = 2$,

$$p = 4,$$

et l'on a le *théorème de Bachet* démontré par Lagrange en 1770, par Euler en 1777 et élémentairement par A. Matrot (Paris, Nony; 1891).

Si $n = 3$,

$$p = 9.$$

La proposition a été vérifiée jusqu'à 10000 par Édouard Waring (**1895**, 21) et démontrée (*ibid.*) par M. G. Oltramare, dans le cas particulier où N est un cube.

Si $n = 4$,

$$p = 19,$$

etc.

A défaut de la démonstration du théorème précédent, peut-on donner, soit d'une façon générale, soit pour certaines valeurs de n ($n = 3, 4, \ldots$), celle de l'une ou de plusieurs des propositions suivantes déjà démontrées élémentairement pour $n = 2$ (A. Matrot, *Théorème de Bachet*, Paris, Nony; 1891), propositions pour lesquelles p a la valeur indiquée plus haut?

Le produit d'un nombre quelconque de facteurs égaux

chacun à une somme de p $n^{ièmes}$ puissances positives ou nulles est lui-même la somme de p $n^{ièmes}$ puissances positives ou nulles.

Tout nombre premier qui divise une somme de p $n^{ièmes}$ puissances positives ou nulles est lui-même une somme de p $n^{ièmes}$ puissances positives ou nulles.

Tout nombre premier divise une somme de p $n^{ièmes}$ puissances positives ou nulles. P.-F. Teilhet.

2725. **[I18] [Σ] (S)** Notations de la question **2251** (**1902**, 1) :

1° N quelconque > 1, n quelconque > 1, $p = 6$ (2^2, 2^3 et 2^4 exceptés) [*comp.* **2648**, cas 1° (**1903**, 228)];

2° N quelconque > 1, n quelconque > 1, $p = 7$ (2^2, 2^2 et 2^3 exceptés);

3° $N = 2N'$, $N' = (2a+1)^{4\mu-1}$, $p = 4$, les 4 carrés, $\neq 0$, sont distincts, 2 pairs, 2 impairs;

4° $N = 2a$, n quelconque > 2, $p_1 = 4$, $q_1 = 1$, le Π_1 étant 1 dodécagone;

5° $N = (2a+1)^{2m} + (2a+1)$, $p = 5$ $(m > 1)$ [*comp.* **2648**, cas 7° (**1903**, 228)];

6° $N = (2a+1)^{2m+1} - (2a+1)$, $p = 5$ $(m > 0)$;

7° N quelconque > 1, n quelconque > 1, $p_1 = 5$, $q_1 = 5$, les Π_1 étant triangulaires (2^2, 3^2 et 2^3 exceptés);

8° $N = 2a+1$, $n = 4\mu - 1$, $p_1 = 3$, $q_1 = 6$, les Π_1 étant 3 triangles et 3 hexagones;

9° $N = 2a+1$, $n = 4\mu - 1$, $p_1 = 4$, $q_1 = 1$, le Π_1 étant octogone;

10° $N = 2a+1$, $n = 8\mu + 5$, $p_1 = 4$, $q_1 = 1$, le Π_1 étant octogone. G. de Rocquigny.

2726. **[Q1d]** De l'équation d'une pseudo-surface, prise sous la forme

$$dz = \varphi\, dx + \psi\, dy,$$

et entraînant, par suite, l'inégalité

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0,$$

on déduit, pour la différentielle de l'aire,

$$(1) \qquad dA = ds\, ds' \sin \Phi = \sqrt{1 + \varphi^2 + \psi^2}\, dx\, dy$$

[après suppression, haut et bas, du facteur $\sqrt{(1+\varphi^2)(1+\psi^2)}$].

Pour un domaine quelconque D, limité par le contour correspondant C, on a donc

$$A = \int\int_D \sqrt{1 + \varphi^2 + \psi^2}\, dx\, dy.$$

Cela posé, on demande de quelle manière une telle intégrale peut bien être *identifiée* avec la suivante, relative au même contour,

$$A' = \int\int_D \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

ainsi qu'y *conduit*, d'elle-même, la formule de Green?

A titre de complément justificatif, on remarquera que, par rapport à la pseudo-surface générale

$$\begin{cases} dx = P\, du + Q\, du', \\ dy = P'\, du + Q'\, du', \\ dz = P''\, du + Q''\, du', \end{cases}$$

on a

$$(1') \quad dA = \sqrt{(P'Q'' - Q'P'')^2 + (P''Q - Q''P)^2 + (PQ' - QP')^2}\, du\, du';$$

ce qui, en premier lieu, pour

$$P = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad Q = \frac{\partial x}{\partial u'}, \qquad \ldots, \qquad Q'' = \frac{\partial z}{\partial u'},$$

reproduit exactement la différentielle de l'aire d'une *surface* ordinaire et, de plus, fait retomber sur la différentielle (1) lorsque, avec $u = x$, $u' = y$, on pose

$$P = Q' = 1, \qquad Q = P' = 0, \qquad P'' = \varphi, \qquad Q'' = \psi.$$

Issaly.

2727. [**Q1d**] Soit encore la pseudo-surface

$$(1)\qquad \begin{cases} dz = \varphi\, dx + \psi\, dy \\ \text{ou} \\ dz = \mathfrak{p}\, dx + \mathfrak{q}\, dy. \end{cases}$$

On sait que ses lignes asymptotiques ont pour équation

$$(2)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dx\, dy + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy^2 = 0,$$

ou bien

$$(2')\qquad \mathfrak{r}\, dx^2 + (\mathfrak{s} + \mathfrak{s}_1)\, dx\, dy + \mathfrak{t}\, dy^2 = 0.$$

D'autre part, toute fonction dite *analytique* satisfait, par définition, aux conditions suivantes :

$$(3)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

ou bien

$$(3')\qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{t}, \qquad \mathfrak{s} = -\mathfrak{s}_1.$$

Introduites dans les formules (2) ou (2′), celles-ci se réduisent à

$$dx^2 + dy^2 = 0.$$

Nos conditions expriment donc qu'en tout point d'une pseudo-surface qualifiée (par analogie) d'*analytique*, elle aussi, les lignes asymptotiques se projettent horizontalement suivant un cercle de rayon nul.

Ajoutons que, sur la pseudo-surface elle-même, ces lignes ont pour équation

$$\frac{dX^2}{1+\mathfrak{p}^2} + \frac{dZ^2}{1+\mathfrak{q}^2} = 0,$$

et que les rayons principaux de courbure, relatifs à leur point commun, ont pour valeurs

$$(4)\qquad \begin{cases} R = \dfrac{1}{\mathfrak{r}}(1+\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2)^{\frac{1}{2}}, \\ R' = \dfrac{1}{\mathfrak{r}}(1+\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2)^{\frac{3}{2}}, \end{cases}$$

etc.

Cette *interprétation* si naturelle et si *adéquate* des conditions qui nous occupent, jointe aux conséquences rigoureuses qu'on en peut déduire, n'est-elle pas, en vérité, préférable à ces diverses *représentations planes*, réelles ou imaginaires, conformes ou non, mais, dans tous les cas, à nos yeux, irrémédiablement artificielles et approximatives, dont l'Analyse infinitésimale se voit, de nos jours, de plus en plus *encombrée* ? ISSALY.

2728. [H9f] Je désirerais avoir des indications sur le moyen d'intégrer une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, soit du type

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + 2\frac{d^4 z}{dx^2\, dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} = a,$$

soit du type

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + 2\frac{d^2 z}{dx^2}\frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} = a,$$

a désignant une constante. *C. Effe.*

2729. [D2b] Dans un problème d'élasticité, j'arrive à des nombres représentés par la série à double entrée

$$a_0 S_0^n + a_1 S_1^n + a_2 S_2^n + a_3 S_3^n + \ldots,$$

où a_0, a_1, a_2, ... sont des quantités connues et où

$$S_p^n = \frac{1.2\ldots(2p+1)}{(p+1)^{2n+2p+1}} + \frac{2.3\ldots(2p+2)}{(p+2)^{2n+2p+1}} + \frac{3.4\ldots(2p+3)}{(p+3)^{2n+2p+1}} + \ldots.$$

Les quantités S_0^n se calculent facilement par la formule

$$S_0^n = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n} B_n}{(2n)!},$$

dans laquelle B_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli.

On peut en déduire les autres valeurs de S par récurrence au moyen de la formule

$$S_p^n = S_{p-1}^n - p^2 S_{p-1}^{n+1}.$$

Mais ce procédé ne peut être employé que pour les pre-

mières valeurs de S_p^n, lorsque l'indice p reste en dessous d'une certaine limite.

En effet, S_p^n, exprimé en fonction des quantités S_0^m, est donné par la formule symbolique

$$S_p^n = S_0^n(1 - 1^2 S_0)(1 - 2^2 S_0)(1 - 3^2 S_0)\ldots(1 - p^2 S_0),$$

dans laquelle, une fois les opérations effectuées, les exposants de S sont à prendre comme indices. Si donc δ représente l'approximation de S_0^{n+p}, l'erreur qui en résulte est

$$1^2 2^2 3^2 \ldots p^2 \delta$$

et peut facilement devenir supérieure à la valeur S_p^n elle-même.

Le calcul direct des quantités S_p^n est, d'autre part, très long; aussi serais-je reconnaissant à celui des correspondants qui pourrait m'indiquer un moyen simple de déterminer leur valeur avec une approximation suffisante.

Je signalerai encore que, à l'aide du développement connu

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = \frac{S_0^1 x}{\pi^2} + \frac{S_0^2 x^3}{\pi^4} + \frac{S_0^3 x^5}{\pi^6} + \ldots,$$

on trouve la formule

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = \frac{1^2 S_0^1 x}{(1^2\pi^2 - x^2)} - \frac{2^2 S_1^1 x^3}{(1^2\pi^2 - x^2)(2^2\pi^2 - x^2)} + \frac{3^2 S_2^1 x^5}{(1^2\pi^2 - x^2)(2^2\pi^2 - x^2)(3^2\pi^2 - x^2)} - \ldots.$$

Si les coefficients S_p^1 de cette série étaient connus, on en déduirait facilement toutes les quantités S_p^n.

H. Koechlin.

2730. [I25b] *Suite arithmétique.* — D'un nombre N, non carré, on retranche le plus grand carré. Soit r_1 le reste. De Nr_1 on retranche le plus grand carré. Soit r_2 le reste. De Nr_2 on retranche le plus grand carré. Soit r_3 le reste; et ainsi successivement.

On obtient une suite

(1) $$r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_n\, r_{n+1} \ldots .$$

Cela posé, la suite (1) peut se présenter sous l'un des types suivants :

I.	$1\,1\,1\,1 \ldots,$	$N = a^2 + 1,$
II.	$r_1\, r_1\, r_1\, r_1 \ldots,$	$N = 21,\ 55,\ 76,\ 393,\ \ldots,$
III.	$r_1 \ldots r_n\, 1\, r_1\, r_2 \ldots,$	$N = 85,\ 89,\ 157,\ 373,\ \ldots,$
IV.	$r_1 \ldots r_n\, r_n\, r_n\, r_n \ldots,$	$N = 7,\ 19,\ 409,\ 417,\ \ldots,$
V.	$r_1 \ldots r_n\, r_n\, r_n \ldots \quad (r_n = N - 1),$	$N = 42,\ 43,\ 79,\ 80,\ 95,\ \ldots,$
VI.	$r_1 \ldots r_n\, N\, 0,$	$N = 104,\ 178,\ 250,\ \ldots,$
VII.	$r_1 \ldots r_n\, 0,$	$N = 18,\ 72,\ 147,\ 234,\ 396,\ 448,\ \ldots,$
VIII.	$r_1 \ldots r_n\, r_1 \ldots r_n\, r_1 \ldots r_n \ldots,$	$N = 60,\ 69,\ 103,\ 111,\ 458,\ \ldots,$
IX.	$r_1 \ldots r_i\, r_j \ldots r_n\, r_j \ldots r_n\, r_j \ldots r_n \ldots,$	$N = 114,\ 115,\ 116,\ 118,\ 132,\ \ldots;$

r_1 est, par définition, $< N$, mais certains des restes suivants peuvent devenir $> N$, mais demeurent $< 4N$.

On voit qu'elle peut s'arrêter brusquement à zéro (suites VI et VII); mais, en général, elle est périodique, soit périodique simple (type VIII), soit périodique mixte (type IX). Les autres types (I à V) sont des cas particuliers des deux derniers.

La suite (1) a-t-elle été déjà considérée? Quelle est sa signification arithmétique?

Des propriétés tout à fait analogues, en particulier la périodicité des restes, s'observent pour les cubes et pour les autres puissances (les restes sont $< \lambda N$, λ fini); mais les suites ainsi obtenues sont nécessairement plus étendues et plus compliquées.

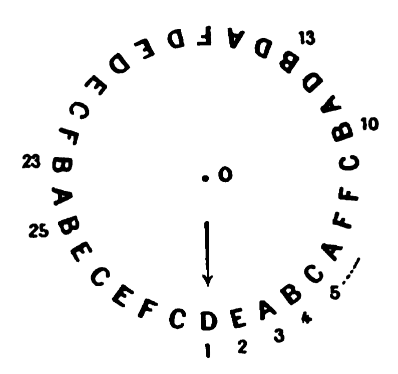
L'intérêt de pareille étude paraît donc limité au cas du carré.

H. Brocard.

2731. [Q4c] Six lettres différentes ABCDEF répétées cinq fois sont disposées circulairement dans 30 cases consécutives (*voir* la figure ci-jointe).

Un disque de papier (*grille*) centré sur O, et percé de

fenêtres correspondant par exemple aux cases 4, 10, 13, 23, 25, laissera voir à la fois les cinq lettres B, à la condition toutefois d'être convenablement *orienté* sur le dessin. Une



seule des trente positions qu'on peut lui donner amènera ce résultat.

Supposons que, au lieu de la position 4-10-13-23-25, on donne à la grille la position voisine 5-11-14-24-26; elle fera apparaître dans ce cas le groupe de lettres CADAE.

Un déplacement de trois cases l'eût amenée en

7-13-16-26-28

et eût fait apparaître le groupe FBFEE. Remarquons que les deux groupes obtenus contiennent des *lettres répétées*.

Cela posé, voici la question dont je demande la solution, solution liée d'ailleurs à un résultat d'ordre pratique :

N'est-il pas possible de disposer circulairement les 6×5 éléments (ou lettres) dans un ordre tel que les six grilles qu'on sera amené à construire jouissent de la double propriété ci-dessous :

1° Pour *une* des trente positions possibles, faire apparaître cinq lettres identiques (la lettre caractéristique de la grille);

2° Pour les *vingt-neuf autres* positions, faire apparaître

des groupes de cinq lettres *toutes différentes entre elles.* (Certains de ces groupes contenant la lettre caractéristique, mais une seule fois, d'autres groupes ne la contenant pas.)

Boris.

2732. **[D2bβ]** Je désirerais savoir si la série suivante :

$$\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) - \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{4}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{8}\right)$$
$$+ \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{4}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{8}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{16}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{32}\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont la somme est $\sin\theta$, a été déjà considérée.

R.-F. Davis (Londres).

2733. **[K20c]** Je demande une bibliographie aussi complète que possible de la trisection de l'angle.

A. Miola (Naples).
[Daprès l'italien. (La Réd.)]

2734. **[O3j]** L'étude des courbes dont la courbure et la torsion satisfont à une équation linéaire a-t-elle été faite? Bibliographie?

V. Aubry.

2735. **[R4a]** Dans des recherches sur ce qu'il y a d'analogue au centre des forces parallèles dans un système de forces non parallèles, Minding a énoncé un théorème et son réciproque sur la propriété de la résultante de forces que l'on fait tourner autour de leur point d'application sans changer leurs inclinaisons mutuelles. Le théorème consiste en ce que cette résultante rencontre toujours une ellipse et une hyperbole focales situées dans deux plans rectangulaires.

Je demande quelle est, dans l'espace, la position de l'axe du couple de valeur minimum supposé donné (axe central des moments) pour chacune des positions du système.

Quelles seront les surfaces décrites par cet axe s'il doit : 1° être parallèle à une droite fixe; 2° être parallèle à un plan; 3° passer par un point; 4° être dans un plan (enveloppe)?

V. Aubry.

2736. [R9bα] Quelle est la liste des Ouvrages mathématiques relatifs au jeu de billard?

J. Gillet (Nivelle, Brabant).

2737. [K1] Un inventaire complet de la géométrie du triangle a-t-il été publié récemment, inventaire indiquant les points, cercles, coniques, etc. remarquables avec les coordonnées des points et les équations des courbes? Un pareil inventaire serait très utile pour fixer rapidement sur le degré de nouveauté de tel ou tel théorème.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2738. [I2] Je voudrais une explication du curieux phénomène suivant de la variation des chiffres (digits) et des nombres dans une Table de cubes. Dans certaines parties de la Table, un chiffre de rang donné dans les cubes des nombres successifs croît ou décroît avec régularité.

Exemple. — Le huitième chiffre (en commençant par la droite) des cubes des nombres 9952 à 9955 est 6; le huitième chiffre des cubes de 9956 à 9959 est 5; pour les nombres 9960 à 9963, c'est 4, etc.

Pour les maxima ou les minima de ces chiffres, il y a une longue succession de nombres possédant le même chiffre de rang donné. De 9982 à 10018 on a trente-sept nombres dont les cubes ont le même huitième chiffre 0 (zéro), les chiffres adjacents étant différents.

Cette propriété semble exacte pour tous les chiffres, sauf les quatre premiers et les trois derniers.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

RÉPONSES.

2222. (**1901**, 276) (A. BOUTIN). — *Intégration de l'équation différentielle*

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2}{x^2+y^2} - 1.$$

— Cette équation se rencontre dans l'étude du problème suivant, auquel on la ramène aisément par une transformation intuitive.

Soient des circonférences ayant pour centre l'origine et pour rayons des longueurs r variant de o à a.

Un mobile partant de l'origine, tangentiellement à OY, traverse successivement les circonférences, de façon que sur chacune de celles-ci la trajectoire soit tangente à une parallèle au rayon du cercle a qui se projette suivant le rayon r de la circonférence considérée.

Soient donc (x, y) les coordonnées d'un point M de la courbe : on aura en ce point

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{y_a}{x_a} = \frac{y_a}{r} \quad \text{ou} \quad p = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}$$

avec

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

C'est donc bien l'équation proposée.

Cette interprétation géométrique fait reconnaître immédiatement que, dans l'angle droit YOX, la courbe intégrale est tangente en O à OY, puis recoupe la circonférence de rayon $\frac{a}{\sqrt{2}}$ sous un angle de 45° avec OX, et la circonférence de rayon a parallèlement à OX.

La courbe complète est formée de quatre arcs identiques, admettant O pour centre et XOX′, YOY′ pour axes de symétrie.

Reprenons l'équation proposée. On en tire

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{1+p^2} - y^2}.$$

Différentiant, puis élevant au carré, on a, en posant $p' = \frac{dp}{dx}$, l'équation différentielle

$$(a^2 - y^2 - p^2 y^2)(1 + p^2)^3 = p^2 [a^2 p' - y(1 + p^2)^2]^2.$$

Cette nouvelle transformée étant manifestement irréductible, il resterait à tenter l'intégration par les séries.

H. Brocard.

2228. (**1901**, 278) (A. Boutin). — *Équation* $x^3 - 7y^2 = 1$ (**1902**, 109, 183). — On peut voir aisément que toute valeur nouvelle de y aurait plus de *quatorze cents chiffres*. En effet, par ma méthode particulière de résolution de l'équation du second degré

$$mx^2 + nx + p = y^2,$$

j'établis les résultats suivants [notations de la solution de M. *E.-A. Majol* (**1903**, 183)].

I. Dans le premier cas où $x - 1 = s^2$, toutes les valeurs de $\overline{x - 1}$ sont données par les deux suites :

$(x-1)'$..............	1	652	165985	...
$(x-1)''$..............	17	4700	1194161	...

au moyen de la formule de récurrence

$$(x-1)_{n+1} = 254(x-1)_n - (x-1)_{n-1} + 378.$$

II. Dans le deuxième cas où $x - 1 = 3s^2$, toutes les valeurs de $u = \frac{x-1}{3}$ sont données par la suite

u..............	1	166	18313	2014318	...

avec

$$u_{n+1} = 110 . u_n - u_{n-1} + 54.$$

III. Dans le troisième cas où $x - 1 = 21s^2$, toutes les valeurs de $U = (7s)^2$ sont données par la suite

U............	0	49	728	10185	141904	...

avec

$$U_{n+1} = 14 . U_n - U_{n-1} + 42.$$

En appliquant à ces trois cas la *méthode d'élimination* déjà

signalée (**1903**, 237) et en faisant intervenir les résidus quadratiques à 1, 2, 3, 5, 7, 11, ..., 47 pour les trois cas, et, pour le premier cas seulement, les résidus à 53, j'ai constaté que :

I. $(x-1)_{391}$ nombre supérieur à 10^{940} est le plus petit terme non éliminé, pour la première suite, la deuxième suite composée de mult. $3+2$ ne comprenant aucun carré.

II. u_{481}, u_{1009}, ... $(x_{481} > 5,7 \cdot 10^{982})$ sont les seuls termes conservés.

III. u_{4411} nombre supérieur à $8 \cdot 10^{5627}$ est le premier terme à examiner.

Il serait intéressant de donner une démonstration rigoureuse, de l'inexistence de toute solution nouvelle, inexistence que ces résultats font prévoir.

P.-F. Teilhet.

2282. (**1902**, 34) (L. Ripert). — *Série $u_n = u_{n-1} + 3^n$ et autres analogues.* — Soit généralement dans le système de base a $(a-1 = b^j)$, la suite

$$u_p = (\lambda . b^j + 1) u_{p-1} + (\mu . b^\nu)^{\rho_p};$$

λ, μ, ν étant des entiers quelconques et ρ_p une fonction entière quelconque de p, mais telle qu'à partir d'un certain terme que nous prendrons comme point de départ, u_1, le produit $\nu . \rho_p$ soit $\geqq i$. Soit encore

$$u_1 = \sigma . b^j + \mathrm{A} = \sigma(a-1) + \mathrm{A};$$

tous les termes de la suite $u_2, \ldots, u_n$ seront d'après la loi de formation de la forme

$$n(a-1) + \mathrm{A}.$$

La moyenne arithmétique de deux termes de même parité consécutifs sera de même forme si μ est pair, ou si (cas du système décimal) b est impair. Or nous savons (**1895**, 215-216) que :

Si l'on considère, dans un système de base a, un nombre

$$\mathrm{S} = (a-1)n + \mathrm{A},$$

A étant positif et inférieur à $\overline{a-1}$, la somme S_1 des chiffres de S est de la forme

$$\overline{a-1} . n_1 + \mathrm{A}.$$

Donc, dans la suite considérée, la somme S_1 des chiffres de chaque terme, ou de la moyenne arithmétique visée plus haut, est de la forme

$$(a-1)n_1 + A$$

et la somme S_2 des chiffres de S_1 appartiendra aux groupes successifs

$$A, \quad A+\overline{a-1}, \quad \ldots, \quad A+n_2(a+1).$$

D'ailleurs pour appartenir au groupe $A+n_2(a-1)$ S_1 devra être au moins égal à

$$A.\overbrace{\overline{a-1}.\overline{a-1}\ldots a-1}^{n_2 \text{ fois juxtaposés}}$$

et S aura au moins

$$A\frac{\overbrace{\overline{a-1}.\overline{a-1}\ldots\overline{a-1}}^{n_2}}{a-1} \text{ chiffres.}$$

Par exemple, dans la série de l'énoncé, si $S_2 = 14$, $S_1 \geqq 59$, S aura au moins $\frac{59}{9}$ soit 7 chiffres et sera au moins le 13e terme; si $S_2 = 23$, $S_1 \geqq 599$, S aura au moins $\frac{599}{9}$ soit 67 chiffres et sera au moins le 139e terme. Pour obtenir la probabilité qu'un terme admette pour S_2 la valeur 14, remarquons que 4,5 est la moyenne arithmétique des chiffres du système, donc S aura environ $\frac{59}{4,5} = 13$ à 14 chiffres; or (simple coïncidence), U_{26} qui a 13 chiffres est le premier terme pour lequel $S_2 = 14$. Si $S_2 = 23$, S aura environ $\frac{599}{4,5}$ ou 133 chiffres; or le 200e terme examiné par M. Ripert n'a que 94 chiffres. Si $S_2 = 41$, S aura environ : $\frac{59999}{4,5}$ ou 13333 chiffres et non 15625, etc....

P.-F. Teilhet.

2301. (**1902**, 67) (V. Aubry). — *Question de Cosmographie.* — A défaut de solution complète, voici quelques idées pour une première étude.

Soient S un point de la sphère céleste ou la situation du Soleil (ou d'un astre) à un moment donné; OMH l'horizon du lieu O, OP l'axe polaire, ODE l'équateur, PSD le cercle de déclinaison,

ZSH le vertical, ZEM le méridien du lieu O, N le nadir; on propose d'étudier la variation de la différence angulaire

$$\widehat{EZS} - \widehat{EPS}.$$

Pour opérer sur des angles tracés dans un même plan, je profiterai de la conservation des angles en projection stéréographique pour remplacer la figure sphérique PSZ par sa projection stéréographique sur le plan OMH de l'horizon, par rapport au nadir N.

A est l'image du pôle P, et I l'image du sommet K du cône de révolution circonscrit au petit cercle FF' de la sphère décrit par le Soleil S (ou l'astre) et déterminé par les angles $\widehat{POZ} = D = 90 - \lambda$ et $\widehat{POF} = \Delta = 90 - \delta$, λ et δ désignant la latitude du lieu O et la déclinaison du Soleil S (ou de l'astre).

Soient les angles auxiliaires $\varphi = \widehat{F'OZ}$, $\psi = \widehat{FOZ}$. Le rayon ON étant pris pour unité, on a

$$OG = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}, \qquad OG' = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{\varphi+\psi}{2} = D, \qquad \frac{\varphi-\psi}{2} = \Delta,$$

$$OI = \frac{OG'+OG}{2} = \alpha, \qquad IG = \frac{OG'-OG}{2} = \rho;$$

donc

$$\frac{\alpha}{\rho} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\sin D}{\sin \Delta},$$

formule connue (*voir* L.-B. Francœur, *Géodésie*, 6[e] édition, 1879, § 314, p. 278-279 et *P. M. S.*, t. II, 1892, p. 182-184).

Avec les données particulières de la question, on a

$$\frac{\alpha}{\rho} = \frac{\cos\lambda}{\cos\delta}.$$

D'autre part, on a aussi

$$\frac{\alpha}{OK\cos\lambda} = \frac{1}{1 + OK\sin\lambda} \qquad \text{et} \qquad OK = \frac{1}{\sin\lambda},$$

donc

$$\alpha = \frac{\cos\lambda}{\sin\delta + \sin\lambda} \qquad \text{et} \qquad \rho = \frac{\cos\delta}{\sin\delta + \sin\lambda}.$$

Il reste à définir la situation du point A, ou la distance OA. Or

on a, par analogie,

$$\frac{OA}{\cos\lambda} = \frac{1}{1+\sin\lambda},$$

donc

$$OA = \frac{\cos\lambda}{1+\sin\lambda} = \tang\frac{D}{2}.$$

Nous venons d'obtenir les images des cercles ZS (rayons du cercle O) et du cercle FF′ parallèle de la sphère (le cercle GIG′).

Les images des cercles PS géodésiques du cercle FF′ sont, comme on le sait, d'autres cercles, passant par le point A image du pôle P et rencontrant à angle droit le cercle GIG′ et les cercles analogues parallèles de la sphère.

On obtiendra ces nouveaux cercles A sans avoir à tracer les images des parallèles. En effet, il suffira que les cercles demandés passent par A et soient tangents au rayon IS au point S du cercle GIG′. L'équation générale de ces cercles est facile à former. Le centre V ayant pour coordonnées p, q, et le rayon pour longueur R, on aura

$$(x-p)^2+(y+q)^2 = R^2$$

avec la condition que le triangle ASV soit rectangle en S :

$$p^2+q^2 = R^2+\rho^2,$$

d'où

$$x^2+y^2-2px-2qy+\rho^2 = 0.$$

Mais ce cercle passe au point $A(x=a, y=0)$; donc

$$a^2-2pa+\rho^2 = 0,$$

d'où

$$p = \frac{a^2+\rho^2}{2a} = \text{const.}$$

Ainsi, le lieu des centres V est une parallèle VV′ à IY.

Dans le plan de l'horizon, les angles sphériques MZS et ZPS sont devenus respectivement l'angle rectiligne MOS et l'angle mixtiligne OAS (droite OA et arc de cercle AS, ou droite OA et tangente AT en A).

Je me bornerai à ces indications, le problème de Trigonométrie plane ainsi posé paraissant plus facile à traiter que le problème primitif de Trigonométrie sphérique dont il est la transformation par projection stéréographique. H. Brocard.

2381. (**1902**, 172) (E. Francken) (**1677**, **1899**, 265). — *Déformation d'une pièce circulaire* (**1903**, 114). — *Voir* la réponse à **1677** (**1904**, 19), par M. Mesnager. La Rédaction.

2391. (**1902**, 176) (E. Lemoine). — *Duplication du cube* (**1903**, 186). — Une Note de M. L. Messent (*J. E. V.*, juin 1894) indique une construction de la racine cubique d'un nombre quelconque.

D'autre part, j'imagine pour le cas plus particulier de la question la construction suivante :

Soit ABC un triangle rectangle en A, de côtés AB = 9 et BC = 12; sur AC je prends un point D tel que AD = 10. Je mène AD' droite quelconque passant par A (par exemple sur le prolongement de BA), et je prends sur cette droite un point C' tel que AC' = 1. Je joins C et C', et je trace DD' parallèle à CC'.

On a ainsi

$$AD' = \frac{10}{3\sqrt{7}} = 1,259881\ldots,$$

or

$$\sqrt[3]{2} = 1,259921\ldots,$$

AD' représente $\sqrt[3]{2}$ avec une erreur absolue inférieure quoique presque égale à $\frac{4}{10^5}$. Cette différence *par défaut* est d'ordre absolument négligeable au point de vue graphique.

P.-F. Teilhet.

La méthode exposée par M. Borel (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXI, 1903, p. 157) conduit à l'expression aisément constructible

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt{5^2 + \frac{24}{9}} - 4 \quad \text{à} \quad \frac{1}{100000} \quad \text{près.}$$

En effet

$$3\sqrt[3]{2} = 3,77976306\ldots,$$

$$\sqrt{249} = 15,7797338\ \ldots.$$

De même :

$$\sqrt[3]{3} = 3\sqrt{7,6} - 18 \quad \text{à} \quad \frac{3}{100000} \quad \text{près,}$$

$$\sqrt[3]{3} = 1,44225\ldots,$$

$$3\sqrt{42} = 19,442222\ldots.$$

A. Pellet.

2427 et **2428**. (**1902**, 258) (Jolivald). — *Sur certains nombres entiers* (**1903**, 88, 136, 186, 315). — *Consulter* l'article « Sui numeri composti p, che verificano la congruenza di Fermat $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ » par M. Michele Cipolla (*A. D. M.*, 1903, p. 139).

La Rédaction.

2454. (**1902**, 266) (G. Espanet). — *Lieu géométrique relatif au point de Lemoine*. — Une réponse à cette question nous a été adressée par M. E. Malo. Sur notre demande, la Rédaction des *Archiv der Math. und Phys.*, a bien voulu la publier (1903, p. 351).

La Rédaction.

2483 et **2485**. (**1902**, 317) (P.-F. Teilhet). — *Décomposition de* x^2+1 *en facteurs* (**1903**, 170, 245). — Tout diviseur de x^2+1 étant de la forme $\widehat{a^2+b^2}$, il s'ensuit que toute décomposition en deux facteurs pourra s'écrire

$$x^2+1=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2;$$

et l'on en conclut

$$x=\left(\frac{bc+1}{d}\right)c+bd,$$

d étant un diviseur de $bc+1$. Cette valeur de x présente l'inconvénient d'être fractionnaire: elle peut néanmoins servir à dresser des Tables.

Si $d=1$, il vient

$$x=bc^2+\widehat{b+c},$$

en supposant $c=1$, $x=2b+1$ et prend toutes les valeurs impaires. Mais la formule est en quelque sorte illusoire, car alors elle ne donne que le diviseur 2 et son complémentaire $(b+1)^2+b^2$.

Je désirerais une formule générale sous forme entière.

P.-F. Teilhet.

2521. (**1903**, 37) (P.-F. Teilhet). — *Équation indéterminée* (**1903**, 245, 285). — Dans l'énoncé (p. 38, 8ᵉ ligne) à partir de *valeurs* il convient de remplacer ce qui suit par : *valeurs de* X, Y, Z *qui satisfont à la relation* $X^2+Y^2=Z^2$ *sont comprises dans la formule*

$$(2KAB)^2+\overline{K(A^2-B^2)}^2=\overline{K(A^2+B^2)}^2$$

(A *et* B *étant premiers entre eux et de parité différente*), *la solution de l'équation*

$$y^2 - 1 = K(A^2 + B^2).$$

Je trouve les résultats particuliers :

$$K = 4K_1[K_1(A^2+B^2) \pm 1], \quad x = 2K_1(A^2+B^2)[K_1(A^2+B^2) \pm 1],$$

$$y = 2K_1(A^2+B^2) \pm 1,$$

$$z = 2K_1(A^2 - B^2)[K_1(A^2+B^2) \pm 1],$$

ou

$$4K_1 A.B.[K_1(A^2+B^2) \pm 1],$$

$$p = 2K_1(A-B)^2[K_1(A^2+B^2) \pm 1] + 1,$$

ou

$$4K_1 B^2[K_1(A^2+B^2) \pm 1] + 1.$$

P.-F. TEILHET.

2542. (**1903**, 68) (E.-N. BARISIEN). — *Intersection de deux coniques.* — Note de M. Brocard communiquée à l'auteur de la question. Six cas y sont indiqués. LA RÉDACTION.

2546. (**1903**, 69) (E.-B. ESCOTT). — *Diviseurs des nombres* $Q_n + R_n$, *lorsque*

$$Q_n R_n = P_n \pm 1 = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad \ldots, \quad n,$$

n étant le $p^{\text{ième}}$ *nombre premier.* — *Comparer* avec la question 334 [**1894**, 186 (A. THORIN)], et *voir* les réponses [**1895**, 123 (E. FAUQUEMBERGUE); 363 (H. TARRY)] et [**1896**, 276 (H. TARRY)].

Il faut d'ailleurs lire (**1896**, 276) :

$$P_{2q} + 1 = 331 \times 571 \times 34231 \quad \text{au lieu de} \quad 34251.$$

Un examen sommaire des résultats publiés semble montrer qu'il n'y a pas de relation simple entre n et les diviseurs de $P_n \pm 1$.

P.-F. TEILHET.

2552. (**1903**, 71) (*Artigensis*). — *Ondes liquides concentriques.* — Les ondes concentriques provoquées par la chute d'une pierre dans une eau tranquille peuvent être assimilées à la surface de révolution engendrée par une sinusoïde

$$z = k \sin x \quad \text{ou} \quad z = k \cos x,$$

tournant autour de l'axe des z.

Il n'est pas nécessaire, pour cela, de supposer la sinusoïde transportée d'une certaine quantité. La surface demeure identiquement la même.

Elle a donc pour équation

$$z = k \sin \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En faisant varier la distance x du plan vertical qui la rencontre, on obtiendra les diverses formes de la courbe d'intersection

$$z = k \sin \sqrt{a^2 + y^2}.$$

H. Brocard.

2555. (**1903**, 72) (V. Aubry). — *Vibrations et lignes nodales d'un anneau.* — La vibration des anneaux a été mentionnée par E.-F.-F. Chladni, comme on peut le voir dans son Ouvrage classique *Traité d'Acoustique,* § 89, p. 116-119 et § 173, p. 248. Paris, Courcier; 1809.

Il semble que l'expérience conduira aisément à la connaissance des résultats désirés.

On mettra l'anneau en vibration en le disposant en saillie près du bord d'une table, sur trois ou quatre petits chevalets de liège, de carton ou de matière un peu molle; on le pressera avec les doigts pour le maintenir et on le frottera avec un archet.

Un anneau se partage dans ses vibrations en 4, 6, 8, 10, ..., ou $2n$ parties égales, et les rapports des sons correspondants sont comme les carrés de 3, 5, 7, 9, ..., $2n - 1$.

Si le son le plus grave d'un anneau est ut_2, il pourra faire entendre les sons suivants :

Nombre de lignes nodales	4	6	8	10	12	14
Sons	ut_2	$fa^\sharp_3$	$fa^\sharp_4$	$ré^\sharp_5$	la_5	$ré_6$
Nombres proportionnels de vibrations	3^2	5^2	7^2	9^2	11^2	13^2

Chladni rappelle qu'il a publié les premières recherches sur les vibrations d'un anneau, dans son premier Mémoire acoustique : *Entdeckungen über die Theorie des Klanges* (Découvertes sur la théorie du son). Leipzig, 1787. Les assertions d'Euler (*De sono campanarum,* in *Nov. comment. Acad. Petrop.,* t. X, et *Investigatio motuum,* etc. in *Act. Acad. Petrop.,* 1779) et celles de

Golovin (in *Act. Acad. Petrop.*, 1781, p. 2) ne se constatent pas par les expériences, et l'application des vibrations d'un anneau à celles d'une cloche n'est pas conforme à la nature.

Chladni termine par cette remarque importante :

« Un anneau plus étendu dans la dimension diamétrale devrait être regardé comme plaque, et, s'il était plus étendu dans l'autre dimension, il faudrait le regarder comme tuyau ou surface cylindrique, et la théorie de ses vibrations ne conviendrait pas ici, etc. »

H. Brocard.

2558. (**1903**, 97) (*Artigensis*). — (**1903**, 198, 222, 287.) — M. Picquet a montré que l'étude des cubiques planes passant par deux points fixes peut se ramener à celle des biquadratiques situées sur une quadrique. (*Voir* Duporcq, *Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 121.)

Applications :

1° De ce que les quadriques qui passent par 7 points passent aussi par un 8e, on déduit que les cubiques qui passent par 8 points en ont un 9e commun.

2° Étant donnés une cubique et le faisceau des coniques qui passent par 4 points fixes de cette courbe, chacune de ces coniques coupe à nouveau la cubique sur une corde qui passe par un point fixe de la courbe.

A la page 382 de la sixième des éditions anglaises de son *Traité des coniques*, Salmon indique que Cremona a obtenu la théorie complète de l'hexagone de Pascal et des théorèmes de Veronese qui s'y rattachent par des considérations de géométrie de l'espace : « D'après la Théorie des surfaces cubiques, nous savons que ces surfaces ont un point nodal; il y a sur elles 6 droites passant par le nœud et qui sont sur un cône du deuxième degré, et 15 autres, dont chacune rencontre 2 des 6 premières. En projetant cette figure, Cremona obtient la théorie complète de l'hexagone. »

T. Lemoyne.

Une question semblable a déjà été posée sous le n° **1775** (**1900**, 81) : il y a été répondu (**1901**, 173).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[(Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2570. (**1903**, 102) (E. MALO). — *Nombres premiers.* — Note de M. BROCARD communiquée à l'auteur de la question.

LA RÉDACTION.

2582. (**1903**, 128) (M. CLAVERO). — *Équation* $x^2 + y^2 = z^2$ (**1903**, 267). — Réponse de M. A. TAFELMACHER (Santiago, Chili) analogue à celle de M. *E.-A. Majol.*

LA RÉDACTION.

2644. (**1903**, 227) (*Hans Rifoctitlee*). — *L'équation*

$$7d^9 - d^3\left[27e^3 - 2\left(\overline{\alpha+\beta}^2 - \alpha\beta\right)\right] + 18f^2 + 2\alpha\beta(\alpha+\beta) = 0$$

peut-elle être satisfaite par des valeurs entières de d, e, f, α et β?
— De l'équation donnée on tire

$$\alpha\beta = \frac{7d^9 - 27d^3e^3 + 18f^2 + 2d^3(\alpha+\beta)^2}{2[d^3 - (\alpha+\beta)]}.$$

Si l'on prend $\alpha + \beta = d^3$, on devra avoir

$$(\alpha+\beta)^2 = \frac{27d^3e^3 - 7d^9 - 18f^2}{2d^3}$$

ou

$$3d^3e^3 - 2f^2 = d^9,$$

équation qui admet pour solution immédiate

$$d = 2, \qquad e = 4, \qquad f = 8.$$

On a alors

$$\alpha + \beta = 8,$$

et il suffit de prendre

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 7.$$

H. BROCARD.

2647. (**1903**, 228) (E.-B. ESCOTT). — En prenant pour axe des z l'axe du cône, les coordonnées d'un point quelconque du cône peuvent être représentées par

$$x = \theta z \cos\psi, \qquad y = \theta z \sin\psi, \qquad z = z.$$

On a la relation

$$\frac{z}{dz} = \frac{\delta}{ds},$$

δ étant la longueur du fil à un moment quelconque de l'enroulement et ds la longueur élémentaire de la courbe suivant laquelle on en-

roule le fil. ds étant égal à $d\delta$, la relation précédente équivaut à la suivante :

$$k\,dz = ds \quad \text{et aussi} \quad \delta = kz$$

$\left(k = \frac{l}{h}, \ l\right.$ étant la longueur initiale du fil et h la valeur initiale de $\left.z\right)$, mais

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\theta^2 z^2 d\psi^2 + \theta^2 dz^2 + dz^2};$$

on a donc

$$\frac{l^2}{h^2} dz^2 = \theta^2 z^2 d\psi^2 + (\theta^2 + 1)\, dz^2$$

ou

$$\frac{dz}{z} = d\psi \frac{\theta}{\sqrt{\frac{l^2}{h^2} - \theta^2 - 1}}.$$

En intégrant

$$z = e^{\frac{\theta\psi}{\sqrt{\frac{l^2}{h^2} - \theta^2 - 1}} + c}.$$

En supposant ψ nul à l'origine,

$$z = he^{\frac{\theta\psi}{\sqrt{\frac{l^2}{h^2} - \theta^2 - 1}}}.$$

L'extrémité du fil située dans le plan horizontal du sommet du cône est aussi dans le plan tangent au cône suivant la génératrice passant par le point de contact du fil. La trace de ce plan sur le plan horizontal est perpendiculaire à la droite qui joint la projection du point de contact à l'origine. De plus, le triangle formé par la génératrice du cône, le fil et la trace du plan tangent sur le plan horizontal est rectangle, l'angle droit étant au sommet du cône. Si donc ω et ρ sont les coordonnées de l'extrémité du fil, on a

$$\omega = \psi + \frac{\pi}{2}, \qquad \rho^2 = \delta^2 - z^2(1 + \theta^2).$$

Remplaçant δ^2 par sa valeur $k^2 z^2$,

$$\rho^2 = z^2(k^2 - 1 - \theta^2),$$

ou enfin

$$\rho = h\sqrt{\frac{l^2}{h^2} - 1 - \theta^2}\, e^{\frac{\theta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{l^2}{h^2} - \theta^2 - 1}}},$$

équation d'une spirale logarithmique. MATHIEU (Toulon).

2632. (**1903**, 251) (P.-F. Teilhet). — Au sujet de l'énoncé de M. P.-F. Teilhet (**1903**, 251), énoncé qui commence ainsi :

Tout bicarré est la somme de 1 cube et de 4 carrés différents de zéro...,

je puis formuler la proposition suivante, qui est générale :

I. *Tout nombre entier* N, *sauf* 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10 *et* 25, *est la somme de* 1 *cube et de* 4 *carrés, tous différents de zéro.*

J'en déduis comme conséquence :

II. *Tout nombre entier* N, *sauf* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 18 *et* 21, *est la somme de* 8 *carrés différents de zéro.*

Et je puis énoncer encore d'autres propositions analogues, celle-ci, par exemple :

III. *Tout nombre entier* N, *sauf* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12 *et* 13, *est la somme de* 4 *cubes et de* 4 *carrés, les* 8 *composants étant* $\neq 0$.

Corollaire. — *Le produit d'une somme de 4 cubes et de 4 carrés par une somme de 4 cubes et de 4 carrés est lui-même une somme de 4 cubes et de 4 carrés.*

IV. *Tout nombre entier* N *est, si* $N > 18$, *la somme de* 3 *cubes et de* 3 *carrés tous* $\neq 0$, *et, sauf pour un nombre limité de valeurs de* N, *la somme de* 3 *puissances impaires et de* 3 *carrés tous* $\neq 0$.

Corollaire. — *Le produit de 2 sommes composées, chacune, de 3 cubes et de 3 carrés, est aussi la somme de 3 cubes et de 3 carrés tous* $\neq 0$.

9 novembre 1903. G. de Rocquigny.

2654. (**1903**, 251) (Avdis). — *Étude d'une courbe.* — La courbe

$$x = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}, \qquad y = a\frac{1-\cos\varphi}{\varphi}$$

a été déjà étudiée. En effet, par élimination de φ, on trouve l'équation polaire

$$r = a\frac{\sin\theta}{\theta},$$

qui représente une cochléoïde, suivant la dénomination proposée par Falkenberg et Benthem (*Niew Archiv voor Wiskunde*, t. X, 1884, p. 76-80).

Pour l'histoire et les propriétés de cette courbe, voir *Atti della R. Acad. dei Lincei*, t. VII (3), 1882-1883 (Jung.); *N. C.*, 1878, p. 283-284 (E. Cesàro); *A. F.*, Nancy, 1886, p. 84 (Arnaudeau); *Mathesis*, 1885, p. 89-92 : *La Cochléoïde*, par J. Neuberg.

L'équation de la cochléoïde se trouve dans le Tome III des *Annales de Mathématiques* de Gergonne.

Bossut [*Calcul intégral*, an IX (1801)] avait déjà proposé la recherche de la courbe lieu des extrémités des arcs circulaires égaux et tangents à l'origine commune.

Le lieu ainsi défini a été discuté et représenté dans l'Ouvrage de Cournot : *Correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie*, p. 310 (1847).

Cette courbe se présente aussi dans d'autres applications. *Voir* le Tome II de la *Mécanique* de Collignon.

La cochléoïde est la perspective de l'hélice vue d'un de ses points.

Sa forme lui a fait donner ce nom : κοχλιον, limaçon, objet en spirale; εἶδος, aspect, forme, perspective.

Note. — On remarquera, entre les angles φ et θ de l'énoncé, la relation très simple $\varphi = 2\theta$. H. Brocard.

2655. (**1903**, 251) (E. Maillet). — Je crois que la statistique citée dans l'énoncé pour les résultats de l'investigation des planètes télescopiques s'étend également à d'autres directions de recherches scientifiques, soit en Mathématiques, soit en Physique.

Pour ne parler que des Mathématiques, il est certain que l'organisme traverse au printemps une période de transformation qui réagit singulièrement sur les facultés de l'intelligence.

Beaucoup de personnes, interrogées à ce sujet, constatent que l'expérience confirme cette observation.

Il se fait chaque année comme une renaissance de l'activité cérébrale. Je crois que sur ce point mes confrères mathématiciens ne me démentiront pas.

Il paraît donc naturel que le surcroît d'activité de l'homme de science se manifeste au printemps par une plus grande abondance de résultats de son travail et de ses investigations de toute sorte. Durant cette crise de l'intelligence, l'attention est mieux soutenue,

la pensée plus en éveil, la puissance de comparaison plus immédiate. La recherche devient simple, claire, aisée.

Dans sa *Notice* biographique d'Ampère (*Œuvres*, t. II, p. 44) F. Arago déclare avoir constaté que les Communications adressées à l'Académie des Sciences au sujet de la quadrature du cercle et autres problèmes de la même catégorie deviennent plus nombreuses au printemps que le reste de l'année. Il ajoute : « Si une manie, j'ai presque dit une fureur, qui se manifeste surtout au printemps, comme l'expérience l'a prouvé, pouvait jamais être justiciable de la logique, il faudrait, pour la combattre avec succès, distinguer plus sérieusement qu'on ne l'a fait jusqu'ici, les aspects divers sous lesquels le problème de la quadrature du cercle doit être envisagé. Un exemple de guérison, dont j'ai été moi-même témoin, me donnerait quelque confiance dans ce mode de traitement. »

Bien que cet extrait ne se rapporte pas entièrement à l'objet de la question, il était utile à retenir, car il émane d'un astronome justement réputé.

Il resterait à recueillir le témoignage d'astronomes contemporains, mais je ne doute pas qu'il ne confirme celui qu'a donné Arago dans un canton des Mathématiques. H. Brocard.

2659. (**1903**, 254) (Paulmier). — *Équation indéterminée.* — On a

$$y^2 = x^3 + 16x^2 + 87x + 161,$$
$$= (x+5)^3 + (x+6)^2.$$

Posant

$$x + 5 = c, \qquad y^2 = c^3 + (c+1)^2.$$

Le second membre représente le nombre 1121 dans le système de numération de base c, et ce nombre ne peut être carré parfait [question **2415** (**1903**, 63, 168)]. Mathieu, P.-F. Teilhet.

Autres réponses de MM. H. Brocard et E.-B. Escott.

2660. (**1903**, 254) (Paulmier). — *Réduction de l'équation*

$$4x^2y^2(1+xy) + 4x(y-x^5)$$
$$+ (1-y)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5) = 0$$

en nombres entiers positifs. — On peut, par une transformation simple, écrire

$$(2x^3-y^3)^2 - (2xy+1)^2 = 0,$$

d'où

$$2x^3 - y^3 + 2xy + 1 = 0,$$
$$2x^3 - y^3 - 2xy - 1 = 0.$$

Mais il est facile de voir que ces deux dernières égalités sont les seules qui ne soient pas évidemment impossibles des quatre combinaisons de l'équation

$$2x^3 - y^3 + 2xy + 1 = 0,$$

dans laquelle on supposerait x et y positifs ou *négatifs*.

On est ainsi ramené à la question 2158 (**1901**, 218) de M. Goulard.

P.-F. TEILHET.

Au sujet de la question 2158, *voir* (**1903**, 282) une Note de M. H. Brocard.

LA REDACTION.

On peut écrire cette équation

$$4x^2y^2(1+xy) + 4x(y - x^5) + 1 - y^6 = 0,$$

ou encore

$$(1+2xy)^2 - (y^3 - 2x^3)^2 = 0.$$

Elle se décompose en deux autres

$$1 + 2xy + y^3 - 2x^3 = 0,$$
$$1 + 2xy - y^3 + 2x^3 = 0.$$

Ces équations résolues en y donnent :

$$(1)\quad \begin{cases} y = \sqrt[3]{-\dfrac{1-2x^3}{2} + \sqrt{\dfrac{(1-2x^3)^2}{4} + \dfrac{(2x)^3}{27}}} \\ \qquad + \sqrt[3]{-\dfrac{1-2x^3}{2} - \sqrt{\dfrac{(1-2x^3)^2}{4} + \dfrac{(2x)^3}{27}}}, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} y = \sqrt[3]{\dfrac{2x^3+1}{2} + \sqrt{\dfrac{(1+2x^3)^2}{4} - \dfrac{(2x)^3}{27}}} \\ \qquad + \sqrt[3]{\dfrac{2x^3+1}{2} + \sqrt{\dfrac{(1+2x^3)^2}{4} - \dfrac{(2x)^3}{27}}}. \end{cases}$$

Considérons la racine carrée contenue dans (1). Si l'on met $\frac{1}{4}$ en facteur, elle devient

$$\frac{1}{2}\sqrt{(1-2x^3)^2 + 4\,\frac{(2x)^3}{27}}.$$

Pour que la partie sous le radical soit entière, il faut que x soit multiple de 3. Posons $x = 3z$, il vient

$$\frac{1}{2}\sqrt{(1-2\times 27z^4)^2+32z^3}.$$

La partie sous le radical ne peut être le carré d'un nombre entier, car ce nombre serait au moins $2\times 27\times z^4$, et l'expression sous le radical est plus petite que le carré de cette quantité.

L'équation (2) peut être traitée d'une façon identique et conduit à un résultat analogue. MATHIEU.

Autre réponse de M. E.-B. ESCOTT.

2662. (**1903**, 255) (P. JOLIVALD). — *Réciproque du théorème de Fermat. — La congruence*

(1) $$x^m - x \equiv 0 \pmod{m}$$

peut-elle être identique lorsque m est composé?

PREMIER CAS : *m renferme un facteur premier p à un degré* > 1. — On aura

$$m = p^2 q,$$

q entier quelconque.

Soit a une des racines primitives de p^2. On devrait avoir, si la congruence (1) est identique,

$$a^{m-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2},$$

d'où $m-1$ multiple de $p(p-1)$.

Par suite

$$m - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui est impossible puisque $m \equiv 0 \pmod{p}$.

Dans ce premier cas (1) ne peut être identique.

DEUXIÈME CAS : *m est un produit de facteurs premiers distincts et renferme le facteur* 2 :

$$m = 2pqr\ldots.$$

— Soit a une racine primitive de p. On devrait avoir

$$a^{m-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

$m - 1$ multiple de $p - 1$, ce qui est impossible ; $m - 1$ impair, $p - 1$ est pair.

Troisième cas : *$m = pq$ produit de 2 facteurs premiers impairs* ($p > q$). — Soit a une racine primitive de p. On devrait avoir

$$a^{m-1} - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod}\, p),$$

$m - 1$ multiple de $p - 1$, $q - 1$ multiple de $p - 1$, ce qui est impossible : $q - 1$ étant > 1 et $< p - 1$.

Donc la réciproque du théorème de Fermat, au sens de l'auteur de la question, est vraie dans ces trois cas.

Quatrième cas : *m est un produit de facteurs premiers impairs en nombre > 2* :

$$m = pqr\ldots.$$

— Soit

$$m = \text{P}p = \text{Q}q = \text{R}r = \ldots.$$

Pour que la congruence (1) soit identique il faut et il suffit qu'elle le soit séparément pour les modules p, q, r, ... Soit le mod p :

1° Elle doit être vérifiée par les racines primitives de p ; soit a l'une d'elles. On doit avoir

$$a^{m-1} - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod}\, p),$$

$$m - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod}\, p - 1)$$

ou

$$\text{P} - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod}\, p - 1).$$

2° Si cette condition est remplie, (1) sera vérifiée, *a fortiori*, pour les autres nombres premiers avec p.

3° Elle le sera pour les multiples de p à cause du premier facteur dans

$$x(a^{m-1} - 1) \equiv 0.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que (1) soit identique (mod p) est

$$\text{P} - 1 = \text{mult. de}\ p - 1.$$

En considérant les autres facteurs primaires de m, on trouve de même les conditions

$$\text{P} - 1, \quad \text{Q} - 1, \quad \text{R} - 1, \quad \ldots,$$

multiples respectivement de

$$p-1, \quad q-1, \quad r-1, \quad \ldots,$$

qui sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que (1) soit identique.

Conclusion. — La réciproque du théorème de Fermat, au sens de l'auteur de la question, ne peut être admise.

Remarque. — On peut trouver des exemples de congruences identiques pour m composé.

Exemple :

$$m = 5.13.17 = 1105.$$

En s'aidant du théorème de Fermat on peut facilement montrer qu'elle est identique suivant les modules 5, 13 et 17.

L'exception indiquée par E. Lucas n'est donc pas un fait isolé.

J. Sadier.

Autres réponses de MM. Malo et P.-F. Teilhet.

Pour

$$c = 5.13,17 = 1105,$$

$a^c - a$ est un multiple de c pour n'importe quelle valeur de a, entier.

En général, pour que $a^c - a$ soit un multiple de c pour n'importe quelle valeur de l'entier a, il faut que c soit un produit de nombres premiers,

$$c = p_1 p_2 \ldots p_i \ldots p_n,$$

satisfaisant aux n relations :

$$p_1 p_2 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_n - 1 = \text{mult. de } (p_i - 1).$$

A. Pellet.

2663. (**1903**, 255) (G. de Longchamps). — *Nombre* π (**1903**, 325). — Voici une solution encore plus approchée et dont l'auteur m'est inconnu.

La longueur de la demi-circonférence est représentée très approximativement par l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés est le diamètre et l'autre le triple du rayon, diminué de la moitié du côté de l'hexagone régulier circonscrit au cercle.

Avec ces données on a, en effet, approximativement :

$$\pi = \sqrt{2^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 3,14154 \text{ environ} \quad \text{au lieu de} \quad 3,14159.$$

L'erreur sur la surface d'un cercle de 1^{m} de rayon n'est que d'environ $0^{cm^2},5$ et non de 2^{cm^2} comme dans la formule signalée par M. de Longchamps, remarquable toutefois par sa simplicité :

$$\pi = 3 + \frac{\sqrt{2}}{10} = 3,14142.$$

V. Williot.

La formule ci-dessus de M. Williot est indiquée dans les *Annales du Génie civil*, 1864, p. 32. H. Brocard.

La construction en question est indiquée par l'astronome anglais Richard-A. Proctor dans le *Periodical Chamber's Journal*, janvier 1869 (article intitulé : « Squaring the circle »). Cet article est reproduit dans l'Ouvrage intitulé : *Light Science for leisure hours*, 1re série, du même auteur, publié en 1871.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

La relation approchée $\pi = \sqrt{51} - 4$ donnée par M. Teilhet (**1903**, 327) a été trouvée par M. Pleskot, professeur à l'École royale tchèque à Prague, et communiquée par lui dans le *Journal de Mathém. élém.* de Longchamps, 1895. N. Quint.

A propos de la question **2663** et des réponses très intéressantes qu'elle a soulevées, je signalerai un Livre (ou une brochure) de M. C.-J. Recordon, intitulé : *Solutions approchées de la trisection de l'angle et de la* QUADRATURE DU CERCLE. L'opuscule est cité dans le numéro de décembre 1903 de la *Revista trimestral de Matematicas* publiée par M. Rius y Casas, à Saragosse. Il est singulier que l'auteur parle de la *quadrature*, sans faire allusion à la *rectification;* les deux problèmes étant intimement liés.

Pour revenir à la question **2663**, puisque la remarque faite par moi, incidemment, est depuis longtemps connue, ne peut-on émettre l'espoir qu'une chose si simple et d'une si incontestable instruction pénètre dans les Livres classiques de Géométrie et, surtout, dans l'Enseignement? G. de Longchamps.

2664. (**1903**, 256) (*Tellaw*). — *Carrés magiques.* — J'ai transcrit, il y a longtemps, mais je ne sais plus d'après quel Ouvrage, un

carré magique de 16 éléments, carrés des nombres 8, 11, 17, 23, 28, 29, 31, 32, 37, 41, 49, 59, 61, 68, 77, 79 et disposés comme il suit :

4624	841	1681	1369
289	961	6241	1024
3481	784	529	3721
121	5929	64	2401

La somme constante 8515 s'obtient dix fois. H. Brocard.

Voir W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, p. 218 (Leipzig, 1901). Cette méthode s'applique évidemment au cas où l'on prend une progression arithmétique au lieu de la série des nombres naturels.

On peut ajouter terme à terme deux carrés magiques de même ordre, et de cette manière on obtient une grande variété de carrés magiques formés avec n^2 nombres non tous consécutifs.

Cette méthode est aussi donnée dans les *Mathematical Recreations* de W.-W.-R. Ball. *Balbus.*

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2671. (**1903**, 273) (T. Lemoyne). — Démontrer géométriquement que :

1° *Lorsqu'une cubique est inscrite et circonscrite à un triangle, le produit des rayons de courbure aux trois sommets est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle.*

2° *Lorsqu'une courbe de troisième classe est soumise aux mêmes conditions, le produit des trois rayons de courbure est égal à* 64 *fois le cube du rayon du cercle circonscrit.*

J'ai fait connaître la première de ces propriétés en 1863 dans le Tome II des *Applications d'Analyse et de Géométrie* du général Poncelet (p. 165). J'y suis arrivé en appliquant le théorème de Carnot.

J'ai fait connaître la deuxième propriété dans un travail *sur la transformation par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure,* paru en 1866 dans le Tome XI de la 2e série du *Journal de Liouville*. Je suis arrivé à cette deuxième propriété en transformant la première par polaires réciproques.

Mannheim.

QUESTIONS.

2739. [**D2bα**] Dans le calcul des logarithmes à l'aide de la série

$$\log\left(\frac{x+a}{x}\right) = 2m\left[\frac{a}{2x+a} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2x+a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{2x+a}\right)^5 + \ldots\right],$$

il est avantageux d'avoir la fraction $\frac{a}{2x+a}$ aussi petite que possible, afin que la série converge aussi rapidement que possible [*voir* Gauss, *Werke*, Band II, p. 501, et Huygens, *Opera varia* (1724), p. 457].

Je voudrais des exemples de nombres x et $x+a$ dont tous les facteurs premiers fussent < 200 et pour lesquels

$$\frac{a}{2x+a} < 10^{-17}.$$

Je ne possède que ces exemples :

$$x = 940\,737\,006^2 - 1$$
$$= 5.7.13.17.23.31.41.47.59.71.103.193 \quad \text{et} \quad x+1;$$
$$x = 832\,530\,093\,941\,385\,216$$
$$= 2^{11}.3^7.13^2.19.37.97.127^2 \quad \text{et} \quad x+85;$$
$$x+1 = 17\,766^4 = 2^4.3^{12}.7^4.47^4 \quad \text{et} \quad x;$$
$$x+1 = 306\,331\,585^2 = 5^2.7^8.17^2.19^2.79^2 \quad \text{et} \quad x.$$

Je voudrais aussi des exemples pour le cas où

$$\frac{a}{2x+a} < 10^{-14},$$

les facteurs de x et $x+a$ étant < 100.

Exemple :

$$x + 1 = 15\,473\,809^2 \quad = 13^4.19^2.61^2.79^2,$$
$$x = 15\,473\,809^2 - 1 = 2^5.3^3.5.7^2.11.17.41.43.47.73.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2740. [A3e] Connaît-on le théorème suivant :

Dans l'équation

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + k = 0$$

si $b^2 - \frac{2n}{n-1}ac < 0$, *il y a au moins deux racines imaginaires.*

Je ne demande pas une démonstration qui résulte de suite de la loi des signes de Descartes.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2741. [I19a] Kronecker a donné une solution de l'équation de Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

au moyen des fonctions elliptiques (*M. A. B.*, 1863, p. 44). *Voir* encore H.-J.-S. Smith, *Report on the theory of numbers* (*R. B. A.*, 1865, p. 372, § 138). Cette méthode de solution convient-elle pour le calcul numérique de x et y?

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Quest. 2737 à 2741, trad. de l'anglais. (La Réd.)]

2742. [K] I. On sait que de toutes les droites qui sont à une même distance du sommet d'un angle et limitées par les côtés, la plus petite est celle qui a son milieu sur la bissectrice. De tous les triangles dont les plans touchent à une sphère qui a son centre au sommet d'un angle trièdre et qui sont limités par cet angle, lequel a un périmètre, ou une aire minimum? On préférerait une solution élémentaire.

II. Construire, dans un cercle donné, un quadrilatère harmonique, dont les angles sont donnés. J'en sais une solution

qui s'appuie sur le cercle de Brocard à l'aide du calcul trigonométrique. Je préférerais une solution graphique.

III. Les centres de gravité d'un polygone à la fois inscrit et circonscrit (périmètre et aire) ont-ils une position remarquable? C.-A. Cikot (Bois-le-Duc, Hollande).

2743. **[V1a]** Longtemps avant d'avoir lu : Laisant, *La Mathématique,* j'étais d'avis que l'enseignement de la Mécanique, donné à des élèves n'ayant aucune notion de Calcul infinitésimal, a peu de valeur. Je désirerais apprendre l'avis des lecteurs là-dessus, de préférence par des réponses à moi adressées.

C.-A. Cikot (Bois-le-Duc, Hollande).

2744. **[I4b]** Lorsque l'on sait qu'un nombre N est résidu quadratique d'un nombre p, peut-on trouver la valeur x qui satisfait à la congruence

$$N \equiv x^2 \pmod{p},$$

autrement que par la recherche d'une racine primitive et le calcul des indices? Accessoirement, existe-t-il des Tables d'indices plus étendues que celles de Jacobi?

G. Picou.

2745. **[I4b]** J'ai trouvé une solution du problème suivant :

Trouver $N \equiv x^2 \pmod{p_1 p_2}$ *connaissant* $N \equiv a^2 \pmod{p_1}$ *et* $N \equiv b^2 \pmod{p_2}$, p_1 *et* p_2 *étant des nombres premiers ou des puissances de nombres premiers.*

Je voudrais la comparer avec d'autres solutions, s'il en existe; je demanderais donc, soit des renseignements bibliographiques, soit la communication des solutions non imprimées. G. Picou.

2746. **[I18c]** (S) I. Tout nombre entier N (sauf 1, 2, 3, 5, 8 et 11) est la somme de 1 triangle et de 3 carrés, $\neq 0$.

II. Tout nombre entier N (sauf 1, 2, 3, 5, 6 et 9) est la somme de 1 pentagone et de 3 carrés, $\neq 0$.

III. Plus généralement, tout nombre entier N est la somme d'un nombre $(2m+1)$ gonal et de 3 carrés, $\neq 0$, sauf pour certaines valeurs initiales de N, à déterminer, comme je l'ai fait ci-dessus (I et II).

IV. Tout nombre entier N (sauf 1, 2, 3, 5, 6, 8, 11, 14 et 38) est la somme de 1 hexagone et de 3 carrés, $\neq 0$.

V. Tout nombre entier N (sauf 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 17 et 26) est la somme de 1 décagone et de 3 carrés, $\neq 0$.

VI. Plus généralement, tout nombre entier N est la somme d'un nombre $(4m+2)$ gonal et de 3 carrés, $\neq 0$, sauf pour certaines valeurs initiales de N, à déterminer, comme je l'ai fait ci-dessus (IV et V).

VII. Le produit

$$1.2.3.5.7\ldots p$$

des n premiers nombres premiers $(n > 2)$ est la somme de 1 pentagone et de 5 carrés, $\neq 0$.

G. de Rocquigny.

2747. [**I19c**] La somme des n premiers nombres, augmentée de la somme de leurs carrés, n'est jamais un carré. En d'autres termes l'équation

$$n(n+1)(n+2) = 3A^2$$

ne saurait être satisfaite en nombres entiers.

Une discussion simple ramène ce problème à la résolution du système :

$$\alpha^2 = 6\beta^2 + 1 \qquad (n \text{ étant égal à } 6\beta^2),$$
$$\gamma^2 = 3\beta^2 + 1 \qquad (\beta_{n+1} = 4\beta_n - \beta_{n-1}).$$

Si l'on pose d'autre part, $\zeta = 6\beta^2 + 1$, on a la relation de récurrence (**1903**, 39),

$$\zeta_{n+1} = 15(\zeta_n - \zeta_{n-1}) + \zeta_{n-2},$$

avec

$$\zeta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1 \quad 7 \quad 97 \quad 1351 \quad \ldots$$

Ma méthode d'élimination, par les conditions résiduelles, fait bien prévoir que ζ n'est jamais un carré α^2, mais j'en désirerais une démonstration rigoureuse.

Nota. — Il est bien inutile de chercher une solution par tâtonnements, car si, par extraordinaire, il en existe une, elle a pour le moins des milliers de chiffres.

P.-F. Teilhet.

2748. **[I19c]** Peut-on déterminer tous les couples de nombres entiers (p, q) pour lesquels l'équation

$$M - N = 0 \quad \begin{cases} M = x(x+1)(x+2)\ldots(x+p), \\ N = y(y+1)(y+2)\ldots(y+q) \end{cases}$$

admet pour solutions des valeurs *entières* de x et y?

On suppose $M \neq 0$ et $N \neq 0$ (solutions évidentes).

En particulier, je serais heureux d'avoir, pour le cas où $q = \overline{2p+1}$, une démonstration de la proposition suivante qui me semble exacte :

L'équation

$$x(x+1)\ldots(x+p) = y(y+1)\ldots(y+2p+1),$$

dans laquelle p *représente un nombre entier non nul, n'admet pas d'autres solutions, en nombres entiers, que* $p = 2$, $x = 8$, $y = 1$ *ou* -6, *si chacun des membres n'est pas séparément nul.*

En posant $y(y+2p+1) = z$, il vient

$$N = z(z+2p)(z+2.\overline{2p-1})(z+3.\overline{2p-2})\ldots$$
$$\times \left(z+\alpha.\overline{2p-\overline{\alpha-1}}\right)\ldots(z+p.\overline{p+1}).$$

J'ai démontré antérieurement, à l'aide d'une transformation analogue, qu'il n'y avait, pour $p = 2$, que la solution signalée ci-dessus; pour $p = 1$ l'impossibilité est presque évidente;

pour $p = 3$, je la démontre bien simplement. On pourrait étendre la méthode aux valeurs successives de p, mais cela deviendrait long et pénible. Ne peut-on pas concevoir un procédé rigoureux simple et applicable à toutes les valeurs de p?

P.-F. Teilhet.

2749. [**O5a**] V désignant le volume limité par une certaine surface Σ et S son étendue superficielle, quelles sont les surfaces pour lesquelles on a

$$V = S l \frac{m}{n},$$

l étant une ligne importante de Σ, m et n deux nombres entiers?

On a, par exemple, pour le cube de côté a,

$$V = S \frac{a}{6};$$

pour la sphère de diamètre D,

$$V = S \frac{D}{6};$$

pour le cylindre de révolution dont la section par un plan comprenant l'axe est un carré de côté D :

$$V = S \frac{D}{6}.$$

P.-F. Teilhet.

2750. [**V1a**] Nous émettons le vœu suivant, corrélatif du vœu émis (**1904**, 2, question **2703**) par nous au sujet des cours de l'École Polytechnique :

Il nous paraît désirable que les cours mathématiques de la Sorbonne et des Facultés des Sciences, et les programmes de *licence* et d'*agrégation mathématiques* soient plus uniformément relatifs à *toutes* les parties de la Science mathématique pure, sans en oublier aucune; en particulier que des cours d'*Arithmétique* et d'*Algèbre supérieures* soient

professés *régulièrement* à la Sorbonne et dans un certain nombre de Facultés ([1]), et qu'un certificat d'études correspondant soit créé; que la Sorbonne ou les Facultés des Sciences en général n'aient pas tendance à perdre de vue ce que l'illustre Hermite appelait « le culte de l'idée pure » en Mathématiques.

Actuellement les Facultés ne suffisent pas à satisfaire en France à tous les besoins de la Science mathématique pure : leur enseignement, à ce point de vue, présente d'importantes lacunes. *Un Antique.*

2751. [V] Je serais désireux de posséder une bibliographie aussi complète que possible des Ouvrages étrangers (Traités, Mémoires et Tables) ayant trait à la Navigation et à l'Hydrographie. G. Friocourt.

2752. [H9] Il paraît que l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(x+y)s = 2\sqrt{pq}$$

qui s'écrit

$$z = \int X'^2 dx + \int Y'^2 dy - \frac{(X-Y)^2}{x+y},$$

X désignant une fonction arbitraire de x, et Y une fonction arbitraire de y, ne contient pas les intégrales générales des équations différentielles du premier ordre

$$p = 0 \quad \text{et} \quad q = 0.$$

Je demande une explication de ce fait.

W. Kapteyn.

2753. [M¹5kα] Le théorème suivant est-il connu?

Lorsque, par le point double d'une cubique nodale circulaire, on mène des couples de droites rectangulaires,

---

([1]) Il y a un cours spécial d'Algèbre supérieure à Nancy. A la Sorbonne, le cours d'Algèbre et d'Analyse supérieures s'occupe surtout d'Analyse.

les projections du foyer singulier sur les cordes interceptées sont sur un cercle.

Renseignements bibliographiques. T. LEMOYNE.

2754. **[M¹5e]** Le théorème suivant, qui généralise les deux propriétés des cubiques nodales énoncées dans la question 2707 et en renferme, comme cas particuliers, plusieurs autres présentant quelque intérêt, est-il connu?

Lorsque, par le point double O *d'une cubique nodale, on mène des couples de droites* OM, OM′, ON, ON′, … *en involution qui rencontrent la cubique en* M, M′, N, N′, …, *les coniques passant par le point double, deux points fixes de la courbe et les points correspondants* M, M′, N, N′, … *ont un quatrième point commun.* T. LEMOYNE.

2755. **[M¹5eδ]** Les deux théorèmes suivants de la Théorie des courbes de troisième classe sont-ils exacts? Je demande en outre une démonstration directe et géométrique du second.

Si un hexagone ABCDEF, *circonscrit à une courbe de troisième classe, est tel que les droites* AD, BE, *qui joignent deux couples de sommets opposés, soient tangentes à la courbe, la droite* CF, *qui joint les deux autres sommets, est également tangente à cette courbe.*

Si un hexagone ABCDEF, *circonscrit à une courbe de troisième classe, est tel que l'une des droites* AD, *joignant les sommets opposés, soit tangente à cette courbe, les tangentes en* D *et* F *d'une part et en* C *et* E *d'autre part se coupent en deux points situés sur une même tangente à la courbe.* T. LEMOYNE.

2756. **[V1a]** A quelles époques et dans quelles écoles a-t-on commencé à enseigner les Mathématiques à la craie sur un tableau noir? Références bibliographiques et iconographiques. H. BROCARD.

RÉPONSES.

59. (1894, 23) (LAUSSEDAT). — *Instruments enregistreurs* (**1895**, 324). — Il a été dit (**1895**, 324) que le premier des instruments enregistreurs construits en France était un anémomètre imaginé et construit par d'Ons-en-Bray, et dont le spécimen, peut-être unique, existe dans les collections du Conservatoire national des Arts et Métiers.

Un correspondant anonyme, signant simplement L. C. D. B., mais paraissant appartenir à l'Académie des Sciences, écrivait dans les *Annales politiques et littéraires* de Linguet, en 1779, une lettre dont j'extrais quelques lignes :

« Feu M. Pajot d'Onzembray, ce riche traitant qui avoit eu la Poste si long-temps et à si bon marché, avoit aussi eu la manie des cabinets; il en avoit fait un superbe : par son testament il l'a laissé à l'Académie.

» Un des plus précieux objets étoit une machine qui indiquoit elle-même, et dans l'absence du maître, la durée du vent, sa vitesse, sa direction, etc.; elle écrivoit toutes les variations; le sommeil ou les courses de l'observateur n'interrompoient point les observations.

» Elle étoit très compliquée, mais d'une extrême solidité : toutes les pièces étoient de fer ou d'acier poli : elle a passé, avec le surplus, ses vingt années sur le pavé du vestibule (de l'Académie), et a grimpé, comme le reste, au grenier (du Louvre), où la rouille a rongé une partie des pièces, et la négligence à égaré le reste. »

Pour concilier ces informations contradictoires, il est à supposer que, dans la suite, les débris de la machine auront été recueillis et remis en état.

Quant à l'invention même des premiers enregistreurs, elle est certainement plus ancienne et paraît devoir être attribuée au célèbre constructeur horloger Robert Hook.

Voici, en effet, un article, très explicite à ce sujet, publié au *Journal des Savans*, du 4 décembre 1679, p. 288 :

« Extrait d'une lettre écritte de Londres à l'Auteur du Journal, par M. Robert Hook, contenant les particularitez d'une machine rare et nouvellement inventée en Angleterre.

» Nous pourrons vous donner bien tost la description d'une nouvelle Horloge qui n'est achevée que depuis peu, mais qui est en train de marcher et fait bien son effet.

» Cette machine tient un registre exact de tous les différens changemens qui arrivent en l'air. Elle marque les degrez du froid et du chaud, de sécheresse et d'humidité, de légèreté et de pesanteur. La quantité de pluye qui tombe. Combien de temps le Soleil luit. De quel costé vient le vent et avec quelle force il souffle; et ce qu'il y a de commode, c'est qu'elle marque précisément le jour et l'heure à laquelle tous ces changemens arrivent, de sorte que pour estre informé de toutes ces choses, il suffit d'y regarder une fois le mois et donner à l'Horloge une nouvelle feuille de papier pour recevoir les marques qu'elle doit faire. »

A cette description on reconnaît déjà les météorographes du XIXe siècle, celui du P. Secchi (1867) et ceux que l'on a tout récemment installés au sommet du mont Blanc. H. Brocard.

266. (**1894**, 148; **1900**, 154) (E. Fauquembergue). — *Facteurs de* $2^{67}-1$. — Dans *S. M. Am.* (déc. 1904, p. 137), M. J.-N. Cole a trouvé, par la méthode due à Euler, les facteurs

$$193707721 \quad \text{et} \quad 761838257287.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

367. (**1894**, 226; **1901**, 2) (A. Schobloch). — *Représentation des fonctions au moyen de séries de fonctions elliptiques.* — Cette question est la même que **2066** (**1901**, 86). *Voir* rép. (**1903**, 46).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

563. (**1895**, 164; **1903**, 145) (E.-M. Lemeray). — *Convergence de séries.* — Cette question a peut-être des rapports avec **2174** (**1901**, 222; **1902**, 51; **1903**, 211).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

591. (**1895**, 202; **1903**, 249) (G. Luzon). — *Le calcul graphique des probabilités et des erreurs.* — *Voir* L. Lalanne, *De l'emploi de la Géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités* (*J. M.*, IIIe série, t. V, 1879, p. 107 et 123).

Voir encore *C. R.*, t. LXXXVII, 1878, p. 355.

Dans le *Katalog mathematischer und math.-physik. Modelle, Apparate, und Instrumente,* 2. Theil, p. 154 (München, 1892) de W. Dyck, se trouve décrit un appareil pour le calcul des probabilités, intitulé : « Quicunx », de Francis Galton, pour expliquer la loi des erreurs. *Voir* encore l'Appendice (p. 6).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

594. (**1895**, 202; **1903**, 249) (E. Fauquembergue). — *Machine pour reconnaître si* $2^n - 1$ *est ou non premier.* — Voir *A. F.*, t. XX, Marseille, 1891, p. 159.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

826. (**1896**, 102) (R. Guimaraes). — *Pour la bibliographie de Pedro Nunes* (**1896**, 263; **1902**, 41, 210). — Depuis la publication de mes deux dernières Notes relatives à la traduction du Traité de P. Nunez sur la Navigation, j'ai demandé et obtenu communication simultanée des deux manuscrits de Paris et de Soissons, et j'ai eu la satisfaction de constater qu'ils représentaient le même travail, comme je l'avais supposé.

Le manuscrit de Paris est la minute ou le brouillon de la traduction, et le manuscrit de Soissons est la copie ou la mise au net de celui de Paris.

Tous deux sont de la même écriture, seulement plus petite et plus soignée sur la copie que sur la minute.

Celle-ci est surchargée de nombreuses annotations faites en deuxième lecture, et qui prouvent une vérification et une revision de la traduction. Ces annotations sont d'une écriture maigre et allongée, et vraisemblablement d'une autre personne que le traducteur.

L'examen des filigranes des deux registres permettrait sans doute d'établir la date de leur composition.

Le manuscrit de Paris contient à la dernière page quelques annotations, entre autres :

Le 6me io de janvier 1562
le jour des Roys
A Chambort
Jehan de la Vosle (?)

D'autres particularités pourraient être indiquées. Je signalerai seulement que la *Description du nouvel anneau astronomique*, ajoutée au manuscrit de Soissons, n'est pas accompagnée de figure.

Je donnerai, s'il est nécessaire, le Tableau de correspondance des matières des deux manuscrits. H. Brocard.

904. (**1896**, 200) (Barriol). — *Réglettes de Genaille et Lucas.* — Dans l'*Encyclopädie der Math. Wiss.*, Band I, Heft 6, p. 956, sont mentionnées les « Réglettes multiplicatrices » (Paris, Eugène Belin) et d'autres appareils de même nature. *Voir* encore W. Dyck. *Katalog mathematischer und math.-phys. Modelle,* p. 146 (München, 1892). E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

949. (**1896**, 273) (J. Boyer). — *Manuscrits d'Arbogast* (**1897**, 141, 275; **1898**, 154). — Les manuscrits d'Arbogast, relatifs aux Mathématiques, semblent difficiles à retrouver. Par contre, il existe de nombreux autographes de lui aux Archives nationales, parmi les délibérations du Comité d'instruction publique de l'Assemblée législative, dont il fut tour à tour membre le 28 octobre 1791, secrétaire le 30 octobre, vice-président le 5 mai 1792, président le 2 avril. Réélu à diverses reprises, il refusa ce titre le 21 mai 1793.

Arbogast (Louis-François-Antoine), né à Mutzig (Alsace) le 4 octobre 1759, était devenu professeur de Mathématiques à l'École militaire de Strasbourg, lorsqu'il fut élu député à la Législative par le département du Bas-Rhin.

Dans la suite, il fut réélu à la Convention, mais il quitta la carrière politique pour reprendre sa place dans l'enseignement, où il reçut les titres de professeur à l'École centrale du Bas-Rhin, puis de recteur du Collège national de Strasbourg, jusqu'à sa mort le 8 avril 1803.

On retrouvera probablement à Saint-Pétersbourg son manuscrit

d'une étude *Sur la nature des fonctions arbitraires introduites par l'intégration des équations différentielles partielles*, Mémoire qui a remporté le prix proposé en 1787 par l'Académie de Pétersbourg, et que celle-ci fit imprimer en 1791 (d'après Chladni).

On aurait peut-être aussi d'autres indications en se renseignant auprès de M. Noël Charavay, à Paris, qui met continuellement en vente, à l'hôtel Drouot, des documents historiques des provenances les plus diverses. Malheureusement le nom d'Arbogast ne paraît pas être de ceux que les prospectus désignent volontiers à l'attention des amateurs.

H. BROCARD.

1030. (**1897**, 75) (E. LEMOINE). — *Nombres dont la somme des carrés est un carré et dont l'un est le renversé de l'autre.* — Je démontre assez simplement la règle suivante :

RÈGLE. — *Si les nombres* A_1 *et* a_1, *ce dernier étant obtenu en lisant* A_1 *de droite à gauche, sont tels que* : $A_1^2 + a_1^2$ *soit un carré, si d'autre part* A_1 *est des deux nombres celui dans lequel l'exposant du facteur* 2 *est le plus élevé :*

1° *On a*

$$A_1 = 396\lambda, \qquad a_1 = 99\mu;$$

2° *Si* D_1 *est le plus grand commun diviseur de* λ *et* μ, *on a*

$$\frac{2\lambda}{D_1} = 2AB, \qquad \frac{\mu}{D_1} = A^2 - B^2,$$

A *et* B *étant premiers entre eux et de parités différentes. Donc, en particulier,* $\frac{2\lambda}{D_1}$ *doit être pairement pair et* $\frac{\mu}{D_1}$ *impair.*

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes. Leur application montre en moins de deux pages de calcul qu'une seule valeur de A_1 est inférieure à 100 000 et que la plus petite solution demandée est

$$\overline{90288}^2 + \overline{88209}^2 = \overline{126225}^2.$$

Il est curieux de remarquer que le nombre $88209 = \overline{297}^2$ est (**1903**, 234) précisément celui qui fournit la plus petite série indéfinie de solutions du problème **871** (puissances consécutives composées des mêmes chiffres), dans le cas particulier des carrés.

Ici d'ailleurs, et comme pour la question **1031** (**1897**, 282), chaque solution que j'appellerai *primitive* peut en donner une série indé-

finie. Il suffit pour cela, si n est le nombre de chiffres du plus grand des nombres A_1 et a_1 d'une solution, de multiplier chacun des termes A_1 et a_1 par un facteur symétrique composé de o et de 1, et tel qu'entre deux unités consécutives il existe au moins $\overline{n-1}$ chiffres o.

P.-F. Teilhet.

1031. (**1897**, 75) (E. Lemoine). — *Nombres dont la différence des carrés est un carré et dont l'un est le renversé de l'autre* (**1897**, 282). — Si l'on pose

$$A_1^2 - a_1^2 = M^2 \quad \text{et} \quad A_1 = \alpha_1 . 10^m + \alpha_2 . 10^{m-1} + \ldots + \alpha_m . 10 + \alpha_{m+1},$$

on a toujours

$$A_1 = K(A^2 + B^2)$$

(K étant un entier quelconque, A et B deux entiers premiers entre eux et de parités différentes) et toutes les solutions de la question correspondent à l'un des quatre systèmes :

(1) A_1 a $\widehat{2n+1}$ chiffres... $A_1 - a_1 = \quad 2KB^2 \quad =$ mult. de 99,

(2) id. ... $A_1 - a_1 = K(A-B)^2 =$ mult. de 99,

(3) A_2 a $\widehat{2n+2}$ chiffres... $\begin{cases} A_1 - a_1 = \quad 2KB^2 \quad = \text{mult. de } 9, \\ A_1 + a_1 = \quad 2KA^2 \quad = \text{mult. de } 11, \end{cases}$

(4) A_1 a $\widehat{2n+2}$ chiffres... $\begin{cases} A_1 - a_1 = K(A-B)^2 = \text{mult. de } 9, \\ A_1 + a_1 = K(A+B)^2 = \text{mult. de } 11. \end{cases}$

Pour obtenir de nouvelles solutions *primitives* susceptibles de donner, par la méthode rappelée dans notre solution de la question 1030, de nouvelles séries définies de solutions, il faut supposer $m \geqq 4$.

En général, si A_1 a $\widehat{2n+1}$ chiffres, on a la relation

$$A_1 - a_1 = (10^2 - 1)\left[(\alpha_1 - \alpha_{2n+1})\left(\frac{10^{2n}-1}{10^2-1}\right) + (\alpha_2 - \alpha_{2n})\, 10 . \left(\frac{10^{2n-2}-1}{10^2-1}\right) + \ldots + \alpha . 10^{n-1}\right].$$

En faisant des essais, limités par certaines remarques, on peut de proche en proche déterminer les solutions correspondant aux valeurs successives de n. Par exemple : 1° Si $\alpha_1 - \alpha_{2n+1}$ est impair, $A_1 - a_1$ est impair, et le système (1) ne peut donner de solutions; 2° si $\alpha_1 - \alpha_{2n+1} = 0$, le système (2) ne peut donner de solutions que si

$\alpha_2 - \alpha_{2n} = 5$, car dans tous les autres cas K_2 serait mult. de 10, et A_1 et a_1 pourraient être réduits à un nombre de chiffres moindre, en particulier si $m = 4$, $n = 2$, et l'on a

$$A_1 - a_1 = 99\left(101\,\overline{\alpha_1 - \alpha_3} + 10\,\overline{\alpha_2 - \alpha_4}\right);$$

l'on en déduit

$\alpha_1 - \alpha_3 = 0$.... pas de solutions.

$\alpha_1 - \alpha_3 = 1$.... $\overline{65065}^2 - \overline{56056}^2 = \overline{33033}^2$

$\alpha_1 - \alpha_3 = 2$.... $\left\{ \begin{array}{l} \overline{75515}^2 - \overline{51557}^2 = \overline{55176}^2 \\ \overline{71555}^2 - \overline{55517}^2 = \overline{42174}^2 \end{array} \right.$

$\alpha_1 - \alpha_3 = 3$.... $\overline{84295}^2 - \overline{59248}^2 = \overline{59961}^2$

....

(solutions *primitives* nouvelles.)

P.-F. Teilhet.

1117. (**1897**, 173) (Cyp. Stephanos). — *Convergence d'une série.* — On trouve immédiatement, comme condition suffisante de convergence,

$$\left|\frac{a_\mu}{a_{\mu-1}}\right| < r < 1.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

Nous serions heureux de recevoir de M. Cyp. Stephanos une explication complémentaire au sujet du sens exact de sa question **1117**.

La Rédaction.

1173. (**1897**, 265) (E. Fauquembergue). — *Facteurs de* $2^{2^n}+1$ (**1903**, 158). — Voici les résultats récents à cet égard :

$2^{2^9}+1$ a comme facteur $2^{16}.37+1$

$2^{2^{12}}+1$ a comme facteurs $2^{16}.397+1$ et $2^{16}.7.139+1$

$2^{2^{18}}+1$ » $2^{20}.13+1$

$2^{2^{38}}+1$ » $2^{41}.3+1$

(Cunningham, *P. L. M. S.*, 14 mai, 1903).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

1194. (**1898**, 3) (H. Brocard). — *Courbes du cinquième degré* (**1898**, 136, 201, 278; **1899**, 181, 275; **1900**, 55, 276; **1901**, 88, 143; **1902**, 72, 147). — En l'absence de résistances passives, la courbe

que doit parcourir, dans un plan vertical, un mobile pesant pour exercer sur elle une pression constante est généralement transcendante. Dans le cas particulier d'une pression égale au poids du mobile, cette courbe est l'unicursale du cinquième ordre définie par les deux équations

$$x = 2A\left(\varphi - \frac{\varphi^5}{5}\right), \qquad y = A(1+\varphi^2)^2,$$

où A désigne une constante arbitraire et φ un paramètre lié au temps t par la relation

$$\varphi + \frac{\varphi^3}{3} = \sqrt{\frac{g}{A}}\, t.$$

Une Communication plus détaillée sur ce sujet a été faite le 16 décembre 1903 à la Société mathématique. L. Lecornu.

1613. (**1899**, 197) (E. Couturier). — *Nombres de Mersenne* (**1900**, 222; **1901**, 8). — *Voir* la réponse à la question **266** (**1904**, 74).
E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

1775. (**1900**, 81) (E.-B. Escott). — *Figures dans le plan déduites de figures dans l'espace.* — *Voir* la réponse à la question **2538** (**1904**, 53). E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2027. (**1901**, 37) (G. Ricalde). — *Congruence* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. — *Voir* Bachmann, *Niedere Zahlentheorie*, Ier Theil, p. 159-165.
E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2114. (**1901**, 158) et **2621.** (**1903**, 179) (H. Brocard). — *Courbes à asymptotes curvilignes* (**1903**, 105). — *Voir* Joseph Edwards, *Differential Calculus*, p. 195, 198-202 (London, 1892).

Quand l'équation peut être écrite sous la forme

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots,$$

chacune des courbes

$$y = a_0 x^n + \ldots + a_n,$$
$$y = a_0 x^n + \ldots + a_n + \frac{b_1}{x},$$
$$y = a_0 x^n + \ldots + a_n + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

est une courbe asymptote. On a des propriétés analogues en coordonnées polaires. Soit la courbe

$$\rho = a + A.f(\theta)$$

où $f(\theta)$ tend vers zéro pour $\theta = \infty$: le cercle $\rho = a$ est une asymptote.

Voir encore : A. Cayley, *On the theory of algebraic curves* (*C. M. J.*, t. IV, 1843, p. 112) ou *Collected mathematical papers,* Vol. I, p. 54; Plücker (*J. M.*, t. I, 1836, p. 229-252).

Dans Percival Frost, *Curve tracing,* Chap. VII et VIII (London, 1872), on trouve une discussion du sujet et un grand nombre d'exemples de courbes à asymptotes curvilignes.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2253. (**1902**, 2) (Carl Störmer). — *Facteurs* $> 10^7$ *de nombres de la forme* $x^2 + 1$ (**1902**, 186). — *Voir* la réponse à la question **1173** (**1903**, 158). E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2266. (**1902**, 6) (C. Alasia). — *Solution de l'équation*

$$x^2 - 79y^2 = 101z^2$$

(**1902**, 187). — Voici de nouvelles références bibliographiques importantes :

A.-M. Legendre, *Théorie des nombres,* t. I, p. 33-41.

L. Euler, *Algebra,* IIe Partie, Chap. XII; Additions de Lagrange, Chap. V, § 52.

P. Bachmann, *Zahlentheorie,* IVe Partie, 1er fasc., Chap. VIII, p. 198-233.

Lejeune-Dirichlet, *Zahlentheorie,* Suppl. X, § 156, p. 418-428.

C.-F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ,* Art. 294 et 295 (*Höhere Arithmetik,* traduction Maser).

G. Cantor, *De æquationibus 2 gradus indeterminatis* (Dissertation inaugurale, Berlin, 1867).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2274. (**1902**, 8) (E. Maillet). — *Décomposition d'un nombre entier* (**1904**, 31). — I. Dans le *Recueil de problèmes* de M. Laisant (*Algèbre,* p. 166) se trouve l'énoncé ci-après :

Tout nombre pair est égal à un cube qui n'est pas nul, plus trois carrés (D. André, *N. A.*, 1871, quest. 941, p. 185-187).

Je puis préciser cet énoncé de la manière suivante :

Tout nombre pair, sauf 2, 6, 8, 16, 24 *et* 40, *est la somme de* 1 *cube et de* 3 *carrés, tous les composants étant différents de zéro.*

II. *Tout nombre pair, sauf* 2, 4 *et* 8, *est la somme de* 1 *cube, de* 2 *carrés et de* 3 *triangulaires, tous* $\neq 0$.

III. *Tout nombre pair, sauf* 2, 4, 8, 10 *et* 18, *est la somme de* 3 *carrés et de* 3 *octogones, tous* $\neq 0$.

IV. *Tout nombre entier, sauf* 1, 2, 3, 4, 6 *et* 7, *est la somme de* 1 *triangle, de* 3 *carrés et de* 1 *pentagone, tous* $\neq 0$.

G. DE ROCQUIGNY.

2394. (**1902**, 203) (G. DE ROCQUIGNY). — *Équations indéterminées* (**1903**, 131). — 3° *Rectifié.*

$$\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y+1)}{2}=z^5.$$

Cette question est semblable à **1651** (**1899**, 242) et comporte une solution analogue (*voir* **1900**, 250).

L'équation peut s'écrire

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2=2(4z^5+1).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait une solution est que tout facteur premier de $4z^5+1$ soit de la forme $4n+1$. Nous pouvons donc exclure les valeurs de z telles que $4z^5+1$ soit divisible par des nombres premiers de la forme $4n+3$, 3, 7, 11, ...

Les valeurs de $4z^5+1$ dépassant vite les limites des Tables de facteurs, on déterminera les solutions de $4z^5+1\equiv 0 \pmod{p}$, où p est un nombre premier de la forme $4n+1$, 5, 13, ..., ce qui aidera à trouver les facteurs de $4z^5+1$. Voici les plus petites solutions :

x.	y.	z.	x.	y.	z.
1	0	1	242	243	9
12	43	4	293	641	12
31	32	4	205	1433	16
44	116	6	249	1426	16
66	105	6	991	1055	16
131	317	9	1023	1024	16

Si $z = 21$,

$$4z^5 + 1 = 5.17.192193;$$

si $z = 36$,

$$4z^5 + 1 = 5.53.193.4729;$$

si $z = 81$,

$$4z^5 + 1 = 5.37.349.337.641.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

M. H. Brocard indique les nombres $78 + 946 = 496 + 528 = 1024$ et la solution

$$x = n^5 - 1, \quad y = n^5, \quad z = n^2.$$

Plus généralement

$$\frac{(n^\lambda - 1)n^\lambda}{2} + \frac{n^\lambda(n^\lambda + 1)}{2} = n^{2\lambda}.$$

2411. (**1902**, 226) (G. de Rocquigny). — *Nombre pair somme de deux nombres premiers* (**1903**, 61, 166, 283). — Sur demande de vérification de la part de M. Haussner, M. V. Aubry a reconnu l'exactitude des deux chiffres 92_{1890} et 42_{1980}; M. Haussner en a été avisé.

La Rédaction.

2464. (**1902**, 292) (*Rudis*). — *Fractions continues.* — Étant donnée une suite d'éléments dans laquelle il n'y a qu'un nombre fini n d'éléments distincts et où il y a au plus r éléments consécutifs égaux, ces deux conditions, qui sont nécessaires pour que la suite soit périodique, sont-elles aussi suffisantes ?

D'abord, l'étude d'une pareille suite se ramène immédiatement à celle d'une suite où deux termes consécutifs ne sont jamais égaux. En effet, imaginons réunis par groupes les éléments égaux consécutifs et considérons chacun de ces groupes comme un nouvel élément unique. Le nombre de ces nouveaux éléments ainsi introduits est fini, au plus nr. La périodicité de la suite donnée entraînerait la périodicité de la nouvelle suite, et *vice versa*.

Ceci posé, je dis qu'*une suite infinie formée avec n éléments distincts, et où deux éléments consécutifs ne sont jamais égaux, n'est pas nécessairement périodique.*

En effet, nous pouvons réunir en groupes tous les éléments consécutifs, jusqu'à ce que nous rencontrions un élément qui figure déjà dans le groupe; comme dans l'exemple

$$(12)(123)(123)(12)(132)(31)\ldots.$$

Les groupes ainsi obtenus renfermeront au moins deux éléments, et pas plus de *n*. Ces groupes constitueront une nouvelle suite analogue à la première, périodique si la première l'est.

Dans la nouvelle suite, les groupes distincts sont en nombre fini : au plus $\Sigma D_{n,i}$, où $D_{n,i}$ indique le nombre de groupes de *i* éléments. Mais, en général, *k* groupes consécutifs peuvent être égaux, et *k* n'est aucunement limité par les hypothèses faites. Donc, la suite de ces groupes, et aussi la suite initiale, ne sont pas nécessairement périodiques. FERNANDO DE HELGUERO (Rome).

Comme exemple de suite de ce genre non périodique, on peut citer d'après ce qui précède, et comme on le vérifie immédiatement, la suite obtenue en considérant les deux groupes 12, 123, et prenant 1 fois le 1er groupe, 1 fois le 2e, 2 fois le 1er, 1 fois le 2e, ..., *n* fois le 1er, 1 fois le 2e, ..., *n* croissant indéfiniment.

L'intéressante réponse de M. F. de Helguero a été mise à la poste à Rome le 15 février 1904. Le même jour, nous présentions à l'Académie des Sciences de Paris (*C. R.*, 1er sem. 1904, p. 410) (1) un théorème donnant des exemples de fractions continues (fractions quasi-périodiques) dont tous les quotients incomplets sont limités et qui sont des nombres transcendants. La nature de ces fractions entraîne immédiatement une réponse négative à la première partie de la question **2464** de M. *Rudis*. E. MAILLET.

2551. (**1903**, 71) (*Artigensis*). — *Applications de la transformation par rayons vecteurs réciproques.* — On peut citer les nombreuses applications à la discussion des singularités des courbes, principalement à l'infini.

Voir Dr HIRST (*P. R. S. L.*, 1865) et *A. J. M.*, t. XIV, p. 301; t. XV, p. 221; CHARLOTTE-A. SCOTT, *Modern analytical Geometry*, p. 219 (London, 1894).

Voir encore réponse à la question **2463** (**1903**, 93).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

[D'après l'anglais. (LA RÉD.)]

2579. (**1903**, 126) (P.-F. TEILHET). — L'équation

$$\frac{mn-1}{2m-n}=a$$

(1) *Voir* le Mémoire développé dans *J. M.*, 1904.

est toujours possible; le nombre de solutions est celui des diviseurs de $2a^2-1$. En effet,

$$m=\frac{an-1}{2a-n},$$

$$1\equiv an\equiv 2a^2 \pmod{2a-n},$$

$2a-n$ est donc un diviseur de $2a^2-1$,

$$2a^2-1=pq.$$

$$m=q-a,\qquad n=2a-p.$$

A. WEREBRUSOW.

2582. (**1903**, 128) (M. CLAVERO Y GUERVOS). — (**1903**, 267; **1904**, 54). — Pour avoir les triangles

$$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2,$$
$$a^2-b^2-2ab=\pm 1,$$

on peut prendre pour a et b les numérateurs ou dénominateurs successifs des réduites de $\sqrt{2}$.

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \ldots,\ \frac{x}{y},\ \frac{x'}{y'},\ \ldots.$$

En effet, cette série a les propriétés suivantes :

$$x^2-2y^2=\pm 1,\qquad x=y'-y,$$
$$y'=\tfrac{1}{2}(x'+x),\qquad y=\tfrac{1}{2}(x'-x);$$

on a donc

$$y'^2-y^2-2yy'=\pm 1,$$
$$y'^2-y^2=xx',\qquad 2yy'=\tfrac{1}{2}(x'^2-x^2),$$
$$\tfrac{1}{2}(x'^2-x^2)-\tfrac{1}{2}(2xx')=\mp 1.$$

A. WEREBRUSOW.

2621. (**1903**, 179) (H. BROCARD). — *Asymptotes curvilignes.* — Après avoir cité pour mémoire le point asymptotique qui se rencontre dans les spirales logarithmique, hyperbolique et tractrice (PAINVIN, *Géom. analyt.*, 1866, p. 796-798), viennent les asymptotes curvilignes qui se présentent dans les courbes ci-après désignées :

Une circonférence asymptote,

$$\rho=\alpha,\qquad \text{pour la courbe}\qquad \rho=\alpha\frac{2\omega}{2\omega-1}\ \text{(1)}.$$

(1) BRIOT et BOUQUET, *Géom. analyt.*, 1863, p. 337; LONGCHAMPT, *Quest. d'examens*, 1865, p. 368.

Deux circonférences asymptotes,

$\rho = 1, \quad \rho = 2,$ pour la courbe $(\rho - 1)(\rho - 2) = \frac{1}{\omega}$ (1).

Une parabole asymptote,

$y = x^2,$ pour la courbe $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (2).

Deux paraboles asymptotes,

$y = x^2 \pm 2,$ pour la courbe $y = \sqrt{x^4 \pm 4x^2 + 5}$ (3),
$y = \pm x^2,$ » $y = \pm\sqrt{x^4 + 1}$ (4),
$y = \pm\left(x^2 - \frac{3}{2}\right),$ » $y = \pm\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}$ (5).

H. Lez.

Voir la réponse à la question 2114 (1904, 80).

2824. (1903, 181) (A. Boutin). — *Manières différentes de tracer une route fermée en suivant les lignes d'un quadrillage limité à un rectangle et en passant par les sommets de tous les carrés du quadrillage, une seule fois par chacun d'eux.* — Dans le sens d'une des dimensions du rectangle, par exemple dans le sens vertical, les lignes du quadrillage doivent, pour que le tracé soit possible, contenir chacune, comme l'indique le texte de la question, un nombre pair $2x$ de sommets. Je supposerai, dans cette Note, $x = 2$.

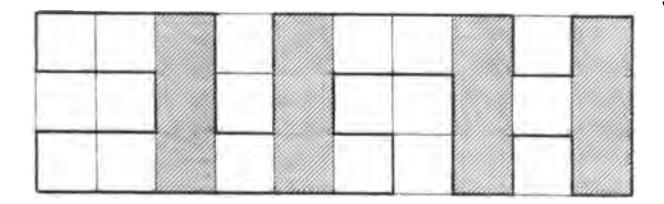
Soient y le nombre des sommets sur chaque ligne horizontale et $F(y)$ le nombre des routes qu'on peut tracer. Le rectangle se compose de $y - 1$ rangées verticales de trois carrés chacune. J'appelle *cloisons* celles de ces rangées qui se trouvent en entier dans l'intérieur du tracé d'une route; il y en a toujours au moins une. Sur la figure ci-dessous, les cloisons sont marquées par des hachures.

S'il n'y a qu'une cloison, chacune des positions qu'elle peut occuper donne lieu à un seul tracé. Comme la cloison peut occuper $y - 1$ positions différentes, il y a $y - 1$ tracés différents ne présentant qu'une cloison.

---

(1) Painvin, *loc. cit.*, 1866, p. 793.
(2) Briot et Bouquet, *loc. cit.*, p. 323.
(3) Longchampt, *loc. cit.*, p. 322 et 323.
(4) *Ibid.*, p. 332.
(5) *Ibid.*, p. 337.

Soient maintenant plusieurs cloisons en nombre quelconque et, parmi les différentes dispositions possibles, considérons celles dans lesquelles l'intervalle entre les deux premières cloisons comprend un même nombre α de rangées verticales. Je désignerai momentanément par $\varphi(\alpha)$ le nombre des tracés différents que la route peut suivre dans cet intervalle. Cela posé, imaginons que nous détachions du rectangle ces α rangées et que, sans rien changer d'ailleurs, nous rapportions la première cloison sur la seconde, de manière que les deux n'en fassent plus qu'une. Il en résultera un nouveau rectangle dont chaque ligne horizontale ne contiendra plus que $y-\alpha-1$ sommets et, dans ce rectangle, une disposition des cloisons qui pourra être quelconque. Nous pourrons donc tracer sur son quadrillage $F(y-\alpha-1)$ routes différentes et chacun de ces tracés pourra, dans le rectangle primitif, se combiner avec l'un quelconque des $\varphi(\alpha)$ tracés applicables à l'intervalle entre les deux premières cloisons. Il y



a donc $\varphi(\alpha)F(y-\alpha-1)$ tracés différents dans lesquels cet intervalle est de α rangées. Or, α peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à $y-3$; on a donc, en tenant compte des $y-1$ solutions qui ne présentent qu'une cloison,

$$F(y)=y-1+\varphi(1)F(y-2) + \varphi(2)F(y-3)+\ldots+\varphi(y-3)F(2).$$

Cette formule se simplifie. On constate d'abord facilement que $\varphi(1)=3$ et que, si α est >1, $\varphi(\alpha)=2\alpha$. Désignons un instant par A le second membre de la formule, dans lequel les facteurs φ sont remplacés par leurs valeurs, et par A' et A'' ce que devient A quand on change y en $y-1$ et en $y-2$; puis formons la différence deuxième de $F(y-2)$, à savoir

$$F(y)-2F(y-1)+F(y-2)=A-2A'+A''.$$

Dans cette égalité rétablissons, à la place de A, A', A'', les expres-

sions que ces lettres représentent; il vient, toutes réductions faites, la formule de récurrence :

$$F(y) = 2\,F(y-1) + 2\,F(y-2) - 2\,F(y-3) + F(y-4).$$

Les valeurs initiales, à partir de $y = 1$, sont :

$$F(1) = 0, \quad F(2) = 1, \quad F(3) = 2, \quad F(4) = 6.$$

Remarque. — On peut traiter d'une manière analogue le cas, d'ailleurs fort simple, où, x étant quelconque, $y = 3$. La solution est alors immédiate. Dans ce cas, le rectangle se compose de $2x - 1$ rangées de deux carrés chacune. Celles de rang impair forment des cloisons dans le sens précédemment défini; dans l'intervalle entre deux cloisons consécutives, le tracé peut se faire de deux manières. Le nombre de ces intervalles étant $x - 1$, le nombre total des tracés possibles est 2^{x-1}.

C. Flye Sainte-Marie.

2675. (**1903**, 274) (E.-B. Escott). — *L'auteur d'un « Traité des fluentes », cité par Lacroix.* — A la page 601 du Tome III (2e édition) de son *Traité,* Lacroix mentionne le titre complet de la traduction française de l'Ouvrage de Muller. Le titre de l'original est : *A mathematicat treatise, containing a systeme of conic sections, with the doctrine of fluxions and fluents* (London, 1736), et l'auteur en était John Muller, professeur d'artillerie et de fortification à l'Académie militaire de Woolwich, né en 1699, mort en 1784 (comparer le *Biogr. litter. Handwörterbuch de* Poggendorff, t. II, p. 222).

G. Eneström (Stockholm).

2687 et **2688.** (**1903**, 280) (P.-F. Teilhet). — *Représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés.* — Note bibliographique. — La représentation des nombres comme somme de cinq carrés a été étudiée par Henry J. Stephen Smith (Mémoires présentés par divers savants à l'*Académie des Sciences de l'Institut national de France,* t. XXXIX, ou *Collected mathematical Papers,* Vol. II, p. 623). *Voir* encore Eisenstein (*Cr.,* t. 35, 1847, p. 368); Bachmann, *Zahlentheorie,* t. IV, p. 621, 664.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

QUESTIONS.

2757. [$\mathbf{M^1 5 e}\delta$] On sait que :

Si un hexagone, inscrit à une cubique, a deux des points de concours de ses côtés opposés sur la courbe, le troisième de ces points de concours est aussi sur la courbe.

Connaît-on le théorème suivant qui est la généralisation du précédent?

Si un hexagone ABCDEF, *inscrit à une cubique, a l'un seulement* (AB, DE) *des points de concours de ses côtés opposés sur la courbe, les deux cordes interceptées dans la courbe par les couples de côtés* (BC, FA) *et* (CD, EF) *se couperont sur cette courbe.* T. Lemoyne.

2758. [$\mathbf{V 1 a}$] Dans un manuscrit scientifique daté du 5 août 1678, j'ai rencontré l'abréviation $\perp$ pour désigner *perpendiculaire*.

Y a-t-il un texte imprimé ou manuscrit plus ancien où elle ait été déjà employée? H. Brocard.

2759. [$\mathbf{L^1 16 a}$] On donne dans un plan six droites fixes A, B, C, D, E, F, et un point P mobile sur la cinquième droite E, projeté en a, b, c, d, sur les quatre premières droites.

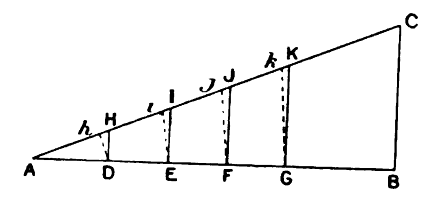
Trouver le lieu des centres des coniques passant par les points a, b, c, d et dont un axe est parallèle à la sixième droite F.

Combien parmi ces coniques y a-t-il de coniques particulières (hyperbole équilatère, parabole, cercle)?

Je ne demande que de brèves indications sur la méthode de résolution. H. Brocard.

2760. [**Q1**] Si, dans un triangle rectangle ABC, on prend, sur l'un des côtés AB de l'angle droit, des longueurs égales $AD = DE = EF = FG = \ldots$ (*fig.* 1 et 2), et si l'on élève, aux points D, E, F, G, ..., les perpendiculaires à AB, il est facile de démontrer que ces dernières rencontreront l'hypoténuse AC en des points H, I, J, K, ... tels que,

Fig. 1.



dans le cas de la géométrie riemannienne, on aura (*fig.* 1)

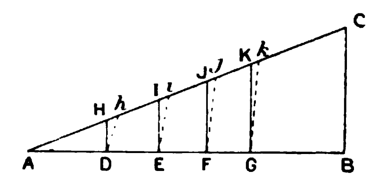
$$\frac{AD}{AH} < \frac{AE}{AI} < \frac{AF}{AJ} < \frac{AG}{AK} < \ldots < \frac{AB}{AC}$$

et, dans le cas de la géométrie lobatschewskienne (*fig.* 2),

$$\frac{AD}{AH} > \frac{AE}{AI} > \frac{AF}{AJ} > \frac{AG}{AK} > \ldots > \frac{AB}{AC}.$$

Pour rendre les différents rapports qui précèdent $\frac{AB}{AC}$ égaux

Fig. 2.



à ce dernier, il faudra, dans le premier cas (*fig.* 1), diminuer les dénominateurs de quantités Hh, Ii, Jj, Kk, ... ou λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, ..., telles que l'on ait

$$\frac{AD}{AH - \lambda_1} = \frac{AE}{AI - \lambda_2} = \frac{AF}{AJ - \lambda_3} = \frac{AG}{AK - \lambda_4} = \ldots = \frac{AB}{AC}$$

et, dans le second cas, augmenter ces dénominateurs de quantités Hh, Ii, Jj, Kk, ..., ou λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, ..., telles que l'on ait (*fig.* 2)

$$\frac{AD}{AH+\lambda_1}=\frac{AE}{AI+\lambda_2}=\frac{AF}{AJ+\lambda_3}=\frac{AG}{AK+\lambda_4}=\ldots=\frac{AB}{AC}$$

(malgré cela les triangles ADh, AEi, ... ne sauraient, dans l'un ou l'autre cas, être semblables entre eux ni à ABC).

Nous verrions immédiatement que, si nous supposions, dans les deux cas, que les quantités λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, ... puissent être égales entre elles, cela entraînerait immédiatement l'égalité des longueurs AH, HI, IJ, JK, ... et serait, par suite, en contradiction complète avec ce que nous avons établi au début. Pour que ces longueurs AH, HI, IJ, JK, ... soient de plus en plus petites (comme elles doivent être dans le premier cas), ou de plus en plus grandes (comme elles doivent être dans le second), doit-on admettre que les quantités λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, ... sont, dans les deux cas, de plus en plus petites, de façon à tendre vers zéro ([1]) quand on se rapproche de plus en plus de C?

EDMOND BORDAGE (Saint-Denis, Réunion).

2761. [K21aα et β] I. Un cercle étant tracé, peut-on en déterminer le centre à l'aide du compas, sans se servir de la règle?

II. Peut-on, à l'aide de la règle seule, mener une perpendiculaire à une droite? *Carevyge.*

2762. [J2e] (Σ) On sait que si l'on pose

$$\Theta(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt,$$

la probabilité P(x), pour qu'une erreur fortuite soit en

([1]) On pourrait dire que $\lambda_n = 0$ est la quantité qui correspond au rapport $\frac{AB}{AC}$.

valeur absolue inférieure à x, a été mise par Gauss sous la forme (dite *normale* par M. Poincaré)

$$P(x) = \Theta(hx),$$

h étant la *mesure de la précision*.

Supposons que, sans préciser pour le moment la nature de la fonction Φ, nous admettions une loi de la forme

$$P(x) = \Phi(hx).$$

Si deux causes d'erreurs, obéissant à une telle loi, interviennent simultanément, et indépendamment l'une de l'autre, avec des mesures de précision h_1 et h_2, on peut *calculer* la loi de la probabilité résultante.

On a, en effet, la probabilité d'une erreur résultante inférieure à x en valeur absolue, en faisant la somme de toutes les probabilités élémentaires

$$\Phi(h_1 x_1)\,\Phi(h_2 x_2)\,dx_1\,dx_2$$

pour lesquelles

$$-x \leqq x_1 + x_2 \leqq x.$$

Cette somme peut s'écrire

$$P(x) = \int_{-x}^{x} dx \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(h_1 x_1)\,\Phi[h_2(x - x_1)]\,dx_1.$$

Pour que la loi représentée par la fonction Φ puisse être considérée comme normale, il faut évidemment que l'intégration du second membre donne

$$P(x) = \Phi(hx),$$

h étant une nouvelle constante liée à h_1 et h_2 par une relation de la forme

$$f(h) = f(h_1) + f(h_2).$$

Nous avons fait voir (*Nouv. Ann. de Math.*, 1894, p. 198 et 1895, p. 133) qu'il en est ainsi pour la loi de Gauss ([1]),

---

([1]) Nous avons même étendu cette démonstration à la loi des erreurs à deux dimensions (*Bull. de la Soc. Math.*, 1895, p. 65).

la dernière relation écrite étant dans ce cas

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2},$$

et M. Poincaré a reproduit notre démonstration dans son *Calcul des probabilités* (p. 79 à 82).

Il serait intéressant de rechercher si la forme Θ est la seule que l'on puisse donner à la fonction Φ de façon à satisfaire à la condition précédente, ou, en d'autres termes, si elle constitue la seule solution de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(hx) = \int_{-x}^{x} dx \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(h_1 x_1)\, \Phi[h_2(x - x_1)]\, dx_1,$$

la constante h étant liée aux constantes h_1 et h_2 par une relation de la forme

$$f(h) = f(h_1) + f(h_2),$$

de façon que l'on puisse de proche en proche combiner un nombre quelconque de lois d'erreurs en reproduisant toujours une loi de probabilité de même forme.

M. D'OCAGNE.

2763. [**M**[1]**6**] Une quartique réelle a 24 points d'inflexion. Peut-on en indiquer une ou une catégorie, d'équation aussi simple que possible, et telle qu'elle n'ait pas 3 points d'inflexion sur une droite, 6 sur une conique, ou 10 sur une cubique? [*Comp.* question **1302** (**1898**, 147).]

Question analogue pour les courbes algébriques de degré $n > 4$?

E. MAILLET.

2764. [**D1dδ**] Quand x est compris entre a et b, on donne la valeur d'une fonction

$$\varphi(x) \quad \text{pour} \quad x = x_0, \quad \ldots, \quad x_n;$$

de sa dérivée première

$$\varphi'(x) \quad \text{pour} \quad x = x'_0, \quad \ldots, \quad x'_n, \quad \ldots;$$

de sa dérivée $k^{\text{ième}}$

$$\varphi^{(k)}(x) \quad \text{pour} \quad x = x_0^{(k)}, \quad \ldots, \quad x_n^{(k)}.$$

A-t-on formé pour $k > 0$ un polynome algébrique ou une fraction rationnelle $\Phi(x)$ *aussi simple que possible* qui prenne, ainsi que ses dérivées, les valeurs en question pour les mêmes valeurs de la variable?

Je ne demande que des renseignements bibliographiques.

E. Maillet.

2765. [L'5a] Si M et M' sont deux points conjugués variables d'une ellipse donnée, on trouve que le lieu du point de rencontre de la normale en M avec la tangente en M' est une quartique unicursale. Je n'ai pu parvenir à l'équation cartésienne du 4e degré de cette quartique. Je serais reconnaissant au correspondant qui voudrait bien l'envoyer à la Rédaction. E.-N. Barisien.

2766. [M'5eα] Connaît-on un exemple de cubique réelle, sans point double, n'ayant qu'un point d'inflexion réel, ou toute cubique réelle, sans point double, a-t-elle 3 points d'inflexion réels? Les démonstrations corrélatives de Serret (*Algèbre sup.*, t. II, 1885, p. 614) et Salmon (*Géom. anal., courbes planes,* trad. Chemin, Paris, 1884) établissent-elles bien *d'une manière absolue* qu'il y a toujours 3 points d'inflexion réels? *Doubt.*

2767. [V9] Peut-on me faire savoir s'il existe une monographie du cylindroïde? Quels sont les travaux importants publiés sur cette surface? J. Jan (Lausanne).

2768. [K5d] Je désire connaître la courbe lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans un triangle et, en particulier, lorsque ce triangle est équilatéral.

E.-N. Barisien.

RÉPONSES.

524. (**1895**, 134; **1902**, 138) (H. Brocard). — *Structure du fruit de l'hélianthe.* — L'auteur de la question mettra à la disposition des lecteurs, qui nous en feront la demande, une très belle photographie, grandeur naturelle (17^{cm} à 19^{cm} de diamètre), de la mosaïque des graines de l'hélianthe (tournesol ou soleil des jardins, grand soleil du Pérou, *helianthus annuus* Linné) pour aider à la recherche ou à l'identification des courbes de joint de cette mosaïque.

La Rédaction, H. Brocard.

546. (**1895**, 150; **1902**, 225) (E. Fauquembergue). — Soit l'équation

(1) $$x^5 + y^5 = A z^5.$$

En posant
$$(u, v) = u^2 + uv - v^2,$$
l'équation (1) devient

(2) $$(x+y)(x^2 - xy + y^2, x^2 - 2xy + y^2) = A z^5.$$

Le diviseur de $x+y$ commun avec z est z_0^5 (excepté 5); donc

$$x+y = A_0 z_0^5, \qquad (x^2 - xy + y^2, x^2 - 2xy + y^2) = A_1 z_1^5.$$

Le nombre premier (u, v) a six représentations pour chaque puissance de l'équation de Pell :

$$\begin{array}{ll} (u, v), & (u, u - v), \\ (u+v, u+2v) & (2u - v, 3u - 2v), \\ (2u+3v, 3u+5v), & (5u - 3v, 8u - 5v). \end{array}$$

La formule de multiplication est

$$(a, b)(s, t) = [as + bt, bs + (a+b)t].$$

Ainsi l'on obtient

$$z_1 = (a, b), \qquad z_1^5 = (u, v),$$
$$u = a^5 + 10ab^2(a^2 + ab + b^2) + 3b^5,$$
$$v = 5b[(a^2 + ab + b^2)^2 + ab^2(a + b)],$$

$$(3) \qquad \begin{cases} (x - y)^2 = vs + (u + v)t, \\ (x + y)^2 = (4u - v)s + (v - 3u)t, \end{cases}$$

$$Az_0^5 = (s, t)\sqrt{(4u - v)s + (v - 3u)t},$$

ce qui donne la forme générale du nombre A.

Des équations (3) on tire la condition

$$(u - 2v)(x - y)^2 \equiv (u + 2v)(x + y)^2 \qquad (\text{mod } 4z_1^5),$$
$$x - y = k(x + y) - l.4z_1^5.$$

Par la loi de réciprocité on voit que $u^2 - 4v^2$ est un résidu pour les nombres $5n + 1$, un non résidu pour les nombres $5n - 1$; et z_1 ne contient, par suite, que les nombres $5n + 1$.

Pour $x + y$ arbitraire on trouve $x - y$, ensuite s et t, d'après (3).

A. Werebrusow (Théodosia, Russie).

1890. (**1900**, 237) (G. de Rocquigny). — *Nombres sommes de quatre carrés* (**1901**, 104; **1902**, 133). — *Voir* encore Haag (*Tübingen*), *Z. H.*, 1904, 1er Cahier, p. 57.

N. Plakhowo.

1947. (**1900**, 333) (*Rosace*). — *Lieu du point de rencontre de deux normales* (**1901**, 54). — Nous croyons que la réponse de E. Duporcq (*loc. cit.*) ne correspond pas à la démonstration que demandait M. *Rosace*. La question reste donc posée.

E. Maillet.

2179. (**1901**, 224) (E.-B. Escott). — *Tables de solutions d'équations cubiques* (**1902**, 51, 164; **1904**, 31). — La formule (**1902**, 164) peut donner toute identité

$$A^3 + B^3 = C^3 + D^3,$$

si l'on y pose

$$\varphi = \frac{C + D}{\lambda}, \qquad \psi = \frac{A + B}{\lambda}, \qquad M - N = P\lambda,$$
$$M = \frac{P\lambda}{3}\left(1 + \frac{AC - AD - BC}{AC - BD}\right),$$
$$\mp\omega = \frac{P\lambda^2}{3}\,\frac{C^2 - CD + D^2}{(A + B)(AC - BD)},$$

ce qui est toujours possible.

Exemples :

1° $58^3 + 51^3 = 30^3 + 67^3$; $\varphi = 97$, $\psi = 109$, $M = 5353$, $N = 322$, $\omega = 31$.
2° $58^3 - 30^3 = -51^3 + 67^3$; $\varphi = 4$, $\psi = 7$, $M = 118$, $N = 82$, $\omega = 19$.
3° $67^3 - 58^3 = 51^3 - 30^3$; $\varphi = 7$, $\psi = 3$, $M = 6$, $N = 3$, $\omega = -1$.

Soient

$$M\psi = ax^2 + bxy - cy^2, \qquad \varphi = m^2\psi, \qquad b = 2\sqrt{3ac},$$
$$N\psi = ax^2 - bxy - cy^2, \qquad \omega\psi^2 = \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}y^2.$$

On aura

$$(M\psi, N\psi) = \psi^2(M, N)$$
$$= 3(ax^2 - cy^2)^2 + (bxy)^2 = 3m^2\omega^2\psi^4 = 3(ax^2 + by^2)^2,$$
$$M\psi + \omega\varphi^2 = a(m^2+1)x^2 + bxy + c(m^2-1)y^2,$$
$$M\varphi + \omega\psi^2 = \frac{a}{m}(m^2+1)x^2 + bm^2xy + \frac{c}{m}(m^2-1)y^2.$$

Pour avoir les identités de M. Teilhet (**1904**, 31), on prendra :

1° $\qquad m = 2, \qquad a = \frac{7}{6}, \qquad c = \frac{1}{4}.$

2° $\qquad m = 2, \qquad a = \frac{1}{6}, \qquad c = \frac{1}{2}.$

A. Werebrusow.

2182 et **2183**. (**1901**, 249) (S. de la Campa). — *Critique de certains travaux sur la décomposition des nombres en facteurs premiers. Méthodes mécaniques de décomposition.* — Il est à regretter que les Tables existantes de nombres décomposés en facteurs premiers aient exclu les multiples de 3 et de 5 et même les nombres pairs, et que, dans certaines d'entre elles, on n'ait indiqué que le plus petit facteur premier. Car, au moyen d'une Table *complète* des $2n$ premiers nombres, avec indication de tous les facteurs premiers, on vérifierait avec une rapidité extraordinaire si un nombre compris entre $2n$ et $4n + 2$ est premier ou composé. Supposons, en effet, qu'avec cette Table je veuille constater si $2n + 1$ est premier ou non, et soit r la racine du plus grand carré contenu dans $2n + 1$. Je mets le doigt sur $2n$ en disant 1, sur $2n - 1$ en disant 2, sur $2n - 2$ en disant 3, ..., sur $2n - (r - 1)$ en disant r. Si aucun

des termes que je prononce ne tombe sur un nombre dont il soit facteur, $2n+1$ est premier. Sinon $2n+1$ est divisible par le terme qui tombe sur un nombre dont il est facteur. La chose a à peine besoin de démonstration. Si un nombre qui diffère de $2n+1$ de m unités est divisible par m, $2n+1$ l'est évidemment aussi.

Mais si l'on observe qu'en opérant ainsi les termes impairs tombent sur les nombres pairs et *vice versa*, et que les termes impairs sont les seuls importants, on verra qu'au lieu de compter 1, 2, 3, ..., r à partir de $2n$, on peut compter 1, 3, 5, ..., r (ou $r-1$ si r est pair) à partir de n, ce qui conduit au même résultat.

Par ce procédé, celui qui aurait la Table du huitième million trouverait, dans le temps qu'il faut pour compter de 1 à 2267, en laissant de côté les nombres pairs, soit en 19 minutes environ, que le nombre 14447591 (**1896**, 245) est divisible par 2267.

L'auteur de ces lignes construit en ce moment des Tables et un appareil servant à décomposer les nombres en facteurs premiers. Ce sera pratique au moins jusqu'à un milliard. R. Jolivald.

2222. (**1901**, 276) (A. Boutin). — *Équation différentielle*

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2}{x^2+y^2} - 1$$

(**1904**, 43). — Si l'on cherche la courbe telle que le diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère inscriptible MTON soit constant et égal à a, on trouve, pour équation différentielle de cette courbe, l'équation précédente (M point de la courbe, MT la tangente en M coupant l'axe OY en T, MN la normale en M coupant l'axe OX, perpendiculaire à OY en N).

Si φ est l'angle de la tangente avec OX, le changement de variables $x = a\cos\varphi\cos\omega$, $y = a\cos\varphi\sin\omega$ conduit à l'équation transformée

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \operatorname{tang}\omega \operatorname{tang}(\omega \pm \varphi).$$

A. Boutin.

2243. (**1901**, 309) (V. Aubry). — *Roulettes gauches* (**1902**, 242). — Les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences* pour 1732 nous renseignent amplement sur la bibliographie du sujet. On y rencontre, en effet, les études suivantes :

Bernoulli (à Bâle), *Problème sur les épicycloïdes sphériques,*

p. 237-248, 1 planche. L'auteur cite HERMAN (*Acad. Petropol.*, t. I, 1726, p. 210) et OFFENBURG.

BERNOULLI, *Sur les courbes algébriques et rectifiables tracées sur une surface sphérique*, p. 249-255, 1 planche.

DE MAUPERTUIS, *Solution du mesme problème et de quelques autres de cette espèce*, p. 255-259, 2 figures.

L'auteur cite et résout des problèmes posés ou traités par MM. PARENT et GODIN (*Mém.* de 1704 et de 1730). M. GODIN avait rapporté aussi les solutions de REGIOMONTANUS et de STEVIN.

NICOLE, *Manière de déterminer la nature des roulettes formées sur la superficie convexe d'une sphère; et de déterminer celles qui sont géométriques et celles qui sont rectifiables*, p. 271-288, 2 planches.

L'auteur cite Jean BERNOULLI pour une formule donnée dans les *Actes de Leipzig* et DE MAUPERTUIS pour la solution d'un problème posé par BERNOULLI (à Bâle).

CLAIRAUT, *Des épicycloïdes sphériques*, p. 289-294, 4 figures.

Signalons aussi : TH. OLIVIER, *Mémoire de Géométrie descriptive. Construction des centres de courbure des épicycloïdes planes et sphériques*, 1834; 3 pl.

H. BROCARD.

2251. (**1902**, 1) (LA RÉDACTION) et **2274.** (**1902**, 8) (E. MAILLET). — *Décomposition d'un nombre* (**1904**, 31, 81). — 1° L'expression

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3$$

est la somme de 6 carrés $\neq 0$, $(n > 1)$ [*comp.* **2286** (**1902**, 36)].

La proposition est également vraie de

$$1^{2\alpha+1} + 3^{2\alpha+1} + 5^{2\alpha+1} + \ldots + (2n-1)^{2\alpha+1}.$$

On peut même supposer $\alpha = 0$, car

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

et n^2 est la somme de 6 carrés $\neq 0$, sauf 1^2, 2^2 et 4^2 [*comp.* **2077** (**1901**, 109, 293)].

2° Tout nombre entier N, sauf 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11 et 18, est la somme de 1 bicarré, de 2 cubes et de 3 carrés $\neq 0$.

$$N = x^4 + y^3 + z^3 + u^2 + v^2 + w^2.$$

3° $(2a+1)^{2\alpha+1}$ est la somme de 2 triangles, de 2 carrés et de 2 pentagones.

4° Tout nombre entier N, sauf 1, 2, 3, 4, 5 et 7, est la somme de 3 triangles et de 3 carrés $\neq 0$.

5° Tout nombre entier N, sauf 1, 2, 3, 4, 5, 7 et 11, est la somme de 3 carrés et de 3 pentagones $\neq 0$.

6° Tout nombre entier N, sauf 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 13 et 18, est la somme de 3 carrés et de 3 hexagones $\neq 0$.

7° Tout nombre entier N, sauf 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 16, 19 et 28, est la somme de 3 carrés et de 3 décagones $\neq 0$.

8° En général, N est la somme de 3 carrés et de 3 nombres $(2m+1)$ gonaux, sauf pour certaines valeurs initiales de N, à déterminer, comme je l'ai fait, théorèmes IV et V.

9° De même, N est la somme de 3 carrés et de 3 nombres $(4m+2)$ gonaux, sauf pour certaines valeurs initiales de N, à déterminer, comme aux théorèmes VI et VII.

G. DE ROCQUIGNY.

Je désirerais surtout voir étudier le cas où, dans l'énoncé **2274**, $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sont ≥ 6. E. MAILLET.

2256. (**1902**, 3) (H. BROCARD). — *Podaire d'une épicycloïde* (**1902**, 111). — Autre réponse de M. Mathieu. LA RÉDACTION.

2348. (**1902**, 117) (*Artigensis*). — *Hexagramme de Pascal* (**1902**, 312; **1903**, 112, 241; **1904**, 32). — Aux réponses précédentes (**1903**, 241) on peut ajouter une Note de M. Gérard, reproduite dans *Mathesis*, 1900, p. 88. N. QUINT (La Haye).

2507. (**1903**, 11) (*E.-A. Majol*). — *Point de Lemoine* (**1903**, 174, 263). — Dans le Mémoire de M. d'Ocagne *Sur la détermination géométrique du point le plus probable* (*Journ. de l'Ec. Pol.*, 1893, p. 1), on trouve plusieurs solutions du problème visé par la question **2507**. Ces solutions reposent sur la notion du *barycentre symétrique* (barycentre des symétriques d'un point par rapport à un système de droites). Voici la plus simple de ces solutions (*loc. cit.*, p. 15):

O étant un point quelconque du plan du multilatère considéré, O′ son barycentre symétrique par rapport aux côtés de ce multilatère, O″ celui de O′, le point cherché est à la rencontre de la droite OO″ et de l'antiparallèle à cette droite menée par O′ relativement à l'angle OO′O″.

Si l'angle de ces deux droites est trop aigu (*loc. cit.*, p. 18), on

prend le symétrique O_1 de O par rapport à la perpendiculaire abaissée de O′ sur O O″. Le point cherché est alors déterminé sur OO″ par l'axe radical du cercle de centre O″ et de rayon O″O′, et du cercle décrit sur O_1 O″ comme diamètre. *Géodète.*

2535. (**1903**, 65) (H. LAURENT). — *Polynomes.* — Réponse de M. E.-B. Escott communiquée à M. Laurent. LA RÉDACTION.

2554. (**1903**, 72) (CARL STÖRMER). — *Méthode de Cauchy pour la solution des équations aux dérivées partielles* (**1903**, 318). — Le Mémoire de Cauchy se trouve dans *S. P.*, 1821, p. 101-112, 145-152.

La méthode de Cauchy est indiquée dans :

P. MANSION, *Theorie der partiellen Differentialgleichungen* (Berlin, 1892), p. 221; *voir* encore *C. R.*, t. LXXXI, 1875, p. 790;

GOURSAT et BOURLET, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (1891), p. 102;

E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre,* t. I et II (1896-1898).

On trouve des références bibliographiques dans ces livres et aussi dans :

E. PASCAL, *Repertorium der höheren Mathematik,* t. I, p. 198.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

2558. (**1903**, 97) (*Artigensis*). — (**1903**, 198, 222, 287; **1904**, 53). — *Voir* encore : *Eine stereometrische Ableitung des Stazes von der Schwerlinien des Dreiecks,* donnée par M. Keferstein dans *Zeitschr. für Math. und Naturw. Unterricht,* 1904, p. 406.

N. QUINT (La Haye).

2602. (**1903**, 152) (A. WEREBRUSOW). — *Formules donnant la solution de l'équation* $P^2 - Da^2 = A^3$ (**1903**, 290). — Dans la solution de M. Werebrusow, si nous posons $\alpha = -2x$, $\beta = -(x^2 + 3Dy^2)$, nous obtenons les formules bien connues dues à Euler et à Lagrange (*Additions à l'Algèbre d'Euler,* par Lagrange, Chap. IX) :

$$P = x^3 + 3Dxy^2, \qquad a = 3x^2y + Dy^3, \qquad A = x^2 - Dy^2.$$

Les formules de M. Werebrusow sont un peu plus générales; mais, puisque celles de Lagrange ne donnent pas toutes les solutions,

sauf quand toutes les formes quadratiques de déterminant D appartiennent à la même classe (vrai pour D = — 1, — 2, — 3, — 4 ou — 7), comme l'a indiqué le P. Pépin (*J. M.*, série III, t. I, 1875, p 317-372), il est probable que la même chose est vraie pour les premières formules. E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2646. (**1903**, 227) (P.-F. Teilhet). — *Solution de l'équation*

$$S^m = N,$$

S *étant la somme des chiffres de* N. — Par la méthode suivante on peut déterminer, grâce à un petit nombre d'essais, si cette relation est possible pour une valeur donnée de S. Soient

$$\begin{aligned} N &= p + qa + ra^2 + sa^3 + \ldots, \\ S &= p + q + r + s + \ldots, \end{aligned}$$

a étant la base du système

$$N \equiv S \quad [\bmod (a-1)],$$

d'où

$$S^m \equiv S \quad (\bmod\, a-1);$$

si δ est le plus grand commun diviseur de S et $a-1$,

$$S^{m-1} \equiv 1 \quad \left(\bmod \frac{a-1}{\delta}\right).$$

Soit k le plus petit nombre tel que

$$S^k \equiv 1 \quad \left(\bmod \frac{a-1}{\delta}\right);$$

$$m - 1 = kn \quad \text{ou} \quad m = kn + 1.$$

En essayant différents nombres m de cette forme, on obtient aisément des solutions.

Par exemple, soient

$$S = 22, \quad a = 10, \quad \delta = 1,$$

$$22^3 \equiv 1 \quad (\bmod 9), \quad m = 3n + 1.$$

Essayant $n = 1$, $m = 4$, on voit que l'équation est satisfaite.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2667. (**1903**, 257) (V. Aubry). — *Tables de facteurs des nombres* (**1903**, 328). — P. Barlow, *Tables of squares, cubes, etc.*, dans l'édition de 1814 seulement, a donné une Table des décompositions complètes des nombres jusqu'à 10000. (Ainsi, $4932 = 2^2.3^2.137$.) Cette Table n'existe pas dans les autres éditions du même Ouvrage.

Edward Hinklet, *Tables of the prime numbers and prime factors of the composite numbers, from* 1 *to* 100000 (Baltimore, 1853), donne la décomposition complète de tous les nombres impairs jusqu'à 20000 et des nombres pairs jusqu'à 12500.

Chernac, *Cribrum arithmeticum* (Daventriae, 1811), donne les facteurs simples jusqu'à 1020000.

Koehler, *Handbuch* (1848), tous les diviseurs jusqu'à 21524.

Houël, *Tables de logarithmes* (1871), les plus petits diviseurs jusqu'à 10841.

Vega, *Tabulæ* (1797), tous les diviseurs (sauf les nombres divisibles par 2, 3, 5) jusqu'à 102000.

Les Tables de J.-C. Burckhardt (1814-1817) vont de 1 à 3 millions, de J. Glaisher (1879-1883), de 4 à 6 millions.

B. Goldberg, *Primzahlen und Factoren-Tafeln de* 1 *à* 251647 (Leipzig, 1862), donne tous les facteurs des nombres impairs premiers à 3 ou 5.

Z. Dase et H. Rosenberg (1862-1865), de 7 à 9 millions, ne donnent que les plus petits facteurs.

Suivant Petzval (*S. A. W.*, t. LIII, 2e série, 1866, p. 460), des Tables, donnant les plus petits facteurs premiers des nombres jusqu'à 100000000, ont été calculées par J.-Ph. Kulik, mais le manuscrit est resté en possession de l'Académie de Vienne.

Voir encore *Report on mathematical Tables* (*R. B. A.*, Art. 8, 1873, p. 34) et l'article « Tables » dans l'*Encyclopedia britannica*.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

On trouve à ce sujet de nombreux renseignements bibliographiques dans J. Glaisher, *Factor Table for the fourth million* (London, Taylor and Francis, 1879), Introduction, en particulier, p. 17 et 36. E. Maillet.

Dans les Tables des logarithmes (à 6 décimales) et autres, de V. Varquez Queipo, dont plusieurs éditions (j'en ai vu la dix-hui-

tième; Madrid, 1875) ont été faites, il y a une Table XIII des plus petits diviseurs des nombres composés, inférieurs à 11323, et non divisibles par 2, 3, 5, 11. J. RIUS Y CASAS (Saragosse).

2694. (**1903**, 300) (*Artigensis*). — *Forme d'une goutte liquide.* — D'après le *Cours de Physique* de M. J. VIOLLE, t. I, p. 657-678 (Paris, G. Masson, 1884), la formation des gouttes à un orifice capillaire a été étudiée successivement par HAGEN (1846), TATE (1864), QUINCKE (1858-1870), DUPRÉ (1866) et DUCLAUX (1870).

Jusqu'à présent, le fait le plus saillant paraît avoir été énoncé par TATE. Il consiste en cette observation que le poids des gouttes d'un même liquide est proportionnel au diamètre du tube, et non au carré du diamètre. Il est diminué par l'élévation de température, et il est indépendant de la substance du tube, pourvu que celle-ci soit parfaitement mouillée par le liquide.

Pour la large goutte de mercure posée sur un plan de verre bien horizontal, *voir* les expériences et mesures de QUINCKE.

Un fait à retenir, c'est l'absolue instabilité de ce système.

Ne pas oublier les expériences de SAVART (1833) sur la discontinuité d'une veine liquide. La chronophotographie pourrait être appliquée avec succès à la formation des gouttelettes liquides et aider à obtenir des mesures préliminaires à l'établissement d'une théorie (*loc. cit.*, p. 718-730). Comparer aussi la réponse **2588** (**1903**, 270).

J'ignore s'il a été entrepris de plus récentes recherches sur ce sujet.

Des expériences analogues porteraient sur la constitution d'une large goutte d'eau déposée sur un marbre gras ou sur une plaque de paraffine. H. BROCARD.

2697 et **2698**. (**1903**, 302, 303) (A. BOUTIN). — *Sommation de quelques séries.* — Les séries en question rentrent comme cas spéciaux dans l'identité suivante

$$\frac{(1+z)^{\alpha+1}}{1-(\beta-1)z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha+\nu\beta}{\nu} v^{\nu},$$

où $v = z(1+z)^{-\beta}$, que j'ai démontrée pour un z suffisamment petit (*A. M.*, t. XXVI, p. 307-318), en donnant en même temps la condi-

tion de convergence pour le deuxième membre; savoir

$$|v| < \left|\frac{(\beta-1)^{\beta-1}}{\beta^{\beta}}\right|.$$

Dans la formule ci-dessus, z, α, β désignent des quantités complexes quelconques, et les puissances ont leurs valeurs principales.

En remplaçant v par x, et posant respectivement $\alpha = n-3$, $\beta = 3$ et $\alpha = n-4$, $\beta = 4$, on trouve les formules suivantes

$$\frac{(1+z)^{n-2}}{1-2z} = 1 + nx + \frac{(n+2)(n+3)}{1.2}x^2 + \frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

où $x = \dfrac{z}{(1+z)^3}$, et

$$\frac{(1+z)^{n-3}}{1-3z} = 1 + nx + \frac{(n+3)(n+4)}{1.2}x^2 + \frac{(n+6)(n+7)(n+8)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

où $x = \dfrac{z}{(1+z)^4}$, qui donnent les résultats demandés sous forme implicite. Les séries dans les deuxièmes membres seront respectivement convergentes pour $|x| < \dfrac{2^2}{3^3}$ et $|x| < \dfrac{3^3}{4^4}$, et il faut choisir une branche appropriée de la fonction algébrique z pour assurer la validité des formules.

Il n'y a aucune difficulté à donner les résultats sous forme explicite, à l'aide de la résolution algébrique des équations des troisième et quatrième degrés, ce qui pourtant n'est point avantageux.

J.-L.-W.-V. Jensen (Copenhague).

Autres réponses de MM. E. Malo et Sadier, communiquées à l'auteur de la question.

2702. (**1904**, 2) (E.-N. Barisien). — *Billard elliptique. Caustiques de l'ellipse et du cercle.* — Le rayon de lumière issu d'un point A et qui subit une seule réflexion sur l'ellipse est tangent à une courbe de la sixième classe : en effet, il vient six fois passer par un point donné B, puisque l'on peut, de six façons différentes, marquer sur l'ellipse un point M tel que les rayons $\overline{AM}$ et $\overline{MB}$ soient éga-

lement inclinés sur la tangente en M; ce résultat est lui-même une conséquence du fait que parmi les coniques d'un faisceau, ponctuel ou tangentiel, il y en a six qui touchent une conique donnée, puisque l'on peut considérer comme rentrant dans cette classification tout système de coniques confocales.

Les deux courbes de la sixième classe enveloppées, l'une par les rayons issus de A et réfléchis une seule fois par la conique, l'autre par les rayons issus d'un second point B et réfléchis également une seule fois par la conique, ont *trente-six* tangentes communes, parmi lesquelles aucune ne paraît indépendante de la position particulière des points A et B : il y aurait donc trente-six solutions du problème proposé; mais on se rend compte que la plupart ne peuvent être qu'imaginaires.

On voit, en outre, qu'après deux réflexions le rayon issu de A enveloppe une courbe de la trente-sixième classe, et que, d'une façon générale, chaque nouvelle réflexion multiplie par 6 le nombre exprimant la classe de l'enveloppe du rayon qui a déjà subi un nombre donné de réflexions.

Lorsque l'ellipse dégénère en un cercle, on a des résultats un peu moins compliqués. En effet, l'enveloppe d'un rayon issu d'un point fixe A et ayant subi une seule réflexion, ou première caustique du point A, est une courbe de la quatrième classe, du sixième ordre, du genre zéro, possédant quatre points doubles, six points de rebroussement et trois tangentes doubles : la droite de l'infini n'est pas tangente.

Il suit de là que les premières caustiques de deux points A et B admettent en commun *seize* tangentes; autrement dit, il y a seize rayons allant de A en B avec deux réflexions seulement sur le cercle, ou encore la seconde caustique d'un point A est une courbe de la seizième classe; d'une façon générale la $n^{\text{ième}}$ caustique est une courbe de la classe 2^{2n}. E. MALO.

Les points C et D demandés sont déterminés sur l'ellipse par une tangente commune aux deux caustiques de l'ellipse par réflexion par rapport aux points A et B. La question admet donc trente-six solutions.

Pour une courbe quelconque, d'ordre p et de classe q, avec n réflexions successives, il y a $(p+2q)^n$ solutions.

Si cette courbe passe par les points cycliques ou bien touche la

droite de l'infini, le nombre de solutions se réduit à

$$(p+2q-i-j-t)^n,$$

i et j étant l'ordre de multiplicité des points cycliques sur la courbe, et t le nombre de points de contact de la droite de l'infini.

Pour la parabole, on a donc 5^n solutions, et pour le cercle 4^n seulement.

P. HENDLÉ.

2705. (**1904**, 3) (A. TAFELMACHER). — La formule I est dans *Mathesis*, 1881, p. 202-203, et attribuée à Steiner.

H. BROCARD.

La première formule est très ancienne, et, si je ne me trompe, est due à M. Neuberg.

Elle est citée par M. Idsig (p. 26) dans ses *Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre*. Elle est encore démontrée à la page 14 de l'*Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* de M. de Longchamps.

Enfin l'ayant retrouvée, il y a plusieurs années, j'en ai écrit à M. de Longchamps, qui me communiqua tout ce que je vous écris là-dessus.

N. PLAKHOWO (Russie).

2706 et **2707**. (**1904**, 4) (T. LEMOYNE). — Dans l'énoncé **2707** il est dit que les milieux ω des cordes $M\omega M_1$ d'une cubique circulaire vues du point double O sous un angle droit MOM_1 sont sur une parallèle XOX' à l'asymptote ZZ' de la courbe.

Cette propriété traduit, pour ainsi dire, une des constructions de la strophoïde, car les cordes MM_1 passent par un point fixe F de la courbe, et alors on voit immédiatement que les points M, M_1 résultent du rabattement de $O\omega$ autour du point ω. C'est le théorème énoncé au n° **2706**.

Voir *N. A.*, 1874 et 1875; L. MALEYX, *Quelques théorèmes de Géométrie, suivis d'une étude géométrique des propriétés de la strophoïde*.

Les notations sont celles de l'article cité.

Ledit article paraît pouvoir être indiqué en réponse à la question **2706**.

H. BROCARD.

2710. (**1904**, 5) (T. LEMOYNE). — Le limaçon de Pascal, son cas particulier, la cardioïde, sa généralisation, qui fournit les con-

choïdes et les courbes que nous avons nommées *conchoïdales* [1], n'ont pas fait, à ma connaissance, l'objet d'un Mémoire spécial, ni d'une étude un peu étendue dans un Traité de Géométrie pure ou de Géométrie analytique.

Les Notes qui, réunies, pourraient former le travail auquel fait appel M. T. Lemoyne sont disséminées dans de très nombreux Ouvrages.

M. Brocard [2], dans ses *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, p. 50, 52, 195 (Bar-le-Duc, 1897) indique une bibliographie du limaçon de Pascal. « Cette bibliographie, dit-il, est aujourd'hui très étendue; signalons seulement quelques références. »

A ces références, nous ajouterons les suivantes :

1° Notre *Traité de Géométrie analytique*, § XXIV et § XXVI (Delagrave, éditeur; 1884).

2° Notre *Géométrie de la règle et de l'équerre*, § CXXIV (Delagrave, éditeur; 1890).

3° Une Note de Magnus, dans laquelle il donne une construction de la tangente à la cardioïde (*Cr.*, t. 9, 1832, p. 135).

4° Notre *Cours de problèmes de Géométrie analytique* (Delagrave, éditeur; 1898), où l'on trouvera de nombreux exercices conduisant au limaçon de Pascal (p. 22, 38, 71, 138, 145, 176, 177, 178, etc.). G. DE LONGCHAMPS.

2712. (**1904**, 5) et **2713.** (**1904**, 6) (V. WILLIOT). — *De la fonction* $\zeta(s)$. — La réponse à la question **2713** est donnée dans le Mémoire de Riemann bien connu, dont la méthode est complètement rigoureuse tant qu'il s'agit du domaine d'existence de $\zeta(s)$.

Quant à la formule que l'auteur attribue à M. Jensen, elle résulte, par une simple différentiation et spécialisation, d'une équation que j'avais établie dans mon Mémoire sur les séries malmsténiennes, publié dans le Ier Volume des *Mémoires de l'Académie de Prague*

---

(1) *Voir* : 1° *N. C.*, 1879, p. 145 et 403; 2° notre *Supplément de Géométrie analytique*, p. 105 (Delagrave, 1885); 3° *J. S.*, 1880, 1882 et 1884.

(2) A la page 53 de l'Ouvrage cité, M. Brocard dit :

« La bibliographie des conchoïdes de la droite et du cercle est extrêmement étendue; ces courbes se rencontrent dans une multitude de questions géométriques, pour lesquelles on consultera avec fruit les divers journaux mathématiques. »

(1891). Cette formule est

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-w(z-\alpha i)}(z-\alpha i)^{s-1}\,dz}{1-e^{2x\pi i-z+\alpha i}} = (2\pi)^s e^{-\frac{s\pi i}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nw\pi i-2wx\pi i}}{(n-x)^{1-s}} \\ {[0<w<1,\ 0<x<1,\ 0<\alpha<2\pi(1-x);\ \text{p. r.}(s)<0],} \end{array} \right.$$

et on peut la vérifier en observant que le premier membre est indépendant de α et en passant à la limite pour $\alpha = 0$, de sorte qu'une formule établie par Lipschitz donne le résultat annoncé; mais on y parvient aussi en employant le théorème de Cauchy concernant les intégrales prises entre des limites imaginaires.

Dans la formule (1) je multiplie les deux membres par i^{s-1} et j'observe que $i^{s-1}(z-\alpha i)^{s-1} = (\alpha + iz)^{s-1}$, puis je prends les dérivées relatives à x, et je passe à la limite pour $w = 0$ et pour $x = 0$; il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha+iz)^{s-1}e^{-z+i\alpha}}{(1-e^{i\alpha-z})^2}\,dz = -(2\pi)^{s-1}(1-s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-s}};$$

posant $s = 2-a$, $z = 2y\pi$, $\alpha = \pi$, il s'ensuit

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}+iy\right)^{1-a} dy}{(e^{y\pi}+e^{-y\pi})^2} = (a-1)\zeta(a).$$

M. Lerch (Fribourg).

2714. (**1904**, 7) (V. Williot). — *Fonction* Γ. — Si s est réel et positif, il y a un procédé élémentaire pour établir les résultats. J'écris $1-\xi$ au lieu de x, et j'observe que la fonction

$$f(t) = \frac{(1-\xi)^t}{t^s}$$

est décroissante. En faisant usage d'un lemme de Cauchy (qu'on trouve établi par exemple dans mon Mémoire paru au *Journal* de M. Jordan, 1903), il vient :

$$\sum_{n=N}^{\infty} f(n) = \int_N^{\infty} f(t)\,dt + \mathfrak{I} f(N) \qquad (0 < \mathfrak{I} < 1).$$

Multiplions par ξ^{1-s} et transformons l'intégrale en faisant

$$t = \frac{y}{\log \frac{1}{1-\xi}};$$

il s'ensuit

$$(1)\quad \begin{cases} \xi^{1-s} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(1-\xi)^n}{n^s} \\ = \left(\frac{1}{\xi} \log \frac{1}{1-\xi}\right)^{s-1} \int_{N \log \frac{1}{1-\xi}}^{\infty} e^{-y} \frac{dy}{y^s} + \frac{\vartheta \xi (1-\xi)^N}{(N\xi)^s}. \end{cases}$$

Prenant pour N une fonction de ξ telle que la limite de $N\xi$ soit une quantité $\omega > 0$, le second terme disparaît pour ξ infiniment petit et il vient

$$\lim_{\xi=0} \xi^{1-s} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(1-\xi)^n}{n^s} = \int_{\omega}^{\infty} e^{-y} y^{-s}\, dy \qquad \left[\lim_{\xi=0} (N\xi) = \omega\right].$$

La convergence de la limite

$$\lim_{\xi=0} \xi^{1-s} \sum_{n=1}^{N} \frac{(1-\xi)^n}{n^s} = \int_{0}^{\omega} e^{-y} \frac{dy}{y^s} \qquad (\lim N\xi = \omega)$$

exige qu'on ait $s < 1$.

Quant à la littérature du sujet, la limite

$$\lim_{z=1} (1-z)^s \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} z^n = \Gamma(s)$$

a été considérée par MM. Alex. Berger (*N. Acta Ups.*, 3[e] série, t. XIV), Emile Picard (*Traité d'An.*, t. I, p. 208) et Ernest Cesàro (*R. A. N.*, 1893).

J'ai généralisé la question en cherchant les coefficients du développement

$$\sum_{n=0}^{\infty} (w+n)^{s-1} z^{w+n} = \frac{\Gamma(s)}{\left(\log \frac{1}{z}\right)^s} + a_0 + a_1 \log z + a_2 (\log z)^2 + \ldots.$$

On a

$$a_p = \frac{2\,\Gamma(s+p)}{p!\,(2\pi)^{s+p}} \sum_1^{\infty} \frac{\cos\left(2n w\pi - \frac{s+p}{2}\pi\right)}{n^{s+p}};$$

on suppose $0 < w \leqq 1$, les séries a_p devant être remplacées par leur prolongement analytique en fonction de s, si elles sont divergentes; quant aux valeurs critiques $s = 0, -1, -2, \ldots$, on devrait effectuer un passage à la limite.

Ces résultats se trouvent établis dans un Mémoire publié par l'*Académie de Prague* (III[e] année, n° 28, 1894).

M. Lerch (Fribourg).

2719. (**1904**, 9) (*Canon*). — *Tangentes à deux circonférences.* — Soient Ω, R et ω, r les centres et les rayons des deux cercles; D, d les distances de Ω et ω au centre O d'inversion; les droites ΩO, ωO formant en O un angle θ. Soient enfin $P^2 = D^2 - R^2$ et $p^2 = d^2 - r^2$ les puissances de O par rapport aux deux cercles, k^2 le coefficient d'inversion.

On trouve facilement que le rapport des longueurs des tangentes extérieure et intérieure est égal à

$$\frac{P^2 + p^2 - 2Dd\cos\theta + 2Rr}{P^2 + p^2 - 2Dd\cos\theta - 2Rr}.$$

Or, par rapport aux deux cercles transformés, nous aurons

$$R' = \frac{k^2}{P^2}R, \qquad r' = \frac{k^2}{p^2}r,$$
$$D' = \frac{k^2}{P^2}D, \qquad d' = \frac{k^2}{p^2}d,$$
$$\theta' = \theta,$$

ce qui montre que le nouveau rapport a ses deux membres égaux à ceux du premier multipliés par $\frac{k^4}{P^2 p^2}$, et par conséquent est égal au premier.

P. Hendlé.

Le rapport considéré dans l'énoncé étant égal au produit par $\sqrt{-1}$ de la tangente trigonométrique de la moitié de l'angle sous lequel les cercles se coupent, la propriété à démontrer rentre dans celle de la conservation des angles qui est fondamentale dans la transformation par inversion.

E. Malo.

2721. (**1904**, 9) (P. Renard). — *Voir*, outre le Traité classique de Salmon, l'*Algèbre supérieure* de Carnoy (Louvain-Paris) et le Tome I des *Leçons sur la Géométrie* par Clebsch (édition franç. Paris, Gauthier-Villars), Chapitre III : Introduction à la théorie des formes algébriques.

On trouvera une bibliographie assez complète dans le Rapport *Sur les progrès de la Théorie des invariants projectifs* de W.-Fr. Meyer, traduit en français par H. Fehr (Paris, 1897); *voir* aussi l'article du même auteur dans l'*Encyclopédie* Meyer-Burkhardt. H. Fehr (Genève).

Note pour l'Espagne :

R. Rubini (trad. par E. Marquez Villaroel), *Teoria de las formas en general y principalmente de las binarias*. (Œuvre écrite en italien, expressément pour être traduite et éditée en espagnol.) Sevilla, 1885.

Z.-G. de Galdeano, *Tratado de Algebra con arreglo á las teorias modernas*. Parte segunda : *Tratado superior*. Toledo, 1886.

L. Octavio de Toledo, *Elementos de la teoria de las formas*. León, 1889.

M. Marzal, *Resumen de las lecciones de Análisis matemático* (segundo curso) *explicadas en la Universidad de Barcelona*. Sección tercera : *Teoria de las « formas » algébricas*. Barcelona, 1899. (Lithographiée.)

L. Clariana, *Conceptos fundamentales de Análisis matemático*. Barcelona, 1903. J. Rius y Casas (Saragosse).

Je crois que l'Ouvrage que voici répond exactement à la pensée de l'auteur de la question :

A. Capelli, *Lezioni sulla teoria delle forme algebriche*, 1902 (voir *B. D.*, oct. 1902).

Pour les éléments, on devra consulter :

A. Capelli, *Istituzioni di Analisi algebrica*, 1902.

H. Brocard.

Je recommande à M. Renard l'Ouvrage de P.-G. Lejeune-Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausgegeben von R. Dedekind. Braunschweig, Vieweg und Sohn. Ce Traité s'étend assez sur les formes quadratiques. Tafelmacher (Santiago, Chili).

QUESTIONS.

2769. [Σ] ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE MADRID.

Prix proposé pour 1905. — Étude complète d'une classe spéciale d'intégrales singulières d'équations différentielles où les valeurs des dérivées restent indéterminées, mais où il y a certaines relations entre les valeurs simultanées des variables principales.

Exemple de pareille intégrale pour $F(x, y, y') = 0$: courbe enveloppe des courbes définies par cette équation.

Mémoires en castillan ou en latin à envoyer au Secrétariat avant le 31 décembre 1905.

Pour plus de détails, consulter *R. T. M.*, 1904, p. 43.

(D'après l'espagnol.) LA RÉDACTION.

2770. [**V9, 10**] Existe-t-il un traité des courbes gauches algébriques, un traité des surfaces algébriques (pour le degré $\geqq 3$) en dehors de la *Géométrie* de Salmon?

E. MAILLET.

2771. [**V9, 10**] Où ont paru les solutions du problème :

Construire un triangle connaissant trois bissectrices, intérieures ou extérieures ?

N. QUINT (La Haye).

2772. [**K1c**] Je désirerais connaître une solution, assez élémentaire, du problème suivant, mentionné dans l'*Inter-*

médiaire, **1902**, p. 299 [réponse à la question **1782** (**1900**, 82)] :

Étant donnés un angle XAY *et un point* P *à l'intérieur, on mène par ce point une droite* XPY *limitée aux côtés de l'angle et l'on abaisse la perpendiculaire* AQ *à cette droite; la position pour laquelle* XPY *est minimum est telle que l'on a* PX = QY. *Jipé.*

2773. [**V9, 10**] N'y a-t-il pas un éditeur qui veuille donner une nouvelle édition des *Propriétés de quelques points remarquables du triangle rectiligne et de plusieurs lignes et figures qu'ils déterminent*, de FEUERBACH? Le Livre semble très rare. N. QUINT (La Haye).

2774. [**I9c**] Déterminer dans quels cas la somme des $2n$ premiers nombres premiers

$$1 + 2 + 3 + 5 + 7 + \ldots + p$$

est un nombre premier? G. DE ROCQUIGNY.

2775. [**I19c**] Peut-on attribuer à x, y et n des valeurs positives entières vérifiant l'équation

$$(x^{n-1} - 2^{n-1}y^{n+1})^2 - (2xy + 1)^2 = 0 \, ?$$

PAULMIER.

2776. [**K10e**] La proposition suivante est-elle connue?

Désignons par K le premier point de Brocard d'un triangle ABC; par M, N et P les points d'intersection des droites AK, BK, CK avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Le point K de Brocard du triangle ABC est le point de Lemoine du triangle formé par les droites AP, BM et CN.

ÉMILE WEBER (Liége).

2777. [**L¹16b**] (S) I. Si par un point pris à l'intérieur d'un triangle on mène des parallèles aux trois côtés, les points d'intersection de ces parallèles avec ces côtés se

trouvent sur une même conique. On peut déduire le cercle de Lemoine comme cas particulier de cette proposition.

II. Les droites joignant les sommets d'un triangle à deux points situés à l'intérieur de ce triangle coupent les côtés en six points situés sur une même conique. On peut tirer de là le cercle d'Euler comme cas particulier.

Ces propositions ont-elles déjà été énoncées?

ÉMILE WEBER (Liége).

2778. [V7] On raconte que Descartes, apercevant une affiche sur laquelle était proposé un problème par un inconnu, se fit traduire cette affiche par son voisin, le mathématicien Beckman, et résolut le problème; sait-on quel était ce problème? *Carevyge.*

2779. [I2] Le mathématicien Berthevin, inventeur du calcul par compléments arithmétiques [voir *I. M.*, question **541** (**1895**, 149, 311) et question **2418** (**1902**, 228)], a laissé des manuscrits, non encore publiés à ma connaissance, où il a étudié et résolu les deux problèmes suivants :

Quels sont les nombres x qui donnent d et r pour restes de leur division :

1° *Par m et $m+1$?*

2° *Par m et $m+2$?*

Son étude, datée du 31 mai 1789, se termine ainsi :

« Il faudroit trouver le rapport des deux solutions entre elles, assigner ensuite des moyens de résoudre tous les problèmes de cette espèce, mais mes travaux n'ont encore pu m'indiquer ni la route que j'avois à suivre, ni les moyens de rapprocher ces formules disparates et de les mettre sous une même formule. »

Ce problème général a-t-il été résolu depuis?

En d'autres termes, connaît-on la solution du problème suivant :

Quels sont les nombres x qui donnent r_a, r_b, r_c, ..., r_l pour restes de leur division par a, b, c, ..., l?

H. Brocard.

2780. [I1] L'extension des quatre règles arithmétiques à un système de numération à base quelconque paraît n'avoir aucune utilité; je demanderai cependant s'il existe quelques formules ou règles simples pour la numération binaire.

Renseignements bibliographiques. H. Brocard.

2781. [O6k] L'Académie des Sciences ayant mis au concours la question suivante :

Étude des surfaces qui peuvent s'appliquer les unes sur les autres sans déchirure ni duplicature,

le prix fut décerné en 1861 au Mémoire intitulé : *Théorie de la déformation des surfaces,* et dû à Edmond Bour.

Dans le mémorable *Rapport* de M. Chasles *sur les progrès de la Géométrie* (Paris, 1870), on trouve à ce sujet les renseignements suivants (p. 325-326) :

« L'auteur ne s'est, en effet, proposé rien moins que l'intégration complète des équations du problème dans le cas où la surface donnée est de révolution.

» Malheureusement l'auteur, en imprimant dans le *Journal de l'École Polytechnique* (XXXIXe Cahier, 1862) le Mémoire couronné, a supprimé cette dernière partie, désirant l'étendre et l'éclaircir dans un Mémoire spécial.

» La mort prématurée de Bour aura privé la Science de ce précieux travail qui ne s'est pas retrouvé dans ses papiers. »

Même témoignage de la part de J. Bertrand dans le *Rapport sur les progrès de l'Analyse mathématique,* publié en 1867.

Quelque géomètre a-t-il comblé cette lacune, comme il est permis de le croire en présence des progrès réalisés dans la Géométrie des surfaces? H. BROCARD.

2782. **[L¹ 16b]** (S) Le centre de la conique passant par les pieds des médianes et des symédianes, le centre du cercle d'Euler et le centre du cercle de Lemoine d'un triangle sont trois points collinéaires.

Cette proposition est-elle connue?

ÉMILE WEBER (Liége).

2783. **[K 11 c]** On sait que si la distance d des centres de deux cercles de rayons R et r est $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$, il existe une infinité de triangles inscrits dans l'un et circonscrits à l'autre.

On désire connaître celui de ces triangles qui a la plus grande aire. E.-N. BARISIEN.

2784. **[A 1 cα]** Soit le Tableau triangulaire suivant :

1	″	″	″	″	″	″	″
1	1	″	″	″	″	″	″
1	1	1	″	″	″	″	″
1	2	2	2	″	″	″	″
2	5	8	6	6	″	″	″
5	16	28	40	24	24	″	″
16	61	136	180	240	120	120	″
61	272	662	1232	1320	1680	720	720
272	1385	″	″	″	″	″	″
1385	″	″	″	″	″	″	″
....	″	″	″	″	″	″	″

dans lequel les nombres sont liés à ceux des colonnes adjacentes dans la ligne précédente par les relations

$$a_p^q = (q-2)a_{p-1}^{q-1} + q\,a_{p-1}^{q+1},$$
$$a_p^q = (q-1)a_{p-1}^{q-1} + q\,a_{p-1}^{q+1};$$

la première correspond au cas où p et q sont de même parité; la deuxième au cas où p et q sont de parité différente;

a_p^q désigne l'élément du Tableau situé dans la $p^{\text{ième}}$ ligne et la $q^{\text{ième}}$ colonne.

Trouver l'expression de a_p^q à l'aide des nombres a_p^1 et a_p^2 seulement.

E. ESTANAVE.

2785. [**H1c**] Pour quelle forme de la fonction $\varphi(x)$ l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = [\varphi(x)]^2$$

est-elle résoluble par quadratures?

T. HAYASHI (Tokyo, Japon).
[D'après l'anglais. (LA RÉD.)]

2786. [**K11e**] Inscrire dans un cercle un triangle dont les côtés touchent trois cercles donnés.

T. HAYASHI (Tokyo, Japon).
[D'après l'anglais. (LA RÉD.)]

2787. [**K4**] (S) Dans un triangle donné ABC inscrire un triangle $A_1B_1C_1$ semblable à un autre triangle $A'B'C'$, de telle façon que les points A_1, B_1, C_1 qui correspondent aux points A', B', C' se trouvent sur les côtés a, b, c et que l'aire du triangle $A_1B_1C_1$ soit minimum.

Je possède une solution de ce problème qui se fonde sur des considérations spéciales, mais je voudrais bien en connaître une autre.

A. TAFELMACHER (Santiago).

2788. [**B12d**] D'après Jacobi, une fonction analytique uniforme d'une variable ne peut admettre plus de deux périodes distinctes.

Que sait-on des fonctions périodiques de quaternions?

En particulier, connaît-on des fonctions analytiques uniformes d'un quaternion admettant trois périodes distinctes?

V. AUBRY.

RÉPONSES.

2663. (**1903**, 255) (G. DE LONGCHAMPS). — *Nombre* π (**1903**, 325; **1904**, 62). — L'auteur inconnu que vise M. Williot (**1904**, 62) est Kochansky qui a donné en 1685 dans les *Acta eruditorum*, p. 394, cette construction sous la forme

$$\pi = \sqrt{13 + \frac{1}{3} - 2\sqrt{3}}.$$

N. QUINT (La Haye).

On a

$$\pi^2 = 9,8696044.$$

Or

$$9,8696 = \overline{1,30}^2 + \overline{2,86}^2 = \overline{2,14}^2 + \overline{2,30}^2 = \overline{0,10}^2 + \overline{3,14}^2.$$

D'ailleurs

$$\sqrt{9,8696} = 3,1415919531\ldots.$$
$$\pi = 3,1415926535\ldots.$$

Donc l'hypoténuse des triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont en millimètres, soit 130 et 286 (208 ± 78), soit 214 et 230 (222 ± 8), soit 10 et 314 (162 ± 152) représente, en prenant le décimètre comme unité, π avec une erreur absolue comprise entre $\frac{8}{10^7}$ et $\frac{7}{10^7}$, mais très sensiblement égale à cette dernière fraction. L'approximation bien supérieure à toutes celles déjà indiquées est presque aussi grande que dans la fraction d'Adrien Métius. Les côtés à retenir sont spécialement simples, surtout pour le dernier triangle (162 ± 152) et plus encore pour l'avant-dernier (222 ± 8).

La méthode très élémentaire qui a conduit à ce résultat et à celui signalé dans notre nouvelle réponse à la question **2391** ($\sqrt[3]{2}$) est facile à généraliser.

P.-F. TEILHET.

2665. (**1903**, 256) et **2666.** (**1903**, 257) (V. Aubry). — *Décomposition de* 2^n+1 *et* 2^n-1 (**1903**, 328). — Réponse en anglais de M. E.-B. Escott, communiquée après traduction à l'auteur de la question. M. Escott renvoie au Mémoire d'Édouard Lucas, *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* (*A. J. M.*, t. I, 1878), et aux questions **594** (**1895**, 202; **1903**, 249) et **1173** (**1897**, 265).

La Rédaction.

2674. (**1903**, 274) (E.-B. Escott). — *Identité des n premiers termes des deux polynomes*

$$x(x+2)^{n_2}(x+4)^{n_4}(x+6)^{n_6}\ldots,$$
$$(x+1)^{n_1}(x+3)^{n_3}(x+5)^{n_5}\ldots.$$

— *Réponse partielle.* — Je crois préférable d'exprimer par n_α, plutôt que par p_α, les coefficients du développement de $(a+b)^n$. En outre, le dernier des exposants doit être (comme l'indiquent les points) n_n dans l'un, n_{n-1} dans l'autre des deux produits indiqués. Ainsi, leur degré unique est

$$1+n_2+n_4+n_6+\ldots=n_1+n_3+n_5+\ldots=2^{n-1}.$$

On peut écrire respectivement les deux produits

$$\sum 2^\alpha.4^\beta.6^\gamma\ldots(n_2)_\alpha(n_4)_\beta(n_6)_\gamma\ldots x^{2^{n-1}-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)},$$
$$\sum 1^\alpha.3^\beta.5^\gamma\ldots(n_1)_\alpha(n_3)_\beta(n_5)_\gamma\ldots x^{2^{n-1}-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)};$$

et l'on en trouvera les coefficients des n premiers termes en faisant les sommes partielles des coefficients obtenus de toutes les manières possibles par les relations

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad (n-1),$$

successivement.

On trouve ainsi, pour le deuxième terme, les coefficients

$$\begin{aligned}&2n_2+4n_4+6n_6+\ldots\\ &\quad=n(n-1)_1+n(n-1)_3+n(n-1)_5+\ldots=n.2^{n-2},\\ &n_1+3n_3+5n_5+\ldots\\ &\quad=n+n(n-1)_2+n(n-1)_4+n(n-1)_6+\ldots=n.2^{n-2};\end{aligned}$$

pourvu que $n>1$.

De même, si $n > 2$, les coefficients du troisième terme sont

$$2^2(n_2)_2 + 4^2(n_4)_2 + 6^2(n_6)_2 + \ldots + 2.4 n_2 n_4 + 2.6 n_2 n_6 + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}[(2n_2 + 4n_4 + 6n_6 + \ldots)^2 - (2^2 n_2 + 4^2 n_4 + 6^2 n_6 + \ldots)]$$
$$= \frac{1}{2}\{(n.2^{n-2})^2 - [2n(n-1)_1 + 4n(n-1)_3 + 6n(n-1)_5 + \ldots]\}$$
$$= n^2.2^{2n-5} - \frac{n}{2}\{[(n-1)_1 + 3(n-1)_3 + 5(n-1)_5 + \ldots] + [(n-1)_1 + (n-1)_3 + (n-1)_5 + \ldots]\}$$
$$= n^2.2^{2n-5} - \frac{n}{2}[(n-1).2^{n-3} + 2^{n-2}]$$
$$= n^2.2^{2n-5} - (n+1)_2.2^{n-3},$$

d'une part, et pareillement, de l'autre,

$$1^2(n_1)_2 + 3^2(n_3)_2 + 5^2(n_5)_2 + \ldots + 1.3 n_1 n_3 + 1.5 n_1 n_5 + \ldots = n^2.2^{2n-5} - (n+1)_2.2^{n-3}.$$

J. Rius y Casas (Saragosse).

2679. (**1903**, 276) (H. Brocard). — Les recherches que M. le Dr K. Petr, professeur à l'Université de Prague, a bien voulu faire aux Archives de la Classe de Mathématiques, n'ont point confirmé la tradition rapportée dans l'anecdote. A supposer le fait véritable, il est certain que les circonstances d'âge et de date ne sauraient correspondre à aucun des professeurs nommés à cette époque à l'Université de Prague. Si, comme il est encore possible, il s'agit simplement d'un vieil instituteur nommé à un autre emploi mieux rétribué, la vérification deviendra très difficile; mais le personnage aura aussi beaucoup perdu de son intérêt. H. Brocard.

2689. (**1903**, 298) (A. Grévy; E. Maillet). — *Typographie des Ouvrages scientifiques russes.* — A la date du 26 octobre 1899, j'ai adressé au Secrétariat de l'*A. F. A. S.* dix questions destinées à l'*Intermédiaire scientifique* en cours de publication depuis 1896.

Parmi ces questions, la suivante se rapportait au même objet que celle qui vient d'être posée ici sous le n° **2689** :

« *Typographie russe.* — Persuadé que l'emploi du type romain pour l'impression des Ouvrages scientifiques allemands a contribué à leur diffusion, je désirerais savoir s'il a été question ou si l'on a

essayé d'employer le même type pour l'impression d'Ouvrages en langue russe. A défaut de lettres romaines, pourrait-on employer l'alphabet grec, dont le russe possède déjà plusieurs lettres?

» H. BROCARD. »

Par malheur, l'*Intermédiaire de l'A. F. A. S.* fut obligé de cesser sa publication au mois de décembre suivant et la proposition dut être retirée et ajournée. Je la vois avec plaisir reparaître aujourd'hui sous une forme presque identique.

La question mérite, semble-t-il, d'être portée devant le prochain Congrès de Heidelberg, et il est permis d'espérer qu'elle y rencontrera les meilleures dispositions auprès des mathématiciens russes.

Je ne puis dire si des tentatives ont été faites déjà dans ce sens, mais il est à retenir que la typographie russe a adopté exclusivement le romain et le grec pour la composition des formules mathématiques, de sorte qu'il n'y a pas d'objection irréductible à l'adoption, dans un avenir sans doute prochain, du type romain, mélangé de grec s'il le faut, pour l'impression d'un texte en langue russe. Cette petite réforme est probablement très près d'aboutir et il est bien certain qu'elle aurait la plus heureuse conséquence pour la diffusion de la langue russe, à en juger d'après ce qui se passe pour la langue allemande depuis qu'on la trouve imprimée en romain.

Rien n'empêcherait, d'ailleurs, d'avoir quelques lettres spéciales pour les consonnes dont la prononciation n'a pas d'équivalent immédiat ou précis, comme cela a lieu déjà pour les langues tchèque, scandinave et polonaise. Donc, encore une fois, il semble parfaitement raisonnable d'espérer une prompte solution, pour peu que les savants russes veuillent bien y prêter leur influence.

H. BROCARD.

Je profite de l'occasion pour m'associer de tout cœur au vœu formulé sous le n° 2689 : depuis longtemps j'étudie la langue russe et je puis affirmer que l'usage de l'alphabet slave constitue une difficulté qui se renouvelle chaque jour.

J. GILLET (Nivelles, Brabant).

Extrait d'une lettre de M. Plakhowo :

« L'emploi des caractères latins pour écrire trois mots de russe, comme cela a lieu à la page 67 du Tome X de la 8e série de *Mathesis*

« Pafnouty Zvovitch Tchebychef », prête à mille critiques.... On doit bien prendre garde de prononcer les deux **y** de la même manière.... En russe, il y a deux **a**; le premier est prononcé comme **a** et le second se prononce **ja** (ou **ia**). Nous avons quatre **e**, qui tous se distinguent, quoique très insensiblement, par la prononciation **e**, **ё**, **Ѣ**, **Э**; trois **i**. Nous avons en russe beaucoup de mots étrangers : c'est vers la fin du XVIII[e] siècle qu'on les a introduits....

» PLAKHOWO (Russie). »

D'après diverses Lettres que M. Grévy ou moi avons reçues, on peut se demander si la portée de la question 2689 n'a pas été exagérée ou mal comprise.

Actuellement, les caractères typographiques russes existent, en nombre limité N (de même pour les caractères de l'écriture). Pour les traduire en caractères latins, il suffira, avec ces derniers, les accents graves, aigus, etc., et les diphtongues, de former N caractères que l'on fera correspondre aux N caractères russes : la solution est possible, et même d'un très grand nombre de manières. Avec l'aide des caractères grecs, suivant l'idée de M. Brocard, ou de certains caractères gothiques, ou en conservant certains caractères russes, le nombre des solutions augmente, et l'on peut sans doute en obtenir de plus parfaites. A ce point de vue, ce serait peut-être aux philologues et aux grammairiens à préciser.

Il est inutile de songer à vouloir que les nouveaux caractères donnent, de suite, *pour d'autres que les Russes,* la prononciation exacte.

Aux mêmes caractères latins, aux mêmes syllabes, correspond fréquemment une prononciation différente pour l'Allemand, l'Anglais, l'Espagnol, le Français, l'Italien, etc.; et même le français est prononcé un peu différemment par le Belge, le Parisien, le Bordelais, l'Auvergnat et le Marseillais, l'allemand par le Berlinois et le Souabe. Nous demandons un procédé pour permettre aux non-Russes, non de prononcer le russe, mais de le lire, sans qu'il fasse l'effet d'hiéroglyphes. Je lis l'anglais et je le traduis, ce qui me sert beaucoup; j'en ignore la prononciation dont je n'ai rien à faire jusqu'ici. La traduction du hongrois ou magyar me paraît rapidement abordable, parce qu'il est imprimé en caractères latins.

Je crois que l'on peut trouver dans les *voyelles latines* presque autant de caractères distincts qu'en russe, en affectant chacune des

accents graves, aigus, circonflexes, du tréma, du point comme sur l'i, au besoin des esprits doux et rudes comme en grec, de l'accent circonflexe espagnol. E. MAILLET.

2692. (**1903**, 300) (E.-B. ESCOTT). — Posons

$$(1)\quad \begin{cases} A_0 \log x + A_1 \log(x+1) \\ \qquad + A_2 \log(x+2) + \ldots + A_n \log(x+n) = f(x), \end{cases}$$

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont les coefficients de $(x-1)^n$.

Prenons la dérivée des deux membres par rapport à x,

$$(2)\qquad \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \ldots + \frac{A_n}{x+n} = \frac{f'(x)}{\log e};$$

mais on a

$$\frac{1}{x+p} = \frac{1}{x} - \frac{p}{x^2} + \frac{p^2}{x^3} - \frac{p^4}{x^4} + \ldots.$$

L'équation (2) peut, par suite, s'écrire

$$\frac{1}{x}\Sigma_0^n A - \frac{1}{x^2}\Sigma_1^n pA + \frac{1}{x^3}\Sigma_1^n p^2 A - \ldots \\ + (-1)^{m+1}\frac{1}{x^m}\Sigma_1^n p^{m-1} - \ldots = \frac{f'(x)}{\log e}.$$

Les n premiers Σ sont nuls; il reste donc

$$(-1)^{n+2}\frac{1}{x^{n+1}}\Sigma_1^n p^n A + (-1)^{n+3}\frac{1}{x^{n+2}}\Sigma_1^n p^{n+1} A + \ldots = \frac{f'(x)}{\log e}.$$

En intégrant, il vient

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{nx^n}\Sigma_1^n p^n A \\ + (-1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)x^{n+1}}\Sigma_1^n p^{n+1} A + \ldots = \frac{f(x)}{\log e} + C$$

ou, en remplaçant $f(x)$ et les A par leurs valeurs,

$$\log x - n\log(x+1) + \frac{n(n-1)}{1.2}\log(x+2) - \ldots + (-1)^n \log(x+n) \\ = C' + \log e\,(-1)^{n+1}\left(\frac{\Sigma_1^n p^n A}{nx^n} - \frac{\Sigma_1^n p^{n+1} A}{(n+1)x^{n+1}} + \ldots\right)$$

avec

$$\Sigma_1^n p^{n+\mu} \mathrm{A} = -n + \frac{n(n-1)}{1.2} 2^{n+\mu} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 3^{n+\mu} + \ldots + (-1)^n n^{n+\mu};$$

C′ est nul, car, pour x croissant au delà de toute limite, le premier membre tend vers o.

$\Sigma_1^n p^n \mathrm{A}$ est égal en valeur absolue à $1.2.3\ldots n$.

H.-B. Mathieu.

L'expression

$$y = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \mathrm{C}_n^r \log(x + n - r)$$

peut se mettre sous la forme

$$y = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \mathrm{C}_n^r \log\left(1 + \frac{n-r}{x}\right),$$

puisque

$$\sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \mathrm{C}_n^r = 0.$$

Si donc x est supérieur à n, en valeur absolue, on aura

$$y = \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{(-1)^{h-1}}{h} \frac{\mathrm{A}_h}{x^h},$$

en faisant, pour abréger,

$$(1) \qquad \mathrm{A}_h = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \mathrm{C}_n^r (n-r)^h.$$

Or de l'identité

$$(e^x - 1)^n = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \mathrm{C}_n^r e^{(n-r)x}$$

résulte évidemment

$$(2) \qquad (e^x - 1)^n = \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{\mathrm{A}_h}{1.2\ldots h} x^h,$$

de sorte que les coefficients A_h, dont l'indice est $< n$, sont tous nuls. On a donc simplement

$$y = \sum_{h=n}^{h=\infty} \frac{(-1)^{h-1}}{h} \frac{A_h}{x^h},$$

où les coefficients A_h sont déterminés par l'une des équations (1) ou (2). En particulier,

$$A_n = 1.2\ldots n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r (n-r)^n.$$

J. Franel.

A la place de l'expression indiquée par M. Escott, je considérerai la suivante, qui est un peu plus générale, savoir :

$$y = \log(x+z) - \frac{n}{1}\log(x+z-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}\log(x+z-2) - \ldots.$$

Si l'on effectue le développement suivant les puissances descendantes de x, il viendra

$$y = N\log x + N_1 x^{-1} - \frac{1}{2}N_2 x^{-2} + \frac{1}{3}N_3 x^{-3} - \ldots$$
$$= N\log x + \sum \frac{(-1)^{m-1}}{m} N_m x^{-m},$$

en posant

$$N_m = z^m - \frac{n}{1}(z-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(z-2)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(z-3)^m + \ldots.$$

Or, il est clair que l'on a

$$N = 0$$

et il est facile d'établir que l'on a également

$$N_m = 0,$$

quel que soit z, tant que l'entier m est inférieur à l'entier n. Si l'on suppose au contraire $m \geqq n$, N_m est un polynome entier en z de degré $m - n$, dont les coefficients peuvent être indiqués sous forme explicite; mais, comme leur expression est compliquée, je me bor-

nerai aux quatre premiers

$$N_n = n!,$$
$$N_{n+1} = (n+1)!\left(z - \frac{n}{2}\right),$$
$$N_{n+2} = (n+2)!\left(\frac{z^2}{2} - \frac{n}{2}z + \frac{n(3n+1)}{24}\right),$$
$$N_{n+3} = (n+3)!\left(\frac{z^3}{6} - \frac{n}{4}z^2 + \frac{n(3n+1)}{24}z - \frac{n^2(n+1)}{48}\right).$$

Dans l'hypothèse particulière $z = n$, on trouvera l'expression cherchée.

Il y a lieu de remarquer que, tandis que les variables x et z entrent exactement de la même manière dans l'expression de y prise comme point de départ, elles figurent d'une façon entièrement dissemblable dans celle à laquelle on aboutit : de là des conséquences qui ne seraient pas sans intérêt, mais qu'il serait trop long de développer ici.

La question **2692** est dans une étroite connexion avec la question **1466** du même auteur et la présente réponse se rapporte aux mêmes considérations que la réponse que j'y ai faite alors (**1900**, 22).

E. MALO.

Voir aussi la question **565** (**1895**, 165) résolue **1896**, 26, 229, etc.

LA RÉDACTION.

On sait que

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$$

toutes les fois que $-1 < z < +1$.

La formule donnée ne contenant que des puissances négatives, pour y arriver, posons $z = \frac{1}{y}$; il vient, en remplaçant,

$$\log\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \ldots,$$

applicable pour $-y < 1 < +y$, ou

(1) $$\log(y+1) = \log y + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \ldots,$$

avec $-y < 1 < +y$.

Posons $y = \frac{x}{a}$; en substituant et tenant compte de la relation

$$\log(a + x) = \log a + \log\left(1 + \frac{x}{a}\right),$$

nous aurons

$$(2) \qquad \log(a + x) = \log x + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \ldots,$$

avec $-x < a < x$.

En appliquant cette formule à chaque terme de l'expression proposée, on obtient

$$\log(x + n) = \log x + \frac{1}{x} n - \frac{1}{2x^2} n^2 + \frac{1}{3x^3} n^3 - \ldots,$$

$$-n \log(x + n - 1)$$
$$= -n\left(\log x + \frac{1}{x}(n-1) - \frac{1}{2x^2}(n-1)^2 + \frac{1}{3x^3}(n-1)^3 - \ldots\right),$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\log(x + n - 2)$$
$$= \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\log x + \frac{1}{x}(n-2) - \frac{1}{2x^2}(n-2)^2 + \frac{1}{3x^3}(n-3)^3 - \ldots\right),$$

....,

$$\pm \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.2\ldots n}\log(x + n - n)$$
$$= \pm \frac{n\ldots(n-n+1)}{1.2\ldots n}\left(\log x + \frac{1}{x}(n-n) - \frac{1}{2x^2}(n-n)^2 + \frac{1}{3x^3}(n-n)^3 + \ldots\right).$$

L'addition donne dans le premier membre l'expression proposée.

Dans le second le terme, où $(-1)^k \frac{1}{kx^k}$ est en facteur, a un coefficient que je désigne par Σ_n^k pour la simplicité de l'écriture :

$$n^k - n(n-1)^k + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^k - \ldots \pm 1^k n \mp 0^k = \Sigma_n^k.$$

En particulier, le premier terme, où $\log x$ est en facteur, donne

$$(3) \qquad \Sigma_n^0 = (1-1)^n = 0 \qquad (n > 0);$$

d'autre part,

$$\Sigma_n^k = n^{k-1}n - \frac{n}{1}(n-1)^{k-1}(n-1)$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{k-1}(n-2) + \ldots$$
$$\pm \frac{n\ldots(n-n+1)}{1.2\ldots n}(n-n)^{k-1}(n-n),$$

(4) $$\Sigma_n^k = n(\Sigma_n^{k-1} + \Sigma_{n-1}^{k-1}).$$

Pour $n < k$, on tire de là

(5) $$\Sigma_n^k = n^k\Sigma_n^0 + A\Sigma_{n-1}^0 + B\Sigma_{n-2}^0 + \ldots + 1.2\ldots n\Sigma_{n-k}^0 = 0,$$

nulle en vertu de (3); *donc, tous les termes de degré $k < n$ disparaîtront.*

Si $n = k$, d'après (4),

(6) $$\Sigma_n^n = n(\Sigma_n^{n-1} + \Sigma_{n-1}^{n-1}) = n\Sigma_{n-1}^{n-1}$$

d'après (5), d'où

(7) $$\Sigma_n^n = 1.2\ldots n.$$

Le premier terme du développement sera

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{nx^n}1.2\ldots n = P_n\frac{(-1)^{n+1}}{nx^n}.$$

Les suivants se calculeront par la formule (4), qui les donnera de même en fonction de n. Ils contiendront tous en facteur P_n.

En particulier

$$\Sigma_n^{n+1} = P_n\frac{(-1)^{n+2}}{\overline{n+1}\,x^{n+1}}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$
$$= P_n\frac{(-1)^{n+2}}{\overline{n+1}\,x^{n+1}}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

donc, enfin, l'expression proposée

$$E = (-1)^{n+1}1.2\ldots n\left(\frac{1}{n.x^n} - \frac{n(2n+1)}{6x^{n+1}} + \ldots\right).$$

MESNAGER.

2707. (**1904**, 4) (T. LEMOYNE). — (**1904**, 107). — Soient C_3 une cubique unicursale, δ son point double. Les côtés d'un angle droit

mobile autour du sommet δ déterminent sur C_3 des couples d'une involution I. Soient $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ deux de ces couples, et prenons deux points arbitraires c', c'' sur C_3; les coniques déterminées par les points

$$(\delta c' c'' a_1 a_2) \equiv A \qquad \text{et} \qquad (\delta c' c'' b_1 b_2) \equiv B$$

se coupent en un quatrième point d. Une conique variable X du faisceau

$$(A, B) \equiv (c' c'' \delta d)$$

coupe la cubique en deux points variables x_1, x_2 qui constituent une involution dont deux couples sont $a_1 a_2$ et $b_1 b_2$; elle coïncide, par conséquent, avec l'involution I, ce qui démontre le théorème.

Si la cubique est circulaire, on prend pour c', c'' les deux points circulaires à l'infini; les coniques X deviennent des cercles d'un faisceau, et les cordes $x_1 x_2$ en sont des diamètres; leurs milieux sont donc sur une droite L rectangulaire sur la cordale. Lorsque x_1 se déplace à l'infini, le cercle X devient la droite à l'infini combinée avec la cordale δd; son conjugué x_2 se trouve donc sur δd, et le milieu de $x_1 x_2$ se trouvant à l'infini, il faut que L contienne x_1, c'est-à-dire soit parallèle à l'asymptote de C_3. *Lambda.*

2716. (1904, 8) (E. Maillet). — Soit le $n^{\text{ième}}$ zéro d'une fonction entière égal à

$$\left[n . l n . l_2 n \ldots l_\mu^\theta(n) e^{n\alpha i}\right]^{\frac{1}{\rho}};$$

θ réel et différent de 1 et α quantité réelle incommensurable avec π. On peut prendre pour facteur primaire $\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$, en ayant soin de prendre tous les facteurs primaires correspondant aux racines situées dans un cercle de rayon r ayant pour centre l'origine (*voir* ma Note dans les *C. R.* du 1er février 1904). On a pour $|x|$ compris entre $|a_n|$ et $|a_{n+1}|$

$$f(x) = \prod\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) = \frac{(-1)^n x^n}{a_1 a_2 \ldots a_n} e^{\mathrm{H}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{G}(x)},$$

$$\mathrm{H}\left(\frac{1}{x}\right) = -\mathrm{S}_1 \frac{1}{x} - \mathrm{S}_2 \frac{1}{2x^2} - \ldots - \mathrm{S}_k \frac{1}{k x^k} - \ldots,$$

$$\mathrm{G}(x) = -s_1 x - s_2 \frac{x^2}{2} - \ldots - s_k \frac{x^k}{k} - \ldots,$$

$\mathrm{S}_k \frac{1}{x^k}$ et $s_k x^k$ restent finis lorsque n tend vers l'infini, et $|f(x)|$ est

du même ordre, quel que soit l'argument de x, que $\left|\frac{(x)^n}{a_1\ldots a_n}\right|$, c'est-à-dire que n. Ici

$$S_k = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k,$$
$$s_k = \text{lim de } S_{-k} \quad \text{pour} \quad n \text{ infini},$$
$$s_k = a_{n+1}^{-k} + a_{n+2}^{-k} + \ldots.$$

26 février 1904. A. PELLET.

Sur notre demande, M. PELLET a bien voulu nous adresser les explications complémentaires suivantes :

« En disant que le $n^{\text{ième}}$ zéro est égal à

$$\left[n.ln.l_2 n\ldots l_\mu^\theta(n) e^{n\alpha i}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

α étant incommensurable avec π, j'ai entendu par là que le rapport $\frac{\alpha}{\pi}$ était incommensurable; on pourrait remplacer $e^{n\alpha i}$ par $e^{n\alpha\pi i}$, et dire alors α incommensurable. Je m'appuie sur le théorème suivant :

$$a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots + a_n q^n = s_n,$$
$$a_0 + (a_1 - a_0) q + \ldots + (a_n - a_{n-1}) q^n - a_n q^{n+1} = s_n (1 - q),$$
$$|s_n|\,|1 - q| < |a_0| + |a_n - a_0| + |a_n|,$$

si les quantités positives $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont croissantes (*ou décroissantes*) *avec n, $|q| = 1$, mais $q \neq 1$.*

» Je me propose de publier un Mémoire sur la théorie des fonctions holomorphes auquel je donnerai pour titre : *Les équations majorantes;* mais tous les éléments en sont déjà publiés dans le *Bulletin de la Société mathématique*. Voir *Notes sur la méthode d'approximation de Newton* (1901); *Théorie infinitésimale des équations* (1895).

» J'entends par *fonction canonique* le produit des n premiers facteurs primaires. » A. PELLET.

2719. (**1904**, 9) (*Canon*). — (**1904**, 111). — Le rapport des tangentes, extérieure et intérieure, à deux cercles peut s'exprimer à l'aide de l'angle sous lequel se coupent les deux cercles. Cet angle ne variant pas par l'inversion, il en est de même du rapport des tangentes. A. PELLET.

2720. (**1904**, 9) (N. Plakhowo). — *Décomposition d'un nombre en somme d'entiers consécutifs.* — Soit N le nombre donné. Supposons qu'il soit la somme des nombres

$$y+1, \quad y+2, \quad \ldots, \quad x.$$

Nous aurons l'équation du problème

$$x(x+1)-y(y+1)=2\mathrm{N}$$

ou

$$(x-y)(x+y+1)=2\mathrm{N}$$

qui donnera la solution complète. Elle nous conduit à décomposer $2\mathrm{N}$ en deux facteurs de parité différente, de toutes les manières possibles.

Soit $\mathrm{N}=2^\rho.\mathrm{N}'$, N' impair; et soient $d_1, d_2, \ldots, d_n$ les diviseurs en nombre n de N', rangés par ordre de grandeur croissante.

Considérons les deux suites

$$\begin{array}{cccc} 2^{\rho+1}d_1, & 2^{\rho+1}d_2, & \ldots, & 2^{\rho+1}d_n, \\ d'_1, & d'_2, & \ldots, & d'_n, \end{array}$$

$$d_1 d'_1 = d_2 d'_2 = \ldots = d_n d'_n = \mathrm{N}'.$$

Prenons deux termes correspondants de ces deux suites : $2^{\rho+1}d_i$ et d'_i. Si nous égalons le plus grand à $x+y+1$ et l'autre à $x-y$, nous aurons une solution du problème. Et, réciproquement, toute solution du problème peut être obtenue de cette manière. Le nombre de ces solutions est donc n. Q. E. D.

Remarque :

$$x+y+1=2^{\rho+1}\mathrm{N}'=2\mathrm{N}, \qquad x-y=1,$$

que l'on obtient une fois pour tout nombre N, est une solution impropre : car elle donne une somme composée d'un seul terme. En la rejetant, il reste $n-1$ solutions proprement dites.

Lorsque $\mathrm{N}=2^\rho$ ($\mathrm{N}'=1$), il n'y a pas d'autre solution que cette solution impropre.

Conclusion. — n étant le nombre des diviseurs impairs de N (c'est-à-dire celui des diviseurs de N'), le nombre des solutions est $n-1$.

J. Sadier.

Autres réponses analogues de MM. Hendlé, Jolivald, M. Lerch, Malo, H.-B. Mathieu, P.-F. Teilhet, Werebrusow.

La proposition peut être énoncée ainsi :

Tout nombre parallélogramme est égal à autant de nombres de forme triangulaire ou de forme trapèze que ce nombre a de facteurs impairs supérieurs à 1, y compris le nombre lui-même.

La démonstration peut être fondée sur les égalités suivantes à constater ou à démontrer :

$$
\begin{aligned}
(2n+1)1 &= n+(n+1),\\
(2n+1)a &= (n-a+1)+\ldots+(n+a) \qquad (a<n),\\
(2n+1)n &= \text{triangulaire de } n,\\
(2n+1)(n+1) &= \text{triangulaire de } (n+1),
\end{aligned}
$$

et quand $a>n$.

Si l'on a

$$(2n+1)a = a+(a+1)+\ldots+(a+n),$$

on aura

$$(2n+1)(a+1) = (a+1)+\ldots+(a+n)+(a+n+1).$$

De plus le produit de deux impairs aura deux formes différentes et symétriques

$$
\begin{aligned}
(2m+1)(2n+1) &= (2m+1-n)+\ldots+(2m+1+n),\\
&= (2n+1-m)+\ldots+(2n+1+m).
\end{aligned}
$$

La proposition offre l'avantage de pouvoir être démontrée verbalement, sans secours de chiffres, et au moyen de jetons.

C. Berdellé.

2723. (1904, 10) (P.-F. Teilhet). — *Voir* Serret (*Algèbre supérieure,* t. II) : Comparaison des fonctions entières irréductibles (mod p), qui appartiennent à des exposants formés des mêmes facteurs premiers. A. Pellet.

Autre réponse de M. Jolivald.

2729. (1904, 37) (H. Kœchlin). — Les sommes dont l'évaluation est demandée se ramènent aisément à la forme

$$S_p^n = \sum_{x=p+1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}\left(1-\frac{1^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{2^2}{x^2}\right)\cdots\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right).$$

La quantité à sommer étant nulle pour $x = 1, 2, 3, \ldots, p$, la sommation peut aussi bien partir d'une quelconque de ces valeurs et la forme ci-dessus fournit des démonstrations faciles de la formule récurrente et du développement symbolique donnés par l'auteur de cette intéressante question.

Pour les petites valeurs de p, on peut utiliser les valeurs de

$$S_0^n = \zeta(2n)$$

données avec 32 décimales, de $n = 1$ à $n = 35$, par Stieltjes (*Acta mathematica,* t. X, 1887); on peut aussi ne faire partir la sommation que de $x = (p+1)$, ce qui ne change pas les formules de développement, et employer la formule d'Euler.

Mais la véritable difficulté est de trouver les valeurs de S_p^1 dont toutes les autres se déduisent par récurrence, p étant assez grand, puisque les premières valeurs de S_p^1 sont faciles à calculer comme ci-dessus.

Il semble que la solution pratique, pour le calcul de S_p^1,

$$S_p^1 = \sum_{x=p+1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{2^2}{x^2}\right)\cdots\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right) = \sum_{x=p+1}^{\infty} f(x)$$

consisterait à appliquer à cette sommation la formule d'Euler :

$$\sum_{x=p+1}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2}f(p+1) + \int_{p+1}^{\infty} f(x)\,dx - \frac{B_1}{2!}f'(p+1) + \frac{B_2}{4!}f'''(p+1) - \ldots,$$

où l'intégrale définie peut, en remplaçant x par $\frac{1}{y}$, prendre la forme

$$\int_0^{\frac{1}{p+1}} dy(1-y^2)(1-2^2y^2)\ldots(1-p^2y^2) = \int_0^{\frac{1}{p+1}} \varphi(y)\,dy$$

et s'évaluer par les formules de quadrature, en calculant $\varphi(y$ pour $y = 0$,

$$\frac{1}{p(p+1)}\;\frac{2}{p(p+1)}\cdots\frac{p}{p(p+1)}$$

ou pour un nombre moindre de données suivant convenance. Comme $\varphi(y)$ diminue de 1 à 0 environ, l'ordre de grandeur de S_p^1 est celui de $\frac{1}{p}$.

V. WILLIOT.

2733. (**1904**, 41) (A. Miola). — *Trisection de l'angle.* — Cette question fait double emploi avec celle qui a été donnée sous le n° **2168**. J'y ai répondu ici même (**1901**, 304). Depuis lors le Dr Ernst Wölffing de Stuttgard a publié une bibliographie du sujet dans son *Mathematicher Bücherschatz*, Volume qui forme le Tome XVI des *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, p. 225-228 (Leipzig, Teubner, 1903). Malgré son étendue, cette bibliographie est encore très incomplète, parce que l'auteur ne mentionne que les Ouvrages parus au xixe siècle et qu'il exclut systématiquement de son catalogue tous les articles de Revues.

H. Braid.

Il sera bien difficile d'avoir une bibliographie complète sur la trisection de l'angle.

M. Wölffing, dans son *Mathematischer Bücherschatz* (Leipzig, 1903), donne (p. 225) une liste de 140 Mémoires environ qui ont paru à part dans le xixe siècle et cette liste ne contient pas les articles insérés dans les Recueils périodiques, qui ne cessent d'accroître la bibliographie. Sans doute le Livre que M. S.-J. Carrara (*La trisezione dell' angolo*) a annoncé contiendra des renseignements utiles, mais on trouve toujours des nouveautés sur ce chapitre. Je signale à M. Miola un article que M. Reichart vient de publier dans *Naturwissenschaftliche Wochenschrift*, n° 25, 1904.

N. Quint (La Haye).

Voici quelques contributions à la bibliographie demandée par M. Miola. Ce sont des Ouvrages ou brochures presque inconnus et que je n'ai pas encore vus cités :

C. Comiers, *La duplication du cube, la trisection de l'angle et l'inscription de l'heptagone régulier dans le cercle.* In-4° de 26 pages (4 planches). Paris, 1677.

N. Coppola (né à Palerme), *Resolucion geometrica de la triseccion del angulo nuevam explicada, etc.* In-4° de 31 pages (avec des planches). Madrid, 1691.

Id., *Defensa matematica de las proposiciones resueltas de la triseccion del angulo y de dos problemas... contro las falsas y extravagantes operaciones di D. Juan Herrera y Sotomayor.* In-4° de 56 pages (avec des planches). Madrid, 1692.

Id., *Respuestas contra los prereceres y juyzios hechos de sus*

problemas y particularmente contra las mal fondadas censuras de D. Sebastiano Fernandez de Medrano. In-4° de 14 pages. Madrid, 1692.

Id., *La certitumbre de la resueltas operaciones de la triseccion del angulo y formacion del heptagono por la linea conmensuratriz del quadrante....* In-4° de 31 pages (avec planches). Madrid, 1692.

P.-M. Doria, *Opere matematiche.... Varie esercitazioni geometriche, la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo, etc.* (nel 2° dei due volumi). In-4° (avec 13 planches). Venise, 1722-1726

Id., *Raccolta delle opere matematiche.* 2 vol. in-4° avec planches. Venise, 1738. (Contient une méthode très intéressante de trisection de l'angle.)

A. Piovano, *Demonstrationes Geometricæ in trisectionem anguli plani, quadraturam circuli, duplicationem cubi....* In-8° de 250 pages avec figures. Rome, 1728.

D. Teixera, *Dilucidazioni matematiche e filosofiche dove si trova la trisezione dell'angolo rettilineo, duplicazione del cubo e la soluzione di problemi creduti impossibili colla Geometria elementare....* 3 vol. avec 19 planches. Venise, 1794.

Auteur inconnu, *Trisectio anguli et cubi duplicatio.* In-4° (avec 2 planches). Rome, 1792.

Parmi les Ouvrages mathématiques du XVIIe siècle, il en est un bien connu et digne de remarque :

Viviani, *Enodatio problematum universis geometris propositorum a Cl. Comiers... praemissis horum occasione, tentamentis variis ad solutionem illustris veterum problematis de anguli trisectione.* In-4° de 64 pages (avec 4 planches). Florence, 1677.

C. Alasia (Tempio, Sardaigne).

Voir encore les réponses à **2168** (**1901**, 221, 304; **1904**, *Supp.*, mai).

La Rédaction.

2737. (**1904**, 42) (E.-B. Escott). — *Inventaire de la géométrie du triangle.* — Je signale à M. Escott les *Principes de la nouvelle géométrie du triangle* par Poulain (Paris, 1892).

N. Quint (La Haye).

QUESTIONS.

2789. [**V 9**] Dans sa dissertation de 1815, Möbius (*Werke*, t. IV, p. 388) a soutenu les deux thèses suivantes :

I. *False definitur axioma, quod sit enunciatio, quam simul ac perceperis, etiam pro vera agnoscere debeas.*

II. *Definitionum divisio in verbales et reales omni caret sensu.*

Ces thèses sont à la base de la Logique mathématique. Trouve-t-on dans les manuscrits inédits de Möbius le développement de ces thèses, ou d'autres études sur la Logique mathématique? Méritent-elles d'être publiées?

G. Vacca (Gênes).

2790. [**I2b**] A-t-il été fait des études sur les caractères de divisibilité d'un nombre par un autre écrit dans le système binaire, tel que 10, 11, 110, 111, 101, etc.?

En particulier, à quelles conditions un nombre m de ce système divise-t-il un nombre M formé de p groupes m écrits les uns à la suite des autres?

Résultats de divers essais numériques.

Y a-t-il des analogies à en tirer avec le système décimal?

Renseignements bibliographiques. H. Brocard.

2791. [**P**] Quelles relations peuvent exister entre les deux êtres géométriques suivants :

1° La courbe $f(x, y) = 0$;

2° La surface dont l'équation serait obtenue en éliminant t

entre les deux équations qui résultent de la substitution

$$\begin{cases} x = X + (t - Z)\sqrt{-1}, \\ y = Y + t\sqrt{-1}, \end{cases}$$

dans $f(x, y) = 0$. V. Aubry.

2792. [**H3c**] 1° Résoudre l'équation différentielle

$$2\mu\left(\frac{p_0}{p_0 - 2\mu\frac{d^2x}{dt^2}}\right)^{\frac{1}{1,4}} as\frac{d^3x}{dt^3} - 5,6\,A\,\mu p_0\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$+ 5,6\,A\,\mu^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - 2,8\,\mu s\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + 1,4\,sp_0\frac{dx}{dt} = 0$$

avec les conditions

$$t = 0, \quad x = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = V, \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_0 = 0$$

ou bien : trouver un développement valable quand $\frac{x}{a}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 et permettant un calcul approché.

2° *Cas particulier :*

$$p_0 = 10^6, \quad \mu = 25000, \quad A = 0,0625, \quad s = 100, \quad a = 60.$$

Je voudrais aussi, dans ce cas particulier, la fonction

$$p = p_0 - 2\mu\frac{d^2x}{dt^2}$$

pour les valeurs de x voisines de a : par exemple x variant de 55 à 60; sachant que pour $t = 0$, $p = p_0$:

$$\frac{1}{2}\mu\left[V^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = \int_0^t p\,dx.$$

V. Aubry.

2793. [**B12**] Les quantités réelles A peuvent se représenter sur une droite (axe).

Les quantités imaginaires $B \equiv a + bi$ se représentent naturellement dans le plan.

Enfin, des imaginaires $C \equiv \alpha + \beta\sqrt{-1}$ proviennent de calculs effectués sur les quantités réelles A.

Les règles de calcul pour les B et les C sont les mêmes et l'on a pu regarder ces quantités comme identiques.

Peut-on citer un problème sur des quantités A, dont la résolution algébrique donne, sous certaines conditions, des quantités C; et tel que, en appliquant à ces solutions C la représentation ordinaire des B, on ait bien la solution géométrique dans le plan d'un problème dont le proposé n'est qu'un cas particulier?

Peut-on citer un problème du plan qui conduise, sous certaines conditions, à une solution dans l'espace, d'un problème dont le proposé n'est qu'un cas particulier?

En supposant la question précédente résolue par l'affirmative, pourquoi ne trouve-t-on pas, pour l'espace, les solutions trop générales sous l'aspect de quaternions comme on a trouvé les solutions trop générales pour la ligne droite, sous la forme $a + b\sqrt{-1}$? Serait-ce que nos méthodes de calcul sont trop restreintes? ou que les quaternions sont dissimulés sous des formes qui nous les font considérer comme des imaginaires? V. Aubry.

2794. [V5b] On sait qu'Adalbold d'Utrecht adressa vers 999 au pape Gerbert une Lettre *de ratione inveniendi crassitudinem sphaerae* (1). L'auteur y soumet à Gerbert sa méthode pour évaluer le volume de la sphère en fonction du diamètre : elle consiste à prendre les $\frac{11}{21}$ du cube de ce diamètre. Comme ses contemporains, Adalbold fait $\pi = \frac{22}{7}$: sa méthode revient donc à l'emploi de la formule $V = \frac{1}{6}\pi D^3$.

Pour arriver au but il affirme et *démontre* comme suit, en

(1) *Voir* Pez, *Thesaurus Anecdotum*, t. III; Migne, *Cursus Patrologiae*, t. CXL; Gerbert, édition Olleris, p. 471. *Voir* aussi Cantor, *Vorlesungen*, 2e édition, t. I, p. 814.

quelques mots, que le volume de la sphère représente les deux tiers du volume du cylindre circonscrit :

Ex hac enim forma (le cylindre) *non medietatem, ne in modum trochi ex utraque parte acueretur, sed tertiam partem... tollere debemus ut sphaeram undique expoliamus* (1).

Il semble peu probable qu'un homme comme Adalbold, *vir sui temporis summus* (2), écrivant à son maître Gerbert, *Gerberto summo et pontifici et philosopho,* n'ait pas eu par devers lui une preuve, passable à ses yeux, de l'assertion qu'il émettait; d'autant plus que cette assertion forme la partie principale d'une découverte présentée comme *personnelle : Quare mihi ita esse videatur... non erit onerosum dicere.*

D'autre part cette preuve ne devait pas coïncider avec la méthode classique d'Archimède : on ne peut reconnaître cette dernière dans les mots *ne in modum trochi....* D'ailleurs, bien qu'il fasse usage de la valeur $\pi = \frac{22}{7}$, Adalbold *connaissait-il* le théorème d'Archimède relatif au rapport entre le cylindre et la sphère inscrite? Cela paraît très incertain. Gerbert, qui fut son maître, parle bien dans sa Géométrie de l'évaluation de la surface sphérique : *sphaerae aream colligere,* mais non de l'évaluation du volume. Il est assez naturel de juger ici des connaissances de l'élève par celles du maître.

Cela étant, la question suivante se pose d'elle-même à propos du texte ci-dessus :

Quel est le raisonnement qui se cache sous le motif *vague et agéométrique* (Montucla) mis en avant par Adalbold?

A.-P. Ericsson.

---

(1) Sur le sens exact de *trochus, voir* S. Jérome, *De Arte gymnastica*. lib. III, cap. 8.

(2) Waitz, *Monumenta Germaniæ,* Hist. Script., IV, p. 679.

2795. [V5a] On trouve dans Virgile un certain nombre de passages qui renferment, au point de vue mathématique, les absurdités les plus évidentes. Les corrections sont très simples et très faciles. Il est donc naturel de supposer que l'on se trouve en présence d'erreurs introduites par les copistes. Cela a-t-il été signalé et étudié?

Pour fixer les idées, je poserai la question pour deux de ces fautes seulement.

L'une est au Livre IV des *Géorgiques;* elle doit être très ancienne, car elle existait déjà à l'époque de Columelle :

Bis gravides cogunt fetus, duo tempora messis,
Taygete simul os terris ostendit honestum
Plias, et Oceani spretos pede reppulit amnis,
Aut eadem sidus fugiens ubi Piscis aquosi
Tristior hibernas cælo descendit in undas.

Les Pléiades ne peuvent pas fuir devant les Poissons; elles les suivent au contraire, puisqu'elles sont à l'ouest de cette constellation; d'ailleurs le coucher des Pléiades nous reporte en novembre; c'est beaucoup trop tard pour la récolte du miel. Il est clair que Virgile veut parler du coucher des Poissons, qui a lieu en octobre, et la correction se présente ainsi :

Aut tandem sidus fugiens...
Tristius hibernas....

L'autre faute est dans la huitième églogue :

Sparge, marite, nuces; tibi deserit Hesperus Œtam.

L'étoile du soir ne peut pas s'éloigner d'une montagne; elle ne peut que s'en rapprocher. De plus, celui qui parle est sur le mont Ménale, en Arcadie; il voit à l'*est* la Thessalie où se trouve le mont Œta. La correction est facile; c'est :

Tangit tibi Vesper Olympum.

Le mont Olympe d'Elide est en effet à l'ouest du mont Ménale.

Au reste, il y a un autre passage de la huitième églogue qui prouve qu'on se trouve en présence d'un texte altéré; c'est :

Certent et cycnis ululæ.

Il n'y a rien de plus stupide que de faire du cygne un oiseau chanteur; d'ailleurs le cygne ne parle que le jour, et l'on ne peut pas le comparer à un oiseau de nuit.

Mais tout le passage est imité de Théocrite, et ici la correction est infaillible; c'est :

Certent lusciniis ululæ;

elle est donnée par Théocrite, qui dit :

κὴξ ὀρθῶν τοὶ σκῶπες ἀηδόσι γαρύσαιντο

Le rossignol est, en effet, parmi les oiseaux qui ont une voix mélodique, le seul qui se fasse entendre la nuit.

Dr PROMPT.

2796. [**V10**] Y a-t-il, dans quelque Université ou École supérieure, des Cours spéciaux (analogues par exemple à la Géométrographie en Géométrie) pour le calcul numérique au point de vue de ses applications pratiques?

A-t-on publié des Ouvrages dans cette direction?

J. JONESCO.

2797. [**V10**] Y a-t-il des Traités de Géométrie élémentaire, de Géométrie descriptive ou de Statique graphique avec des figures ou des épures sur lesquelles on puisse reconnaître aisément les données et les résultats, et suivre les constructions faites et leur ordre sans lire le texte?

Quelles méthodes a-t-on employées pour atteindre ce but?

J. JONESCO.

RÉPONSES.

1117. (**1897**, 173) (Cyp. Stephanos). — *Convergence d'une série* (**1904**, 79). — La série

$$a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-1)}{1.2} + \ldots + a_\mu \frac{x(x-1)\ldots(x-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}$$

est convergente pour toute valeur de x, et représente une fonction entière, si k, étant la plus grande des limites de $\sqrt[\mu]{|a_\mu|}$, on a $k < 1$. Pour $k > 1$, la série est toujours divergente, sauf pour $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Si $k = 1$, on considère la plus grande des limites de

$$\frac{\log|a_\mu|}{\log \mu}.$$

Si cette limite est k', la série est uniformément et absolument convergente pour toutes les valeurs de x dont la partie réelle est plus grande que k'.

Quant à la condition pour qu'une fonction donnée $f(x)$ soit développable en série de cette forme, je ne crois pas qu'elle ait encore été donnée. J'ai lieu de penser que la condition nécessaire et suffisante est que l'on puisse écrire

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \varphi(t) t^x \, dt,$$

où c est le cercle de centre $t = 1$ et de rayon 1, et $\varphi(t)$ une fonction régulière hors de ce cercle et n'ayant, sur la circonférence, que des points réguliers ou des points singuliers d'*ordre fini* au sens de M. Hadamard. *Ursus.*

1296. (**1898**, 125) (*Riboud*). — *Bibliographie des moulins à vent* (**1898**, 262; **1902**, 73). — *Voir :* Bibliothèque nationale, anc. suppl. fr. ms. 12344 : « Art de construire les moulins ». Traduction de

l'Ouvrage de L.-C. Stürm, *Vollständige Mühlen Baukunst* (Augsburg, 1718; in-fol.).

Bibliothèque Mazarine, ms. 3675 : « Application der Mechanik auf eine Art einer volländischen Wind Mühle welche anno 1752 zu Zchälitz bey grossen Hayn des daligen Müllers Sohn, so in seinem V^{ten} Jahre Stockblind worden im 19^{en} Jahre erbauet hat. — Aufgenommen und berechnet von J.-L. H. » XVIII[e] siècle. 17 pages, 2 pl. coloriées. H. Brocard.

1337. (**1898**, 194) (G. Wallenberg). — *Constante d'Euler ou de Mascheroni.* — La question de savoir si la constante d'Euler ou de Mascheroni est un nombre transcendant a sollicité l'attention de Ch. Hermite (Borel, *Annuaire des Mathématiciens*, 1902), mais, d'après les observations de M. Hilbert *Sur les problèmes mathématiques* (Congrès de Paris, 1900, traduct. Laugel), on ne peut compter qu'elle soit prochainement élucidée. Ce problème est inabordable, faute de méthode pour l'attaquer.

Nous n'en avons pas moins la conviction intime, ajoute M. Hilbert, que l'on doit pouvoir le résoudre au moyen d'un nombre fini de déductions logiques. H. Brocard.

1347. (**1899**, 149) (J. Franel) [*voir* aussi **1260** (**1898**, 77)]. — Posant $nx = m + \xi$ (m entier, $0 < \xi < 1$), on trouve

$$\sum_1^n [\nu x] = \sum_1^n \left[\frac{m\nu}{n}\right] = \varpi,$$

ϖ désignant le nombre des cas où le reste ρ_ν de $m\nu$, suivant le module n, surpasse la quantité $n - \nu\xi$. Dans le cas où m est premier avec n, le second membre est

$$\frac{m(n+1)}{2} - \frac{n-1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{n+1}{2}\xi - \frac{n-1}{2},$$

et l'on pourra écrire

$$\sum_{\nu=1}^n [\nu x] = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{n}{2} + \mathrm{R}, \qquad \mathrm{R} = \varpi + \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}\xi.$$

Si n est le dénominateur d'une réduite dans le développement en

fraction continue de x, on aura

$$n\xi < 1, \qquad \varpi = 0,$$

et ensuite m sera premier avec n. La quantité R sera alors positive et plus petite que $\frac{1}{2}$.

Pour étudier le théorème de M. Franel dans d'autres cas, je me sers de l'écriture $B(z) = z - \frac{1}{2} - [z]$, et j'observe que la quantité R changée de signe devient

$$S_n(x) = \sum_1^n B(\nu x);$$

cette fonction admet la période 1 et l'on peut supposer $0 < x < 1$.

J'emploie ensuite la relation suivante, qui revient à un théorème élémentaire bien connu,

$$S_n(x) + S_m\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\delta}{2} - \frac{\delta(1-\delta)}{2x} \qquad \big(\delta = nx - m;\ m = [nx]\big),$$

en me servant de l'algorithme d'Euclide. De cette manière, on vérifie aisément que la quantité $S_n(x)$ est de l'ordre de $\log n$, si les quotients incomplets a_ν dans la fraction continue

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots$$

sont bornés.

Mais on trouve par cette voie que le théorème de M. Franel n'est pas vrai pour une infinité des nombres transcendants x. Ainsi, en faisant $a_\nu + 1 = a^{c^{\nu-1}}$, a et c étant deux entiers supérieurs à *un*, la somme S_n est de l'ordre de $n^{1-\frac{1}{c}}$, pour une certaine catégorie des valeurs de n.

Les développements étant un peu longs, je me borne aux indications précédentes, faciles à compléter.

M. Lerch (Fribourg).

1638. (**1899**, 245) (G. de Rocquigny). — *L'Arithmétique au premier rang des Sciences.* — Il est assez naturel que la notion de nombre précède celle de mesure. Cela suffirait à expliquer la disposition de l'Arithmétique en tête de toutes les subdivisions de la Mathématique.

Le classement de ces subdivisions a été très en honneur dans la nomenclature scolastique. Il n'a cessé d'être scrupuleusement suivi, et à cet égard tous les documents qui s'y rapportent le mentionnent avec une inaltérable fidélité.

Je me bornerai à citer ceux que le hasard des lectures m'a fait rencontrer.

Bibliothèque d'Avranches (ms. 136, fol. 25). — Tableau des sept arts [libéraux] :

grammatica		*recte scribere*
dialectica		*discernere verum a falso*
rethorica		*ornate loqui*
arismethica	*docetur*	*numerare*
geometria		*mensurare terras*
musica		*consonantes vocum*
astronomia.		*de astris*

Bibliothèque nationale (nouv. acquisit. fr., ms. 4140). — Traité d'algorisme en provençal.

Acomensa un breu [bref] compendi del art del algorisme que foc Natural de VIDA, et foc trop savi home et discret et maystre en quatre sciencias, so es en arismetica, geometria, musica et astronomia....

(Ancien n° 5194 de la bibliothèque de Colbert.)

J.-H. VINCENT. — Notice sur divers manuscrits grecs relatifs à la Musique (*Notices des Manuscrits, etc.*, t. XVI, 1847. 600 pages). — Les pages 362-383 renferment le texte et la traduction, par VINCENT, de l'*Introduction au traité de* G. PACHYMÈRE, intitulé : *Des quatre sciences mathématiques* (*Quadrivium*) (mss. 2338 à 2341 et 2438 de la Bibliothèque Royale).

En voici un extrait particulièrement intéressant pour la présente question :

« Maintenant, que la première des sciences mathématiques soit l'Arithmétique, c'est ce que l'on va voir bien clairement. Car, en premier lieu, Pythagore dit que l'essence est un nombre.... Aussi Platon dit-il que les idées sont des nombres....

» En second lieu, l'Arithmétique est, par sa nature, antérieure aux autres sciences, parce que, supposons-la détruite, les autres s'écroulent avec elle, tandis que, les autres étant détruites, elle, au con-

traire, pourra subsister encore. Ainsi, que l'on supprime le nombre trois, qui appartient à l'Arithmétique, on n'aura plus le triangle qui appartient à la Géométrie. Que l'on supprime le rapport épitrite, qui appartient à l'Arithmétique, on n'aura plus la quarte qui appartient à la Musique. Que l'on supprime tel ou tel nombre, il n'y aura plus moyen de calculer, ni mouvement du ciel, ni celui du Soleil ou de tout autre astre.

» Ainsi l'Arithmétique marchant avant les autres sciences, nous avons raison de la considérer et de la traiter comme la première de toutes. »

Il est arrivé, pourtant, que certains documents, tout en laissant l'Arithmétique au premier rang, l'aient fait suivre de la Musique et de la Géométrie.

Exemples. — I. *Géométrie de* GERBERT :

« *Incipit prologus in Geometriam Gerberti.*

» *In quatuor Matheseos ordine disciplinarum tertium post Arithmeticæ Musicæque tractatum geometrica speculatto naturaliter obtinet locum. Cujus videlicet ordinis ratio, quia in ipsis Arithmeticæ institutionis principiis a doctissimo et disertissimo liberalium artium tractatore Boetio satis luculenta datur, a nostris melius fatuitate, utpote nota, reticetur.* » (*Œuvres de* GERBERT, par A. OLLERIS, 1867.)

II. « Dans les Universités, nous dit M. H. ZEUTHEN (*Hist. des Math. dans l'antiq. et le moyen âge,* traduct. J. MASCART, 1902, p. 276), il y avait une Faculté des Arts où l'on préparait à d'autres études plus avancées, mais cette préparation se limitait régulièrement au *trivium* (d'où le mot *trivial*), qui comprenait la Grammaire, la Rhétorique, pour négliger le *quadrivium,* composé de l'Arithmétique, la Musique, la Géométrie et l'Astronomie. D'ailleurs, même quand on faisait son *quadrivium,* l'Arithmétique se restreignait à un peu de calcul, et la Géométrie à une étude tronquée de quelques livres d'Euclide. »

Pourquoi cette modification dans la nomenclature du *quadrivium?*

Le mathématicien français Jean TRENCHANT va nous en dire la raison.

L'*Arithmetique de* IAN TRENCHANT (1557, 1571, 1647). — Extraits de la Préface :

« Les premiers auteurs de souueraine erudition preuoyans l'ordre et la voye que les rudes et nouueaux esprits doiuent ensuiure pour venir de degré en degré a perfection de sauoir, et estre prests à entendre la vérité des choses : ordonnerent les set ars liberaux, diuisez premièrement en deux classes ou bendes : l'une dite triuiale [trivium], l'autre quadriuiale [quadrivium]. La triuiale en comprent trois : sauoir est Grammaire, Dialectique et Rethorique. Et la quadriuiale quatre, ce sont les Mathematiques. Donque les Mathematiques se divisent en quatre parties, ou ars liberaux : qui sont Arithmetique, Geometrie, Musique et Astronomie. L'Arithmetique, et Musique, ont pour suget la quantité discrette [multitude ou nombre] : et la Geometrie, et Astronomie la continue [magnitude ou grandeur]. Arithmetique, est la discipline du nombre : pour cette cause elle precede en ordre les autres troys parties, et non sans vn vray degré d'excellence : attendu qu'elles ne pourroyent de soy produire aucun fruit, n'y venir en euidence pour l'usage des hommes, sans la faculté du nombre. » (G. MAUPIN, *Opinions et curiosités touchant la Mathématique,* 2e série, 1902, p. 23.) H. BROCARD.

2114. (**1901**, 158) (H. BROCARD). — *Courbes à asymptotes curvilignes.* — La théorie des courbes à asymptotes curvilignes, assez délaissée aujourd'hui, était au contraire en vogue au XVIIIe siècle, et, pour nommer au moins un auteur de l'époque, je rappellerai les *Usages de l'Analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du Calcul différentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres, par Jean-Paul de Gua de Malves,* .... A Paris, rue Saint-Jacques, chez Charles-Antoine Jombert, Libraire du Roy, pour l'Artillerie et le Génie, à l'Image Notre-Dame, M.DCC.XL. Avec approbation et privilège du Roy. Quelques exemplaires de la même édition ont une autre adresse d'imprimeur : A Paris, chez Braisson, libraire, rue Saint-Jacques à la Science, Piget, quai des Augustins, à l'Image Saint-Jacques.

Dans le texte original, les *Usages de l'Analyse de Descartes,* par Gua de Malves, sont assez durs à la lecture, mais ils viennent de faire l'objet d'une étude très approfondie et fort claire qui a paru dans le Tome XV des *Abhandlungen zur Geschichte der matematischen Wissenschaften* (Leipzig, Teubner, 1902), sous le titre :

Einleitung in die analytische Geometrie der Höheren algebraïschen Kurven nach den Methoden von Jean-Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiskussion von Dr. Paul Sauerbeck. *H. Braid.*

2181. (**1901**, 249) (S. DE LA CAMPA). — *Voir* DESBOVES, *Sur un théorème de Legendre et son application à la recherche de limites qui comprennent entre elles des nombres premiers* (*N. A.*, 1855, p. 281-295).

L'auteur énonce entre autres la proposition suivante :

« Les carrés de deux nombres entiers consécutifs comprennent toujours entre eux au moins deux nombres premiers. »

Si l'on observe que, dans la série des nombres premiers, il y a une infinité de groupes de nombres premiers formés de deux nombres impairs consécutifs, on est amené à cette conclusion que :

Les carrés de deux nombres premiers consécutifs comprennent toujours entre eux au moins quatre nombres premiers.

Ce théorème exige, toutefois, que le nombre premier initial soit > 3.

Voir aussi : H. BROCARD, *Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers* (*N. C.*, t. VI, *passim*, 1880) et A. DE POLIGNAC, *Six propositions arithmologiques déduites du crible d'Eratosthène* (*N. A.*, 1849, p. 423-429).

Cette propriété des carrés consécutifs, premiers ou non, parait pouvoir se déduire du *postulatum de* BERTRAND, énoncé dans le XXXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, 1845 : *Mémoire sur le nombre des valeurs que peut prendre une fonction qnand on y permute les lettres qu'elle renferme*, p. 129.

BERTRAND part de ce fait que, si n surpasse 6, il y a toujours un nombre premier entre $n - 2$ et $\frac{n}{2}$.

Ce *postulatum* a d'ailleurs été démontré à peu de temps de là par TCHEBYCHEF. [*Voir* rép. 938 (**1897**, 276).] H. BROCARD.

Consulter l'*Encyclopédie allemande des Sciences mathématiques*, Leipzig, 1900, t. I, p. 658. LA RÉDACTION.

2251. (**1902**, 1) (LA RÉDACTION) et **2274** (**1902**, 8) (E. MAILLET). — *Décomposition d'un nombre entier* (**1902**, 245; **1904**, 31, 81, 99). — I. Tout carré pair est la somme d'un cube et de 4 carrés.

Tout cube pair est la somme d'un bicarré et de 4 carrés.

Tout bicarré pair est la somme d'une puissance cinquième et de 4 carrés, etc.

En général,

$$(2N)^n = a^{n+1} + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots; \; a, b, c, d, e, \neq 0).$$

Si $n = 1$, les nombres $2N = 2, 4, 6, 10, 12$ et 18 sont exceptés.

Si $n = 2$, $2N = 2$ est excepté.

II. Tout carré impair i^2, sauf 1^2 et 3^2, est la somme de 4 carrés et de 4 hexagones, tous $\neq 0$.

Si $i^2 > 7^2$, les 4 hexagones sont distincts.

III. Tout nombre entier N, sauf 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 9, est la somme de 4 triangles et de 4 carrés, tous $\neq 0$.

IV. Tout nombre entier N est la somme de 4 carrés et de 4 polygones de m côtés, tous $\neq 0$, sauf pour certaines valeurs initiales de N, à déterminer, comme je l'ai fait (III).

V. Tous les nombres triangulaires > 10 peuvent être partagés en deux classes également nombreuses.

Les uns sont la somme de 2 triangles de rang pair, d'un carré et d'un hexagone, $\neq 0$.

Les autres sont la somme d'un triangle, d'un carré, d'un pentagone et d'un hexagone, $\neq 0$.

Directement :

$$6 = 3 + 1^2 + 1 + 1, \qquad 10 = 3 + 1^2 + 5 + 1.$$

VI. Tout bicarré entier $n^4 > 1$ est la somme de 3 cubes, de 3 carrés et de 3 triangulaires, tous $\neq 0$ (*comp.* **1902**, 116, cas 9°).

VII. Toute puissance cinquième N^5 peut se développer en une somme de $2n - 1$ carrés et de $2n - 1$ bicarrés, ou en une somme de $2n$ carrés et de $2n + 1$ bicarrés, suivant que $N = 2n$ ou $2n + 1$.

G. de Rocquigny.

2372. (**1902**, 145) (N.-J. Hatzidakis). — *Restes du système vigésimal dans plusieurs langues* (**1903**, 29, 164). — Grâce à l'amabilité de M. Maillet, j'ai eu connaissance d'une réponse de M. Ber-

dellé, dans laquelle il émet l'avis que les restes vigésimaux dans les numéraux danois et albanais sont probablement aussi d'origine celtique, comme les restes correspondants (*quatre-vingts, quinze-vingts*) en français. C'est là une question de pure linguistique dans laquelle je n'ai aucune compétence. Ce qui me semble *certain* c'est que, pour le danois, ces restes ne sont ni d'origine germanique, ni d'origine slave; la supposition de M. Berdellé est donc bien probable. La distinction que M. Berdellé fait des termes allemands *anderthalb dritthalb* comme *vulgaires*, m'est inconnue; de même, je ne crois pas qu'on aille plus loin que *dritthalb* (*vierthalb*, etc., me sont inconnus). Quant à *anderthalb*, *ander* (*der — e*) a ici la signification de *deuxième;* il paraît que c'est là la signification la plus ancienne du mot, à en juger d'après les langues danoise et suédoise (danois : *den anden* = le deuxième; suédois : *den andre* = le deuxième). N.-J. HATZIDAKIS (Athènes).

Autre réponse de M. BERDELLÉ, mentionnée ci-dessus.

2373. (1902, 146) (N.-J. HATZIDAKIS). — *Nom de nombre russe* (**1903**, 55, 114, 164, 314). — M. Plakhowo a eu l'extrême obligeance de nous adresser copie d'une réponse explicative ci-jointe qu'il a reçue de M. Wansevitch. L'opinion de ce dernier est, il est vrai, purement personnelle; mais M. Plakhowo la partage entièrement.

LA RÉDACTION.

Devianosto s'est formé, ainsi que *semdesiat, vosemdesiat,* etc., de *deviatdesiat,* mais avec de grands changements.

Deviat s'écrivait jadis avec la lettre slavonne Ѧ, qui se décomposa en *en,* et l'on obtint *deven;* la lettre *t* disparut.

Le second mot s'unit régulièrement avec le premier au moyen de la voyelle copulative *o*; du mot *desiat* avec la langue slavonne, il ne resta plus que les consonnes *s* et *t*, et le mot s'arrondit, à l'aide de la terminaison *o*, du genre neutre :

Deven + *o* + *des* Ѧ *t* + *o*,
Deven + *o* + *s* *t* + *o*.

Il faudrait écrire *devenosto* et non *devianosto*.

En réalité, l'omission de la consonne *d* est extraordinaire, tandis que les voyelles disparaissaient fréquemment dans la formation des mots. WANSEVITCH.

[Traduit du russe. (PAPELIER.)]

D'après l'explication de M. Wansevitch, le mot *devianosto* serait seulement une *anomalie linguistique* (à vrai dire un peu forte; *deviatdessiat-devianosto!*); par suite, le cas d'*anomalie mathématique* n'existe pas et ma question n'a pas d'objet, puisque le *sto* de *devianosto* n'est pas le mot *sto* (cent); il n'y aurait donc là qu'un jeu du hasard, assez curieux du reste.

N.-J. HATZIDAKIS (Athènes).

2391. (**1902**, 176) (E. LEMOINE). — *Duplication du cube* (**1903**, 186, 326; **1904**, 49). — On a

$$\sqrt[3]{2} = 1,25992102, \quad \ldots,$$

d'où

$$\sqrt[3]{4} = 1,5874009, \quad \ldots.$$

Or

$$15874 = \overline{93}^2 + \overline{85}^2 = \overline{89+4}^2 + \overline{89-4}^2,$$

$$\sqrt{1,5874} = \sqrt{\overline{0,93}^2 + \overline{0,85}^2} = 1,25992063, \quad \ldots.$$

Donc l'hypoténuse du triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont 93 et 85 (ou 89 ± 4) en millimètres donne, en prenant le décimètre comme unité, $\sqrt[3]{2}$ avec une erreur absolue inférieure à $\frac{4}{10^7}$, construction beaucoup plus simple et beaucoup plus approchée que celles précédemment indiquées (**1903**, 326; **1904**, 49).

P.-F. TEILHET.

2512. (**1903**, 34) (A. WEREBRUSOW). — *Limite de x et y quand $x^3 - y^2$ est limité* (**1903**, 283, 316). — Posons

$$x = \alpha^2 + 2A, \qquad y = \alpha^3 + 3A\alpha + B,$$
$$\omega = 3A^2 - 2B\alpha, \qquad x^3 - y^2 = \Delta.$$

Le rapport du maximum de α au Δ donné diminue quand Δ augmente. Mes exemples représentent les cas rares de Δ très petit. Pour

$$\alpha = \quad 72, \quad 90, \quad 306, \quad 649, \quad 811,$$
$$\Delta = -17, \quad -24, \quad -297, \quad -618, \quad 847,$$
$$\frac{\alpha}{\Delta} = 4,2, \quad 3,7, \quad 1,03, \quad 1,05, \quad 0,95.$$

J'ai trouvé un cas de Δ très petit :

$$\alpha = \frac{1}{3}n^2(\lambda n^3 \pm 3), \qquad A = \frac{1}{3\lambda}n(\lambda n^3 \pm 2),$$

$$B = \frac{1}{2\lambda^2}(\lambda n^3 \pm 1), \qquad \omega = \frac{1}{3\lambda^2}n^2;$$

$$\Delta = -\frac{(3\lambda n^3 \pm r)^2 + 32}{324}, \qquad \frac{\alpha}{\Delta} = \frac{12\lambda^3}{n} \qquad \text{(appr.)}.$$

Dans l'exemple de M. Teilhet (**1903**, 316) [qu'on déduit de l'égalité

$$(3a^4 + 6a^2b^2 - b^4)^3 - [6ab(3a^4 + b^4)]^2 = (3a^4 - 6a^2b^2 - b^4)^3$$

pour $a = 160$, $b = 109$], on a

$$\alpha = 60\,413, \qquad \Delta = 13\,651\,919, \qquad \frac{\alpha}{\Delta} = \frac{1}{226},$$

tandis qu'on a, pour $\lambda = 1$, $n = 27$,

$$\alpha = 4\,782\,240, \qquad \Delta = -10\,759\,129, \qquad \frac{\alpha}{\Delta} = \frac{4}{9},$$

$$\alpha = 4\,783\,698, \qquad \Delta = +10\,764\,232, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

A. Werebrusow.

2521. (**1903**, 37) (P.-F. Teilhet). — *Équations indéterminées* (**1903**, 245, 285; **1904**, 50). — Toutes les valeurs de y qui satisfont à l'équation

$$y^2 - 1 = K(A^2 + B^2)$$

peuvent se mettre sous la forme

$$y = \lambda(A_1^2 + B_1^2) \pm 1,$$

et l'on a

$$y^2 - 1 = \lambda(A_1^2 + B_1^2)[\lambda(A_1^2 + B_1^2) \pm 2].$$

Si λ et $\lambda(A_1^2 + B_1^2) \pm 2$ n'admettent aucun diviseur premier $4h+1$, A et B sont représentés par A_1 et B_1; dans le cas contraire, on obtient toutes les valeurs de A et B en effectuant toutes les combinaisons de produits de ces facteurs $4h+1$; les valeurs correspondantes de K s'ensuivent par division. P.-F. Teilhet.

2532. (**1903**, 71) (*Artigensis*). — *Ondes liquides concentriques* (**1904**, 51). — 1° Imaginons un tore circulaire, flottant, concentrique au point de chute de la pierre.

Si la méridienne de la surface est

$$y = \sin x,$$

le travail que l'on pourrait obtenir au passage d'une onde serait

$$T = \pi r^2 . 2\pi R . h,$$

h valeur comparable à l'ordonnée maximum, constante de la sinusoïde; R distance du centre du cercle méridien du tore à l'axe; r rayon du cercle méridien, etc.; c'est-à-dire que T serait aussi grand que l'on voudrait.

La solution $y = \sin x$ est donc assez peu approchée.

2° Une solution un peu plus approchée est obtenue en supposant que, pour chaque vague concentrique, le travail total est constant. La méridienne est de la forme

$$y = \frac{a \sin(bx + c)}{\sqrt{x}}.$$

3° Il y a lieu de remarquer que cette dernière solution ne tient aucun compte :

a. De la viscosité du liquide,

b. De la résistance due à la tension superficielle,

c. Des mouvements d'oscillation de la nappe liquide à l'endroit de la chute de la pierre; oscillations amorties qui donnent naissance aux ondes qui suivent la première et ne lui sont pas identiques.

V. Aubry.

2559. (**1903**, 97) (E.-B. Escott). — (**1903**, 318). — Les relations nécessaires entre les nombres a, b, c, ..., pour que l'expression de N

$$N = \frac{[a.b.c\ldots c.b.a]}{[b.c\ldots c.b]} \quad \text{ou} \quad \sqrt{N} = (a.b.c\ldots c.b.2a)$$

soit un entier, peuvent être déduites de l'étude de l'équation de Pell

$$t^2 - Du^2 = \pm 1.$$

Soient $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P_1}{Q_1}$ $(P_1 = Q)$ les dernières réduites de la fraction continue $(0.b.c\ldots c.b)$, $N = a^2 + \lambda$ $(\lambda < 2a + 1)$; on aura

$$Q_1\lambda - 2P_1 a = P;$$

d'où l'on voit qu'une même période $b.c\ldots c.b$ a une infinité de nombres, car toujours

$$Q_1\lambda - 2P_1 a < P_1, \qquad \lambda < (2a+1)\frac{P_1}{Q_1} < 2a+1.$$

Exemple :

$$33\lambda - 46a = 16,$$

$$\sqrt{216} = (14.1.2.3.2.1.28),$$

$$\sqrt{2275} = (47.1.2.3.2.1.94),$$

$$\sqrt{6512} = (80.1.2.3.2.1.160),$$

....

Si l'on veut que dans la période prise le terme du milieu soit a, on prendra les réduites $\frac{u}{v}$, $\frac{u_1}{v_1}$ de la fraction $(o.b.c\ldots)$ avec la condition $u_1 = 2v$; on aura

$$v_1\lambda - 2u_1 a = 2u.$$

Exemple :

$$7\lambda - 8a = 2,$$

$$\sqrt{31} = (5.1.1.3.5.3.1.1.10),$$

$$\sqrt{158} = (12.1.1.3.12.3.1.1.24),$$

$$\sqrt{383} = (19.1.1.3.19.3.1.1.38),$$

....

Le procédé pour trouver la moitié de la période est assez simple pour qu'on l'emploie aussi à déterminer le nombre des termes. On écrit le quotient entier et le reste entre parenthèses :

$$\frac{2a}{\lambda} = b(r), \qquad \frac{2a-r}{1+br} = \frac{m}{n} = b'(r'),$$

$$\frac{2a-r'}{\lambda+b'(r'-r)} = \frac{m'}{n'} = b''(r''), \qquad \frac{2a-r''}{n+b''(r''-r')} = \frac{m''}{n''} = b'''(r''');$$

et ainsi de suite, jusqu'à la moitié de la période, quand deux restes successifs seront égaux pour la période paire, ou deux dénominateurs successifs seront égaux pour la période impaire.

Exemples :

$$N = 609, \qquad a = 24, \qquad \lambda = 34,$$

$$\frac{48}{34} = 1\,(14), \qquad \frac{48-14}{1+14} = \frac{34}{15} = 2\,(4),$$

$$\frac{48-4}{24-20} = \frac{44}{14} = 3\,(2), \qquad \frac{48-2}{15-6} = \frac{46}{9} = 5\,(1),$$

$$\frac{48-1}{14-5} = \frac{47}{9} = 5\,(2),$$

$$\sqrt{609} = (24.1.2.3.5.5.3.2.1.48);$$

$$N = 598, \qquad a = 24, \qquad \lambda = 22,$$

$$\frac{48}{22} = 2\,(4), \qquad \frac{48-4}{1+8} = \frac{44}{9} = 4\,(8),$$

$$\frac{48-8}{22+16} = \frac{40}{38} = 1\,(2), \qquad \frac{48-2}{9-6} = \frac{46}{3} = 15\,(1),$$

$$\frac{48-1}{38-15} = \frac{47}{23} = 2\,(1),$$

$$\sqrt{598} = (24.2.4.1.15.2.15.1.4.2.48).$$

A. Werebrusow.

2571. (**1903**, 102) (*Rudis*). — *Solutions de l'équation*

$$x^2 - \Delta y^2 = -a$$

(**1903**, 224, 319). — La réponse de M. Werebrusow est erronée. La condition nécessaire pour que l'équation

$$(ax - by)^2 - Dy^2 = a$$

soit résoluble en nombres entiers est, non

$$\left(\frac{a}{D}\right) = +1,$$

mais

$$\left(\frac{D}{a'}\right) = \left(\frac{D}{a''}\right) = \left(\frac{D}{a'''}\right) = \ldots = +1,$$

où a', a'', a''', ... sont les facteurs premiers impairs de a.

Cette condition est de plus insuffisante.

Si n est une racine de la congruence

$$n^2 \equiv D \pmod{a},$$

posons $l = \frac{n^2 - D}{a}$. Si les formes quadratiques $ap^2 + 2npq + lq^2$ et $p^2 - Dq^2$ sont proprement équivalentes, l'équation

$$p^2 - Dq^2 = a$$

est possible, et ne l'est qu'à cette condition.

La condition que donne M. Werebrusow, savoir $\left(\frac{a}{D}\right) = +1$, est toujours satisfaite si a est impair, puisque

$$\left(\frac{a}{D}\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a}\right) = \left(\frac{b^2}{a}\right) = +1.$$

Le premier exemple est inexact, puisque

$$\left(\frac{5}{221}\right) = \left(\frac{11}{221}\right) = +1.$$

L'équation admet toujours une solution si $\Delta = a^2 + 1$, savoir

$$x = a, \qquad y = 1;$$

ces cas ne sont pas indiqués dans le *Canon Pellianus* de DEGEN.

A.-M. LEGENDRE (*Théorie des nombres,* t. I, p. 65) montre qu'une solution est toujours possible quand Δ est un nombre premier de la forme $4n + 1$.

LEJEUNE-DIRICHLET [*Einige neue Sätze über umbestimmte Gleichungen* (*Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften,* 1834, p. 649–664, et *Werke,* Band. I, p. 219-236) et dans sa *Zahlentheorie,* p. 202, note], en étendant cette méthode de Legendre, a obtenu le théorème suivant :

Soient a, b, c, ... des nombres premiers de la forme $4n + 1$; l'équation $x^2 - \Delta y^2 = -1$ est possible quand :

1° $\Delta = a^{2s+1}$; 2° $\Delta = 2a$, $a = 8n + 5$; 3° $\Delta = 2a$, $a = 16n + 9$; $2^{\frac{a-1}{4}} \equiv -1 \pmod{a}$; 4° $\Delta = ab$, $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$; 5° $\Delta = ab$, $\left(\frac{a}{b}\right) = +1$, $\left(\frac{a}{b}\right)_4 = -1$, $\left(\frac{b}{a}\right)_4 = -1$.

Il indique trois autres théorèmes quand $\Delta = abc$.

On doit remarquer que, dans les cas 3°, 4° et 5°, toutes les conditions ne sont pas toujours nécessaires.

Voir encore : JOSEPH PERROTT, *Sur l'équation* $t^2 - Du^2 = -1$ (*Cr.*, t. 102, 1888, p. 185); LAGRANGE, *Œuvres*, t. I, p. 722; H.-J.-S. SMITH, *Report on the Theory of Numbers* (*R. B. A.*, 1861. § 96, VII).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

2576. (**1903**, 122, 7°) (G. DE ROCQUIGNY). — 1° *Trois triangulaires consécutifs dont le produit est un carré.* — (Réponse complète.) — L'équation du problème, x étant le rang du triangulaire moyen, est

$$(x-1)(x-2) = 2a^2.$$

Premier cas : $x - 1 = 2x'$, alors $x'(2x'+3) = a^2$. — Deux hypothèses :

$$\left.\begin{aligned} x' &= a'^2 \\ 2x'+3 &= a''^2 \\ a &= a'a'' \end{aligned}\right\} \text{ impossibilité,}$$

et

$$\left.\begin{aligned} x' &= 3a'^2 \\ 2x'+3 &= 3a''^2 \\ a &= 3a'a'' \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \quad 2a'^2+1 = a''^2.$$

Les solutions de cette équation sont

$$\left.\begin{matrix} a' \ldots\ldots\ldots & 0 & 2 & 12 & 70 & \ldots \\ x'' \ldots\ldots\ldots & 1 & 3 & 17 & 99 & \ldots \end{matrix}\right\} \text{ avec } T_{n+1} = 6T_n - T_{n-1}.$$

On en déduit toutes les solutions de la question pour x impair :

$$\left.\begin{matrix} x \ldots & 1 & 25 & 865 & 29\,401 & \ldots \\ a \ldots & 0 & 18 & 612 & 20\,790 & \ldots \end{matrix}\right\} \text{ avec } \theta_{n+1} = 35(\theta_n - \theta_{n-1}) + \theta_{n-2}.$$

Deuxième cas : x pair. — Deux hypothèses :

$$\left.\begin{aligned} x-1 &= a'^2 \\ x+2 &= 2a''^2 \\ a &= a'a'' \\ \text{d'où} \quad a'^2+3 &= 2a''^2 \end{aligned}\right\} \text{ impossibilité,}$$

et

$$\left.\begin{aligned} x-1 &= 3a'^2 \\ x+2 &= 6a''^2 \\ a &= 3a'a'' \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \quad a'^2+1 = 2a''^2.$$

Les solutions de cette équation sont

u'.....	1	7	41	239	...	avec $T_{n+1} = 6T_n - T_{n-1}$.
u''.....	1	5	29	169	...	

On en déduit toutes les solutions de la question pour x pair :

x...	4	148	5044	171364	...	avec $\theta_{n+1} = 35(\theta_n - \theta_{n-1}) + \theta_{n-2}$.
u...	3	105	3567	121173	...	

2° *Trois carrés consécutifs dont le produit est un triangulaire* (note). — Posons $(x-1)(x)(x+1) = z$, on a

$$z^2 = \frac{y(y+1)}{2} \quad \text{ou} \quad 8z^2 + 1 = \overline{2y+1}^2.$$

z.....	1	6	35	204	1189	6930	...	avec $T_{n+1} = 6T_n - T_{n-1}$.
$2y+1$.	3	17	99	577	....	....	...	

Pour répondre aux conditions du problème, z doit à la fois appartenir à la première suite et être le produit de trois nombres consécutifs. Or il semble que le second terme 6 soit le seul qui satisfasse à cette condition et il donne la solution déjà signalée. Toutefois la démonstration rigoureuse de l'assertion précédente m'échappe. Il serait intéressant de l'établir, la méthode d'élimination par les conditions résiduelles ne fournissant qu'une probabilité.

P.-F. Teilhet.

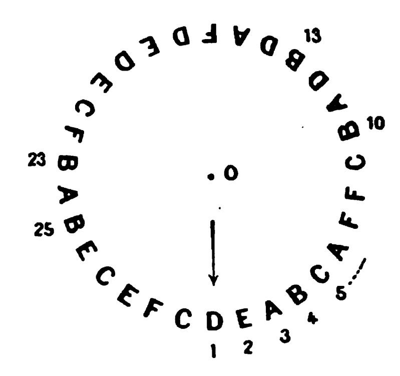
2731. (**1904**, 39) (*Boris*). — *Cadran à grilles.* — Cela est impossible. En effet :

1° Deux mêmes lettres, B par exemple, ne peuvent pas se trouver plus d'une fois à la même distance l'une de l'autre, car il y aurait alors, pour la grille à caractéristique B, au moins deux positions où apparaîtraient deux B.

2° Les distances entre les B successifs étant déterminées, soit 6, 3, 10, 2, 9, comme dans la figure, aucune autre lettre ne peut avoir deux exemplaires consécutifs situés à une de ces distances l'un de l'autre, car autrement cette lettre apparaîtrait deux fois pour une des positions de la grille à caractéristique B. Et cela est vrai de chaque lettre par rapport aux cinq autres.

Il faudrait donc $5 \times 6 = 30$ distances toutes différentes les unes des autres rien qu'entre les A, les B, les C, les D, les E et les F *con-*

sécutifs. Or il n'y a que 26 distances possibles entre deux mêmes lettres voisines, car, s'il y a cinq A qui se suivent sans intervalle, le cinquième sera distant du premier de 26 rangs, distance maximum.



L'impossibilité ressortira encore mieux si l'on considère, d'un côté, que ce qui est vrai de deux mêmes lettres *consécutives* l'est aussi de deux mêmes lettres *quelconques*, et, de l'autre, que les distances 6, 3, 10, 2, 9, pour B, excluent, pour les autres lettres, non seulement les distances désignées par ces cinq nombres, mais encore celles qui sont représentées par leurs sommes 2 à 2, 3 à 3 et 4 à 4.

Ph. Jolivald.

2734. (**1904**, 41) (V. Aubry). — Les courbes gauches dont la courbure et la torsion satisfont à une relation linéaire ont été étudiées par J. Bertrand et ont reçu la désignation de *courbes de Bertrand*.

Pour la bibliographie, déjà étendue, il suffira de consulter l'Ouvrage de M. Gino Loria (*Teorie geom.*, 1896, p. 146-152), où l'on trouvera cités : B. de Saint-Venant, Bouquet, O. Bonnet, J. Bertrand, J.-A. Serret, Puiseux, R. Hoppe, H. Molins, E. Goursat, Balitrand, V. Rouquet, A. Demoulin, E. Cesàro, H. Zeuthen, C. Bioche, etc.

Ici encore il a été posé d'autres questions sur le même sujet : **422**, E. Cesàro (**1895**, 7); **2177**, N.-J. Hatzidakis (**1901**, 223).

Comparez aussi quest. **2187**, L. Laugel (**1901**, 250; **1902**, 52).

H. Brocard.

QUESTIONS.

609. [Q4b] (1895, 205) Dans une partie d'échecs, le *coup du berger*, par lequel les blancs font mat le roi noir au 7ᵉ coup (4ᵉ des blancs) en portant indistinctement la dame ou le fou blanc à la 2ᵉ case du pion du fou du roi noir, est réputé le mat le plus prompt. C'est une erreur.

L'examen de tous les coups qui peuvent se produire au commencement d'une partie (*voir* question 304) montre qu'il y a 4 parties différentes qui peuvent se terminer au 4ᵉ coup (2ᵉ des noirs) par le mat du roi blanc au moyen de la dame noire seule portée à la 5ᵉ case de la tour noire.

On demande :

1° Combien y a-t-il de parties d'échecs différentes qui peuvent être terminées au 5ᵉ, au 6ᵉ et au 7ᵉ coup?

2° Combien y a-t-il de diagrammes ou dispositions distinctes des pièces et pions sur l'échiquier après le 5ᵉ, le 6ᵉ et le 7ᵉ coup, qui représentent ces différents mats?

Un même diagramme peut correspondre à un nombre différent de coups, ou à un même nombre de coups différents, ou enfin aux mêmes coups dont l'ordre seul est interverti.

La théorie mathématique du jeu d'échecs consisterait à résoudre cette question pour le cas de n coups, lorsque n atteint une valeur qui, pour les bons joueurs, dépasse rarement 80 (40 de chaque couleur). H. Tarry.

610. [D1dδ] (1895, 206) Étant donnée une fonction algébrique z de deux variables indépendantes x et y, et s'annulant pour $x = 0$, $y = 0$, existe-t-il une méthode analogue à celle de Newton pour développer z par rapport aux

puissances croissantes de x et y, le développement étant valable dans les environs du système $x = o$, $y = o$?

PAPELIER.

2798. [M¹m] La transformation suivante a-t-elle été déjà étudiée?

Les deux courbes

$$(\varepsilon) \qquad y = e^x,$$

$$(\lambda) \qquad y = lx$$

étant rapportées au même système d'axes rectangulaires OX et OY, on mène des parallèles à OX et à OY par un point C du plan et par les points où ces droites rencontrent (ε) et (λ). Soient E, L les sommets des rectangles ainsi obtenus qui résultent de deux côtés partant, l'un de (ε), l'autre de (λ).

Cela posé, si l'un des points C est une courbe algébrique représentée par l'équation $F(y, x) = o$, l'une des courbes (E), (L) aura pour équation $F(e^x, e^y) = o$, et l'autre $F(lx, ly) = o$.

La transformation proposée ramènera donc la discussion des types de courbes transcendantes (E), (L) à celle de la courbe algébrique (C) et à la construction des courbes (E), (L) qui s'en déduisent comme il vient d'être indiqué.

H. BROCARD.

2799. [H12d] Je demande l'indication bibliographique de travaux se rapportant à l'étude de polynomes $F_i(z)$ liés par une relation de récurrence

$$A_n F_{n+1}(z) + B_n(C_n z + D_n) F_n(z) + E_n F_{n-1}(z) = o,$$

où A_n, B_n, C_n, D_n, E_n sont des fonctions de n seul, $F_i(z)$ étant un polynome de degré i en z.

R. DE MONTESSUS.

2800. [Σ] En vue des études physico-mathématiques que je poursuis sur les débits des sources, surtout de celles

qui servent à l'alimentation des villes, je serais très reconnaissant à toute personne de France ou de l'étranger qui pourrait m'envoyer ou me faire envoyer un Tableau du débit, au moins une fois par mois, d'une source quelconque ou de plusieurs (réunies ou séparées) pour une période de 10 à 15 ans *au moins*. Ce Tableau pourra être publié par moi, s'il ne présente pas trop d'anomalies, avec l'indication du nom de l'auteur de l'envoi.

Je fais la même demande pour les sources d'eaux minérales. Pour ces dernières, un Tableau des températures une fois par mois pendant la même période pourrait m'être également utile.

Je préférerais ces renseignements pour les sources à débit ou à température notablement variable (relativement) dans la période considérée (dans la proportion de 2 à 3 au moins, par exemple, pour les sources).

Si pareil document se trouvait publié dans un Livre ou Recueil quelconque pour certaines sources, j'en désirerais l'indication bibliographique. Je possède déjà ce qu'il me faut pour les sources des villes de Paris, le Havre et Bordeaux et pour la fontaine de Vaucluse. E. Maillet.

2801. [I17c] Legendre dit que l'on ne saurait avoir, p. 272
en général,

$$(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = A^2+B^2+C^2,$$

et il cite quelques exemples à l'appui.

Quels que soient a et b, on a

$$(a^2+a^2+a^2)[a^2+(a+b)^2+(2a+b)^2]$$
$$= (ab)^2+(3a^2+ab)^2+(3a^2+2ab)^2.$$

Y a-t-il d'autres identités analogues?

G. de Rocquigny.

2802. [I25b] Je voudrais une décomposition de $n^5-(n-1)^5$ en 3 triangles $\neq 0$, au moyen de formules

directes, 2 quelconques des 3 triangles n'étant ni égaux ni consécutifs pour $n > 2$. G. DE ROCQUIGNY.

2803. [**I18c**] Toute puissance impaire de 2, soit 2^{2n+1} $(n > 1)$, est la somme de 1 cube et de 2 carrés, $\neq 0$.

Il en est de même de 2^{4n}. La proposition est-elle vraie pour 2^{4n+2}? G. DE ROCQUIGNY.

2804. [**I25b**] Les propositions suivantes sur les nombres entiers ont-elles été énoncées?

I. 8N est la somme de 2 triangles, de 2 carrés et de 2 pentagones.

II. $8N + 1 > 1$ est la somme de 2 triangles, de 2 carrés, de 1 pentagone et de 1 heptagone.

III. $8N + 2 > 2$ est la somme de 2 carrés, de 2 pentagones et de 2 heptagones.

IV. $8N + 3 > 11$ est la somme de 1 triangle, de 2 carrés et de 1 ennéagone.

$8N + 3 > 3$ est aussi la somme de 3 carrés et de 1 octogone.

V. $8N + 4 > 4$ est la somme de 2 triangles, de 2 carrés et de 1 pentagone.

VI. $8N + 5 > 5$ est la somme de 1 triangle de rang pair, de 2 carrés et de 1 hexagone, les triangles n'étant pas consécutifs.

VII. $8N + 6$ est la somme de 2 carrés, plus 1 triangle, 1 pentagone, 1 heptagone et 1 ennéagone.

VIII. $8N + 7$ est la somme de 1 pentagone, de 2 carrés et de 1 heptagone.

N. B. — Tous les composants sont différents de zéro.

G. DE ROCQUIGNY.

2805. [**H8f**] Trouver l'intégrale complète quelconque

de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\lambda^2 y^2}{2} - ny \sin \lambda x - \frac{a^2}{2},$$

où λ, n, a sont des constantes. L'intégrale sera de la forme

$$z = \psi(x, y, b).$$

COSTU STOÏANWICH (Belgrade).

2806. [**C1e**] En considérant les coefficients du développement de Maclaurin

$$\frac{1}{1 - \log(1 + z)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

j'ai observé que l'on a, depuis $r = 5$,

$$\frac{1}{a_r} = m\left(p \pm \frac{1}{q}\right),$$

m étant entier, tandis que p et q sont premiers. Il paraît ensuite que le signe $\pm$ coïncide avec celui de

$$(-1)^{\frac{p(p-1)}{8} + \frac{q-1}{2}}.$$

Un calculateur plus habile que moi voudrait-il continuer cette recherche pour les valeurs de r plus grandes que 10? Les a_ν se calculent par la formule de récurrence

$$a_n = a_{n-1} - \frac{1}{2} a_{n-2} + \frac{1}{3} a_{n-3} - \frac{1}{4} a_{n-4} \pm \ldots.$$

M. LERCH (Fribourg).

2807. [**A3f**] J'ai établi, relativement à l'équation

$$(1) \qquad \sqrt[m]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[m]{b - \sqrt{x}} = c \qquad (m = 2k + 1),$$

le théorème suivant :

A chaque racine réelle α de l'équation

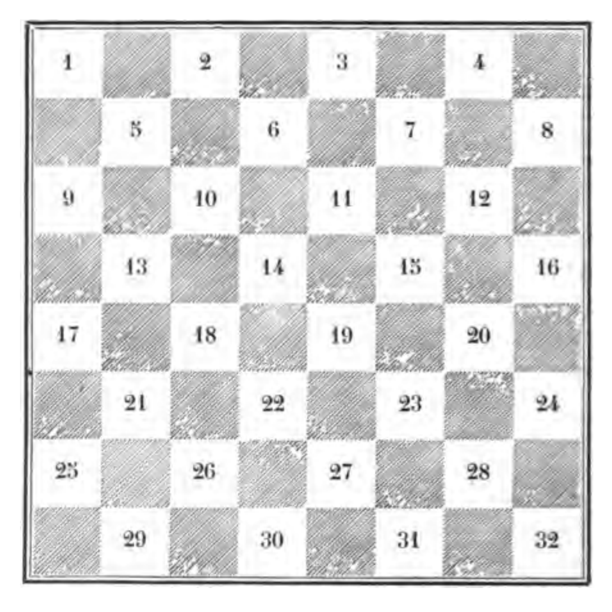
$$(2) \qquad a + b = c^m - \frac{m}{1} c^{m-2} X + \frac{m(m-3)}{1.2} c^{m-4} X^2 - \ldots$$

correspond un couple de racines de l'équation (1), *donné par*

$$x = \left(\frac{b - a \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4\alpha}}{2}\right)^2.$$

Je désirerais savoir si ce théorème est connu et, dans ce cas, où il a été démontré. G. CANDIDO.

2808. [Q4b] On sait que sur un échiquier le Fou a un réseau de 32 cases de même couleur, qu'il peut successivement stationner sur chacune d'elles sans être forcé par la nature du terrain de stationner plus d'une fois sur une quelconque de ces 32 cases. Le minimum de pas à faire pour compléter le parcours semble facile à déterminer; en est-il de même lorsqu'on se propose d'étendre au maximum le nombre des pas?



Soit un Fou placé sur la case 31 : quel est le plus long parcours avec ce point de départ? Toutes les cases prises comme initiales sont-elles dans les mêmes conditions? Le problème peut-il être résolu par une formule générale?

ARNOUS DE RIVIÈRE.

RÉPONSES.

2577. (**1903**, 124) (P.-F. Teilhet). — (**1903**, 319). — Extraits d'une Lettre de M. Teilhet à M. Brocard :

« Dans une première méthode vous partez du système

$$(1)\qquad x+1=a^2,$$

$$(2)\qquad x^2+y^2=b^2,$$

$$(3)\qquad x^3+y^3=c^2.$$

Combinant (1) et (2) vous en tirez la condition

$$(4)\qquad 2b^2-a^4=t^2=(x-y)^2.$$

Combinant (1) et (3) vous en tirez en outre

$$(5)\qquad 3a^2(4c^2-a^6)=u^2=9(x^2-y^2)^2,$$

et vous êtes conduit ainsi à chercher empiriquement les solutions communes aux équations (4) et (5) ayant d'ailleurs

$$(6)\qquad x=\frac{u+3t^2}{6t},\qquad y=\frac{u-3t^2}{6t}.$$

Or j'établis simplement que l'équation (4) est complètement résolue par les formules

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{A^2-B^2+2AB}{v}\theta,\\ t &= \frac{(A^2-B^2+2AB)(A^2-B^2-2AB)}{v^2}\theta^2,\\ b &= \frac{(A^2+B^2)(A^2-B^2+2AB)}{v^2}\theta^2, \end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| = \frac{a^2\pm t}{2};$$

A et B étant des entiers quelconques positifs ou négatifs, mais premiers entre eux et de parités différentes, v^2 le plus grand carré divisant $A^2 - B^2 + 2AB$ et θ un entier quelconque, positif ou négatif.

» L'équation (5) est en outre complètement résolue par

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} u &= 3a\, u'_1 u'_2 u'_3,\\ a &= \frac{(u'^2_3 - 3u'^2_1)r}{s^2},\\ c &= \frac{1}{2}\frac{r^3}{s^6}(u'^2_3 + 3u'^2_1)(u'^2_3 - 3u'^2_1)^2,\\ u'_1 u'_2 u'_3 = u' &= \frac{2r^3}{s^6}(u'^2_3 - 3u'^2_1)^2 u'_1 u'_3; \end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| = \frac{a^2 \pm \dfrac{u'}{a}}{2},$$

u'_3 et u'_1 étant des entiers positifs ou négatifs quelconques et s^3 le plus grand cube qui divise $u'^2_3 - 3u'^2_1$.

» Les systèmes (6), (7) et (8) résolvent complètement le problème primitif.

» En égalant entre elles les valeurs de a et de x ou y, on est conduit au système

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &2(A^2 - B^2 + 2AB)u'_1 u'_3\\ &\qquad = \pm(A^2 - B^2 - 2AB)(u'^2_3 - 3u'^2_1),\\ &\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| = \frac{\lambda^2}{2}(u'^2_3 - u'^2_1)^2(A^2 - B^2 + 2AB)\\ &\qquad \times(\overline{A^2 - B^2 + 2AB} \pm \overline{A^2 - B^2 - 2AB}), \end{aligned}\right.$$

λ nombre entier ou fractionnaire, mais tel que x et y soient entiers.

» Si l'on pose

$$\frac{A^2 - B^2 + 2AB}{A^2 - B^2 - 2AB} = \mu,$$

la première équation (9) s'écrit aisément

$$(u'_3 - \mu u'_1)^2 = (\mu^2 + 3)u'^2_1.$$

Alors μ^2+3 doit être un carré $\frac{4\alpha'^2}{\beta^2}$ et l'on est ramené à la première équation de M. Werebrusow :

$$(A^2+B^2)^2-2AB(A^2-B^2)=\alpha'^2.$$

On a donc ainsi toutes les solutions (**1903**, 319).

» Dans votre seconde méthode, vous spécialisez le problème en posant

$$x^2+y^2=b^2, \qquad x^3+y^3=df^2, \qquad x+y=d$$

et arrivez à la relation

$$4f^2-d^2=3t^2.$$

Or, si l'on pose $t=t_1t_2t_3$, on a alors

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| = \frac{t_2(3t_1^2-3t_3^2\pm 2t_1t_3)}{3}.$$

De plus, la première équation exige

$$x=K(A^2-B^2), \qquad y=2KAB.$$

Si, d'autre part, on pose $K=8K'$, on est conduit à

$$3t_1^4-2K't_1^2(A^2-B^2+2AB)-K'^2(A^2-B^2-2AB)^2=0,$$

d'où

$$t_1^2=K'\left[A^2-B^2+2AB\pm\sqrt{(A^2-B^2+2AB)^2+3(A^2-B^2-2AB)^2}\right].$$

En écrivant que le discriminant est un carré, on retrouve l'équation précédemment rencontrée de M. Werebrusow, et il est curieux de remarquer que toutes les valeurs de A et B fournissent une infinité de solutions, car il suffit de déterminer K' de façon que

$$\frac{K'}{2}(A^2-B^2+2AB\pm 2\alpha')$$

soit un carré, α' étant le même que dans la première méthode.

» On peut encore résoudre le problème par un troisième procédé en partant des équations primitives (1), (2) et (3) et posant $x=\delta x'$, $y=\delta y'$, x' et y' étant premiers entre eux, puis $h^2=\delta^2\beta^2$ et

$c^2 = \delta^2 a^2 \gamma^2$, $a^2 = \delta d$, ... Il vient alors

$$x' + y' = d, \qquad x'^2 + y'^2 = \beta^2, \qquad x'^2 - x'y' + y'^2 = \gamma^2$$

et

$$\left.\begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}\right| = \frac{d \pm C}{2}$$

avec la condition

$$d^2 - 4(\beta^2 - \gamma^2) = C^2.$$

La combinaison des équations précédentes donne aisément

$$C^2 + d^2 = 2\beta^2, \qquad C^2 + \beta^2 = 2\gamma^2.$$

Or les solutions complètes de ces deux dernières équations sont fournies par les relations

$$\begin{aligned} C &= K_1(A_1^2 - B_1^2 + 2A_1B_1), \\ d &= K_1(A_1^2 - B_1^2 - 2A_1B_1), \\ \beta &= K_1(A_1^2 + B_1^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C &= K(A^2 - B^2 + 2AB), \\ d &= K(A^2 - B^2 - 2AB), \\ \gamma &= K(A^2 + B^2). \end{aligned}$$

Or, d'après les conditions primitives, β et γ sont premiers entre eux, d est premier avec γ et en outre premier avec β au facteur 2 près. Il s'ensuit que $K = K_1 = 1$.

» En égalant alors les deux valeurs de C et les deux valeurs de β, on a

$$A^2 - B^2 = A_1(A_1 + B_1), \qquad 2AB = B_1(A_1 - B_1).$$

A^2 et B^2 sont racines de l'équation

$$X^2 - A_1(A_1 + B_1)X - \frac{B_1^2(A_1 - B_1)^2}{4} = 0,$$

d'où

$$A_1^2(A_1 + B_1)^2 + B_1^2(A_1 - B_1)^2 = d'^2.$$

C'est encore l'équation déjà envisagée par M. Werebrusow, et le problème est ainsi définitivement résolu de trois manières en partant de vos trois équations initiales.

» P.-F. Teilhet. »

2621. (**1903**, 179) (H. Brocard). — *Courbes à asymptotes curvilignes* (**1904**, 80, 85). — *Voir* (**1904**, 148) une réponse de M. *Braid* à **2114** (**1901**, 158).

La Rédaction.

2632. (**1903**, 251) (P.-F. Teilhet). — *Décomposition d'un bicarré en un cube et quatre carrés* (**1904**, 56). — Aucune solution n'ayant été donnée à cette question, j'indique la formule suivante :

Soit N la racine du bicarré $N = \alpha + 2\beta^2 (\beta = 1, 2, 3, \ldots, \gamma)$, on a

$$N^4 = (\alpha + 2\beta^2)^4 = \alpha^4 + \overline{4\beta^2(\alpha + \beta^2)}^2 + 2.\overline{2\alpha\beta^2}^2 + \overline{2\alpha\beta}^3.$$

Il semble que si α est nul il n'y ait que $\overline{\gamma - 1}$ décompositions; or, dans ce cas, N est pair, N^4 est multiple de 8 en en retranchant un cube impair quelconque, mais multiple de $8 + 1$; il reste un multiple de 8 ∓ 7 qui est toujours somme de quatre carrés non nuls.

On a donc toujours au moins γ décompositions de N^4 en un cube et quatre carrés *non nuls*.

Voir au sujet des propositions de M. de Rocquigny (**1904**, 56) notre réponse à la question **2674**.

P.-F. Teilhet.

2659. (**1903**, 254) (Paulmier). — *Équation indéterminée* (**1904**, 58). — C'est par erreur que, dans la réponse précédente (**1904**, 58), il a été affirmé que 1121 ne peut être carré parfait dans le système de numération de base *c* (**1903**, 63, 168), les réponses auxquelles il est fait allusion ne contenant aucune démonstration complète.

P.-F. Teilhet.

2690. (**1903**, 299) (H. Brocard). — Extrait d'une Lettre de M. Ph. Jolivald :

« La *Géométrie* dont vous parlez doit être celle de Sébastien Leclerc le père. Il ne s'agit évidemment pas de l'édition originale parue en 1690, mais d'une des éditions qui suivirent, l'une parue en 1774, l'autre à une date antérieure que je ne puis préciser. Je possède l'édition de 1774 où l'on trouve, à la page 170, un compas ouvert, porté par deux Amours, tandis qu'un troisième déjà arrivé au sommet s'y tient en équilibre, tandis qu'un quatrième voltige autour d'eux. C'est une des rares planches du recueil qui porte du texte au recto. La plupart des autres sont des planches hors texte. Elles sont











Cochin filius inv. et Sculp.

signées Cochin, Cochin fils et Chedel. S'il peut vous être agréable de consulter ce Volume, je m'empresserai de vous le communiquer. Il s'y trouve une vie de Sébastien Leclerc, où l'on voit que l'autre Leclerc dont vous parlez était son fils. PH. JOLIVALD. »

M. Jolivald ayant bien voulu mettre cet Ouvrage à notre disposition, nous sommes en mesure de présenter à nos lecteurs un *fac simile* des gravures originales de Cochin. LA RÉDACTION.

2695. (**1903**, 300) (*Artigensis*). — Le théorème de Pascal pour les coniques peut être établi comme il suit :

« Les côtés d'un triangle coupent une conique en six points qui sont deux à deux sur trois droites coupant les côtés opposés du triangle en trois points en ligne droite. »

Chasles a indiqué, dans son *Aperçu historique,* le théorème analogue de l'espace à trois dimensions :

« Les arêtes d'un tétraèdre coupent une quadrique en douze points par lesquels on peut mener quatre plans, chacun contenant trois points situés sur les arêtes qui passent au même sommet du tétraèdre. Les droites d'intersection de chacun de ces plans avec la face opposée du tétraèdre sont des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde. » T. HAYASHI (Tokyo).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

2707, 2709, 2753 et **2754.** (**1904**, 4, 71, 72) (T. LEMOYNE). — *Propriétés des cubiques nodales.* — Le théorème énoncé sous le n° 2754 résulte directement d'une transformation quadratique birationnelle appliquée à la figure considérée dans le théorème suivant, fondamental dans la théorie géométrique des coniques :

En joignant un point A *d'une conique aux points* a, b, c, ..., a', b', c', ..., *où cette conique est rencontrée par des sécantes issues d'un pôle fixe* O, *on obtient deux faisceaux de rayons en involution, et* vice versa.

En effet, le triangle fondamental de la transformation ayant un de ses sommets en A, la conique devient une cubique, nodale en A, qui passe par les deux autres sommets B et C du même triangle; les sécantes, telles que $\overline{Oaa'}$, issues du pôle fixe deviennent des coniques circonscrites au triangle ABC et passant par les points O_1, a_1, a'_1,

transformés de O, a, a'; les faisceaux involutifs $\overline{Aa}$, $\overline{Aa'}$ se changent en d'autres faisceaux involutifs $\overline{Aa_1}$ et $\overline{Aa'_1}$.

On ne peut donc guère attribuer une existence indépendante à l'énoncé 2754, et il y a lieu simplement de le considérer comme une autre manière de présenter des faits connus, qu'il ait été déjà imprimé ou non : les énoncés du n° 2707, comme l'auteur lui-même le remarque, n'en sont d'ailleurs que des cas particuliers.

Quant à l'énoncé 2753, j'extrais d'une Notice sur les cubiques nodales que j'ai autrefois rédigée pour mon propre usage la démonstration que voici, fondée sur les mêmes principes et s'appliquant à un cas plus étendu :

Une cubique nodale (S_1) et deux faisceaux de rayons en involution ayant pour sommet le point double, A, se transforment en une conique (S) et en deux faisceaux de rayons en involution ayant leur sommet en A sur cette conique : les cordes $\overline{a_1a'_1}$, $\overline{b_1b'_1}$, ..., joignant les points où les divers couples de rayons conjugués rencontrent la cubique, deviennent des coniques passant par A et par deux autres points B et C : par un point M arbitrairement choisi il passera autant de ces coniques que par le point correspondant de la première figure, M_1, il passe de cordes de l'espèce envisagée, et ce nombre de coniques, ou de droites, est la classe de l'enveloppe des cordes. Je suppose maintenant que M soit pris sur la conique (S). Comme *les cordes communes à une conique donnée et aux coniques d'un faisceau dont deux des points fixes appartiennent à la conique donnée concourent en un même point,* on voit qu'il suffira de joindre ce point, K, au point O où viennent elles-mêmes concourir les cordes $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, ..., interceptées sur la conique (S) par les faisceaux involutifs $\overline{Aa}$, $\overline{Aa'}$. Mais à cette solution il faut ajouter la solution évidente où M est un point de l'involution tracée sur (S) par les faisceaux involutifs $\overline{Aa}$, $\overline{Aa'}$, et l'on a au total *deux* solutions. Par suite, les cordes $\overline{a_1a'_1}$, $\overline{b_1b'_1}$, ... sont tangentes à une conique (Σ) (1).

(1) Si une quartique possède un point triple, un angle droit que l'on fera pivoter autour de ce point comme sommet déterminera une corde dont l'enveloppe sera de la troisième classe; il en est probablement de même pour les cordes interceptées par des couples de rayons en involution, mais je ne puis l'affirmer, n'ayant obtenu l'énoncé qui précède que par un calcul, pénible déjà dans le cas de l'angle droit, et presque impossible à mener à bonne fin pour le cas de l'involution.

Un cas particulier intéressant est celui où les rayons doubles de l'involution $\overline{Aa_1}$, $\overline{Aa'_1}$, sont parallèles à deux des asymptotes de la cubique (S_1) : ces asymptotes sont alors tangentes à la conique (Σ). Plus particulièrement encore, s'il s'agit d'asymptotes *isotropes*, d'une cubique *circulaire*, le foyer double de la cubique est également le foyer de (Σ).

Maintenant le théorème mentionné sous le n° **2709** est un cas particulier du théorème suivant :

Les coniques qui passent par quatre points fixes d'une cubique rencontrent encore cette cubique en deux points qui sont en ligne droite avec un certain point fixe de la cubique (corésiduel des quatre premiers points fixes).

Et ce théorème lui-même est une conséquence de la propriété fondamentale des cubiques passant par huit points donnés d'admettre en commun un neuvième point fixe. Il est sans doute inutile de circonstancier plus amplement le rattachement au théorème qui vient d'être rappelé de l'énoncé **2709**, mais j'indiquerai un autre cas particulier de ce théorème, où il s'agit, comme dans l'énoncé **2753**, du foyer double d'une cubique, circulaire, mais non nécessairement nodale :

Si par le point O *où chaque cubique circulaire rencontre à distance finie son asymptote réelle on mène à la courbe des sécantes* $\overline{Oaa'}$, $\overline{Obb'}$, ..., *le lieu du milieu des segments* $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, ... *est le cercle décrit sur la droite joignant le point* O *au foyer double comme diamètre.*

Cette propriété fournit une construction du foyer double.

Je mentionnerai enfin que si, par une transformation quadratique birationnelle, les cubiques nodales sont ramenées aux courbes du second ordre, elles le sont à la simple ligne droite par la transformation où les couples de points homologues m, m' sont collinéaires à un point fixe O et en même temps appartiennent à une conique passant par quatre points fixes A, B, C, D. E. Malo.

2730. (**1904**, 38) (H. Brocard). — *Suite arithmétique.* — Considérant *a priori* le produit par un nombre x d'un module Δ, non carré parfait, j'en retranche le plus grand carré qui y soit contenu y^2, ce qui amène un reste z, conformément à la formule

$$\Delta x - y^2 = z.$$

Il est clair dans ces conditions que, relativement à une valeur déterminée de y, la plus grande valeur possible de z est $2y$, et elle se présenterait si l'on avait

$$\Delta x + 1 = (y+1)^2;$$

ce cas est loin de se rencontrer ordinairement, mais il n'en subsiste pas moins que si les plus grandes valeurs effectives de z ne sont pas nécessairement fournies par les plus grandes valeurs de x, ce sont celles-ci qui rendent celles-là possibles.

Cela étant, il est clair que l'on ne peut se borner à considérer des valeurs moindres que Δ (quoique la valeur $x = \Delta$ soit une de celles qui terminent immédiatement l'opération qui consiste, un couple de valeurs $x = x_1$, $z = z_1$ étant donné, à faire $x = z_1$ et à déterminer z en conséquence), parce que, pour $x = \Delta - 2$ par exemple, on a

$$z = 2\Delta - 4,$$

et par suite

$$z > \Delta \qquad \text{pour} \qquad \Delta > 2.$$

Mais on ne sera jamais amené à considérer de nombres z, ni de nombres x supérieurs à $4\Delta - 4$. En effet, l'on a pour $x = 4\Delta$

$$z = 0;$$

puis pour $x = 4\Delta - 1$,

$$\Delta x = (2\Delta - 1)^2 + (3\Delta - 1);$$

pour $x = 4\Delta - 2$,

$$\Delta x = (2\Delta - 1)^2 + (2\Delta - 1);$$

pour $x = 4\Delta - 3$,

$$\Delta x = (2\Delta - 1)^2 + (\Delta - 1);$$

z, d'après la remarque faite tout d'abord, ne saurait donc dépasser la limite $4\Delta - 4$, mais il atteint cette limite en supposant aussi $x = 4\Delta - 4$. Il suit de là que le nombre des déterminations différentes de z est forcément limité, et, d'après la nature même de l'opération, il faut que l'on amène à un moment donné le reste zéro, auquel cas elle se termine, ou un reste déjà trouvé, auquel cas elle se répète indéfiniment.

Si la nature périodique de l'opération envisagée est facile à mettre en lumière, l'étude des variétés de suites périodiques qui se présentent serait immense : on ne saurait en aborder que quelques cas simples.

Si l'on suppose en premier lieu $z = 0$, on voit que l'on ne peut avoir de solution que si Δ admet un diviseur carré δ^2, auquel cas on pourra prendre $x = \frac{\Delta}{\delta^2}\alpha^2$, avec la condition $\alpha < 2\delta$. Par exemple, pour $\Delta = 18$ ou $\Delta = 72$, valeurs citées par M. Brocard, on a

$$x = 2.$$

Un cas voisin est celui de $z = \Delta$: la valeur convenable de x est

$$x = \frac{\Delta}{\delta^2}\alpha^2 + 1,$$

avec la même condition $\alpha < 2\delta$, mais avec la faculté de faire $\delta = 1$, $\alpha = 1$, c'est-à-dire $x = \Delta + 1$.

Parmi les cas périodiques, qui sont la règle générale, il convient d'examiner particulièrement la périodicité simple $z = x$. Ici, c'est le produit $(\Delta - 1)x$ qui doit être carré parfait, et l'on a en conséquence

$$x = \frac{\Delta - 1}{\delta^2}\alpha^2,$$

δ^2 étant diviseur de $\Delta - 1$ et le nombre α étant au plus égal à 2δ, mais δ pouvant être pris égal à 1.

La périodicité binaire exige les conditions

$$\Delta x = y^2 + z, \qquad \Delta z = t^2 + x,$$

d'où

$$(\Delta - 1)(x + z) = y^2 + t^2;$$

elle ne saurait donc se rencontrer qu'à l'égard des modules qui surpassent de l'unité une somme de deux carrés : la question devient par suite plus compliquée et je ne m'y engagerai pas davantage, en observant seulement que le module $\Delta = 21$ offre un exemple de périodicité binaire.

En supposant z donné numériquement au lieu de l'être en fonction de x, en faisant par exemple $z = \Delta - a$, on est conduit à rechercher les carrés compris dans la suite

$$u = \Delta x + a,$$

et les racines x qui produisent ces carrés : en faisant alors z égal aux résultats obtenus, on en obtient de nouveaux, et ainsi de suite. On aura de la sorte toutes les périodes possibles, et les parties hors période par les cas d'impossibilité.

L'opération considérée dans l'énoncé **2730** est, en définitive, connexe à la détermination des résidus quadratiques d'un module donné et des racines qui correspondent à ces résidus, c'est-à-dire à la question **2744**.

E. Malo.

2736. (**1904**, 42) (J. Gillet). — Pour la bibliographie mathématique du jeu de billard, *voir* :

G. Coriolis, *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*, 1835.

H. Resal, *Étude géométrique sur le mouvement d'une sphère pesante glissant sur un plan horizontal* (*N. A.*, 1872, p. 193).

Bogumil, *Das Billardbuch*. Leipzig, 1876.

H. Resal, *Sur un point de la théorie mathématique des effets du jeu de billard* (*C. R.*, t. XCIV, 1882, p. 1548-1551).

H. Resal, *Du choc de deux billes posées sur un tapis de billard* (*C. R.*, t. XCV, 1882, p. 655-659).

H. Resal, *Commentaire à la théorie mathématique du jeu de billard* (*J. M.*, 3e série, t. IX, 1883, p. 65-98).

B. Peirce, *Probabilities at the threeball game of billiards*, 1897.

G.-A. Hemming, *Billiards mathematically treated*. London, 1899.

H. Brocard.

2738. (**1904**, 42) (E.-B. Escott). — *Variation de chiffres dans les cubes successifs.* — Le fait indiqué s'explique aisément :

$$(N \pm x)^3 = N^3 \pm 3N^2x + 3Nx^2 \pm x^3.$$

Si N est un nombre assez grand et voisin d'une puissance de 10, le terme $3Nx^2$ n'aura d'influence sur un chiffre d'un certain rang (si N est voisin de 10^n), de rang $2n$ à partir de la droite, qu'au moment où $3Nx^2$ atteindra une certaine puissance de x, 10^{n-1}.

Par exemple, le cube de 10^4 a son 8e chiffre à partir de la droite qui est un 0, et $(10^4 \pm x)^3$ aura le même 8e chiffre tant que $3x^2$ sera < 1000, c'est-à-dire $x \leqq 18$, ce qui fournit les 37 nombres indiqués de 9982 à 10018.

De même pour $3x^2 < 10.000$, $x \leqq 57$ donnera les 115 nombres de 99943 à 100057 qui auront 0 pour 10e chiffre à partir de la droite, dans leur cube, égal à 0.

Cette remarque s'appliquerait aisément à des puissances supérieures au cube.

A. Boutin.

2739. (**1904**, 65) (E.-B. Escott). — En formulant la question ainsi :

Trouver tous les nombres entiers

$$p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_n^{x_n} \quad \text{et} \quad q_1^{y_1} q_2^{y_2} \ldots q_m^{y_m}$$

dont la différence est a, les p et q étant des nombres premiers donnés tous moindres qu'un nombre fixe,

on est conduit à résoudre en nombres entiers positifs ou nuls x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n l'équation indéterminée

$$p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_n^{x_n} - q_1^{y_1} q_2^{y_2} \ldots q_m^{y_m} = \pm a.$$

Pour les cas $a = 1$ et $a = 2$, j'ai réussi à résoudre complètement cette équation qui aura alors un nombre *fini* de solutions qui peuvent être trouvées toutes en résolvant une série d'équations de Pell (voir *C. R.*, 14 novembre 1898).

Pour $a > 2$ la solution semble être beaucoup plus difficile et il sera extrêmement intéressant de la trouver, même pour des cas particuliers simples comme

$$p_1^{x_1} - q_1^{y_1} = a.$$

Carl Störmer (Christiania).

2740. (**1904**, 66) (E.-B. Escott). — Je n'ai rencontré rien de semblable dans les assez nombreuses propositions que j'ai recueillies en réponse à ma question **2528** (**1903**, 41) relative aux critères de la présence de racines imaginaires dans les équations algébriques.

H. Brocard.

Si l'équation

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + k = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en est de même de ses dérivées. En écrivant que $f^{(n-2)}(x) = 0$ a ses deux racines réelles, on a

$$b^2 - \frac{2n}{n-1} ac < 0.$$

Si cette relation n'a pas lieu, $f(x) = 0$ a deux racines imaginaires.

A. Pellet.

2744. (**1904**, 67) (G. Picou). — *Résidus quadratiques.* — Si l'on sait qu'un nombre N est résidu quadratique d'un nombre premier p,

il est très facile de trouver un nombre k tel que $k^2 - N$ soit un des non-résidus de p.

Alors les solutions de la congruence

$$x^2 \equiv N \pmod{p}$$

sont

$$x \equiv \pm \sqrt{N} \frac{(k+\sqrt{N})^{\frac{p-1}{2}} - (k-\sqrt{N})^{\frac{p-1}{2}}}{2} \pmod{p}.$$

Pour le développement de cette méthode, *voir* mon article : *Un metodo per la rizoluzione della congruenza di secondo grado* (*R. A. N.*, 5[e] fasc., mai 1903).

M. Torelli a donné une autre méthode (*R. A. L. R.*, 5[e] série, t. I, 1[er] semestre 1892, p. 116-120; t. II, 1[er] semestre, p. 259-265).

Pour des Tables d'indices plus étendues que celles de Jacobi, *voir* la traduction italienne par M[lle] Massarini de la *Théorie des congruences de Tchébycheff*. Rome, Erm. Loescher, 1895.

M. Cipolla (Palerme).

Autre solution de M. E. Malo, communiquée à M. Picou.

2745. (**1904**, 67) (G. Picou). — *Résidus quadratiques.* — On trouve dans toutes les Théories des nombres une méthode pour résoudre la congruence

$$N \equiv x^2 \pmod{p_1, p_2},$$

connaissant les solutions des congruences

$$N \equiv x^2 \pmod{p_1}, \qquad N \equiv x^2 \pmod{p_2},$$

p_1, p_2 étant des nombres premiers ou des puissances de nombres premiers.

Au sujet d'une méthode différente de l'ordinaire, je viens de publier dans les *Comptes rendus* de l'Académie de Naples un article : *Applicazione della teoria delle funzioni numeriche di E. Lucas alla risoluzione delle congruenza di secondo grado,* où je trouve les solutions de la congruence $x^2 \equiv N \pmod{n}$, n étant un nombre composé, à l'aide d'une méthode que j'ai déjà développée pour les cas d'un module premier dans les mêmes *Comptes rendus,* 5[e] fasc., mai 1903.

M. Cipolla (Palerme).

Autre solution de M. E. Malo, communiquée à M. Picou.

2747. (**1904**, 68) (P.-F. Teilhet). — *β étant racine de*

$$\gamma^2 - 3\beta^2 = 1,$$

en nombres entiers, $6\beta^2+1$ n'est pas un carré. — Les solutions de $\gamma^2 - 3\beta^2 = 1$ sont

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 2, \quad \gamma_3 = 7, \quad \gamma_4 = 26, \quad \gamma_5 = 97, \quad \gamma_6 = 362, \quad \ldots,$$
$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 4, \quad \beta_4 = 15, \quad \beta_5 = 56, \quad \beta_6 = 209, \quad \ldots,$$

avec les relations de récurrence

$$\gamma_n = 4\gamma_{n-1} - \gamma_{n-2}, \qquad \beta_n = 4\beta_{n-1} - \beta_{n-2}.$$

Les nombres ζ de M. Teilhet sont les γ d'indice impair, et la relation de récurrence entre eux est plus simplement

$$\zeta_n = 14\zeta_{n-1} - \zeta_{n-2}.$$

Les formules

$$\beta_n = \frac{(2+\sqrt{3})^{n-1} - (2-\sqrt{3})^{n-1}}{2\sqrt{3}},$$
$$\gamma_n = \frac{(2+\sqrt{3})^{n-1} - (2-\sqrt{3})^{n-1}}{2}$$

permettent de vérifier diverses relations, particulièrement

$$\gamma_{2n} = (\beta_{n+1} + \beta_n)^2 + 1,$$
$$\gamma_{2n+1} = (\gamma_{n+1} + \gamma_n + 2\beta_n)(\gamma_{n+1} + \gamma_n) - 2 = \gamma_{n+1}^2 + 3\beta_{n+1}^2.$$

La première montre que γ_{2n} n'est jamais un carré.

Considérons la suite

$$1, \quad a, \quad 2a^2 - 1, \quad 4a^3 - 3a, \quad \ldots, \quad u_n = 2au_{n-1} - u_{n-2}$$

qui, pour $a = 7$, est la suite des ζ. Si a n'est pas un carré, les termes de rang $2n$, divisibles par a, mais non par a^2, ne sont pas eux-mêmes des carrés; il suffit donc d'examiner la suite

$$1, \quad 2a^2 - 1, \quad 8a^4 - 8a^2 + 1, \quad \ldots;$$

mais, si l'on pose $2a^2 - 1 = A$, la loi de récurrence de cette suite est

$$v_n = 2Av_{-1} - v_{n-2}.$$

Si A n'est pas un carré, tous les termes v_{2n} étant divisibles par A

sans l'être par A^2 ne sont eux-mêmes pas des carrés. Il faudra donc examiner la suite

$$1, \quad 2A^2-1, \quad 8A^4-A^2+1, \quad \ldots,$$

à laquelle s'applique le même raisonnement.

Il faut donc vérifier que, dans la suite des ζ, ceux de rang 2^p+1 ne sont pas des carrés. On a

$$\begin{array}{lll} \zeta_1 = 1, & \zeta_2 = 7, & \zeta_3 = 97, \\ \zeta_4 = 1351, & \zeta_5 = 18817, & \zeta_6 = 262087, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Les derniers chiffres à droite des nombres ζ constituent la période

$$1.7.7.1.7.7\ldots.$$

Les ζ terminés par des 7 ne sont évidemment pas des carrés; seuls, les ζ terminés par des 1 peuvent être des carrés; ils occupent le rang $3k+1$. Je dis que les termes de rang 2^p+1 et ceux de rang $3k+1$ ne peuvent pas coïncider; en effet, 2^p+1 est de la forme $3k$ ou $3k+2$, mais jamais de la forme $3k+1$. Donc tous les ζ terminés par 1 sont divisibles par un ζ_{2^p+1} (terminé par 7) sans l'être par le carré de ce ζ; ce ne sont donc pas des carrés. Ainsi

ζ_4	est divisible par	$\zeta_2 = 7$	et non par	7^2
ζ_7	»	$\zeta_3 = 97$	»	97^2
ζ_{13}	»	$\zeta_5 = 18817$	»	18817^2
...	....	....	....	......
$\zeta_{3,2^p+1}$	est divisible par	ζ_{2^p+1}	et non par	$\zeta^2_{2^p+1}$

Conclusion. — L'équation indéterminée

$$x^4 = 1 + 3y^2$$

est impossible en nombres entiers. A. BOUTIN.

Écrivons les nombres consécutifs n, $n+1$, $n+2$ en mettant en évidence les facteurs $2A^2$; nous aurons nécessairement

$$n = 2^a 3^b N^2, \qquad n+1 = 2^{a_1} 3^{b_1} N_1^2, \qquad n+2 = 2^{a_2} 3^{b_2} N_2^2,$$

les nombres N, N_1, N_2 étant premiers entre eux. On a par suite les

relations suivantes :

$$2^{a_1}3^{b_1}N_1^2 - 2^a\,3^b\,N^2 = 1,$$
$$2^{a_2}3^{b_2}N_2^2 - 2^{a_1}3^{b_1}N_1^2 = 1,$$
$$2^{a_2}3^{b_2}N_2^2 - 2^a\,3^b\,N^2 = 2.$$

Deux quelconques des b sont toujours nuls et celle des relations précédentes qui renferme ces deux lettres prend l'une des deux formes suivantes :

(1) $$2^{\alpha'}M'^2 - 2^{\alpha}M^2 = 1,$$
(2) $$2^{\alpha''}M''^2 - 2^{\alpha}M^2 = 2.$$

Dans la première les α correspondent à deux nombres consécutifs, et dans la seconde à deux nombres non consécutifs.

Si un seul des s nombres est pair, c'est nécessairement $n+1$; alors $\alpha = 0$, $\alpha' = 2\mu$, $\alpha'' = 0$, la relation (1) devient

$$2^{2\mu}M'^2 - M^2 = 1.$$

Elle est insoluble en nombres entiers.

Si n et $n+2$ sont pairs, α' est nul et $\alpha + \alpha'' = 2\mu$, la relation (2) devient

$$2^{\alpha''-1}M''^2 - 2^{\alpha-1}M^2 = 1.$$

Un des α doit être égal à 1 et, par suite, l'autre égal à $2\mu - 1$, et la relation devient

$$2^{2\mu-2}P^2 - Q^2 = \pm 1.$$

Elle n'est pas soluble en nombres entiers.

La démonstration réussirait tout aussi bien en substituant à s un nombre premier quelconque. Donc la relation

$$n(n+1)(n+2) = mA^2 \qquad (m \text{ premier})$$

n'est pas soluble en nombres entiers.

En posant $n+1 = x$ et $mA^2 + x = y$, on obtient les deux équations suivantes

$$\left.\begin{aligned} x^3 - x - mA^3 &= 0 \\ (y - mA^2)^3 - y &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left(\begin{matrix} m \text{ étant un nombre premier} \\ \text{quelconque} \end{matrix}\right)$$

qui, d'après ce qui précède, ne sont pas solubles en nombres entiers.

MATHIEU.

QUESTIONS.

612. **[I19b]** (**1895**, 281) Si l'équation de Fermat $a^p + b^p = c^p$ peut être résolue en nombres entiers, en dehors du cas où $p = 2$, elle doit l'être au moins pour un nombre premier impair. Quand p est premier et impair, les quantités a, b, c ont nécessairement la composition ci-après :

$$a = x + y + z, \qquad b = x + z, \qquad c = x + y.$$

Les quantités x, y, z sont elles-mêmes de la forme

$$x = \mathrm{M}\,\frac{p^{p(v+1)-1} + q^{p(u+1)}}{2}\,p^{v+1}q^{u+1},$$
$$y = p^{p(v+1)-1},$$
$$z = q^{p(u+1)}.$$

Enfin M, p, q doivent satisfaire aux relations

$$\mathrm{M}p^{v+1}q^{u+1} = 2^{\mu\theta}a^{\theta} - 1, \qquad 2^{\mu\alpha}a^{\alpha} = p^{p(v+1)-1} + q^{p(u+1)}.$$

Dans ces relations, p et q sont premiers entre eux et impairs; q est plus grand que 1; u, v, θ, μ, α sont entiers et positifs ou nuls. Cette proposition, dont j'ai la démonstration, est un acheminement vers la démonstration de la proposition de Fermat; est-elle connue?

P. Worms de Romilly.

613. **[I3aα]** (**1895**, 281) m étant un nombre premier, on ne peut satisfaire à la fois aux deux congruences

$$(\alpha + 1)^{m-1} \equiv 1, \qquad \alpha^{m-1} \equiv 1 \qquad (\bmod m^2)$$

que lorsque $m - 1$ est divisible par 6.

En désignant par γ une racine primitive de

$$x^{m(m-1)} \equiv 1 \qquad (\bmod m^2),$$

et par η, δ, ν des nombres entiers dont le dernier est le quotient $\frac{m-1}{6}$, les solutions seront données par

$$\gamma^{\nu} \equiv \eta + 1 + \delta m, \qquad \gamma^{4\nu} \equiv m - \eta - 1 + (m - \delta - 1)m,$$

$$\gamma^{2\nu} \equiv \eta + \delta m, \qquad \gamma^{5\nu} \equiv m - \eta + (m - \delta - 1)m;$$

on en conclut que, lorsque m est un nombre premier, les seules valeurs de u supposé non-multiple de m qui satisfont à la congruence $(u^m + 1)^m - u^{m^2} \equiv 1$ $(\bmod m^2)$ sont de la forme $u = am - 1$.

Ces propositions sont-elles connues?

P. Worms de Romilly.

618. [V7] (1895, 283) E. Catalan a appelé l'attention sur le fait que Rolle a employé en 1690 la lettre grecque *théta* (θ) pour marquer le *rien* (*I. M.*, t. I, p. 178; t. II, p. 117).

M. P. Tannery voit dans cet emploi seulement un essai *particulier* pour éviter la confusion avec la lettre o. Mais il convient de faire observer que le mot *théta* a été employé dans le sens de *rien* déjà dans un écrit intitulé : *Opusculum de praxi numerorum* (Paris, 1503) qui semble être identique à l'*Algorismus* de Sacrobosco (*B. M.*, 1887, p. 120; 1894, p. 73-78).

Est-il probable que Rolle ait eu connaissance de cet écrit?

G. Eneström (Stockholm).

621. [S1b] (1895, 284) Quel était l'appareil imaginé par Léonard de Vinci pour mesurer la vitesse d'un navire?

Est-il décrit dans le *Codex Atlanticus?*

J. Perott (Worcester, U. S. A.).

622. **[H11c]** (**1895**, 284) Résoudre l'équation suivante :

$$1 + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) e^{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) + m \frac{\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right)\right]^4}{x_1^2}} = 2x_1^2 \frac{\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{x}{f(x)} \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{x\, f(x)}\right] dx}{\left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{x\, dx}{f(x)}\right]^2}$$

par rapport à $f(x)$ (sous forme implicite ou explicite, peu importe, mais en termes finis). *Trébig.*

627. **[V]** (**1895**, 285) Quelqu'un pourrait-il me dire où et quand la remarque suivante a été formulée : « La *projection verticale* d'un cylindre droit, éclairé uniquement par le Soleil théorique, n'a pas de raie blanche, c'est-à-dire, en d'autres termes, est *invisible* » ? BOUDIN.

628. **[B10c]** (**1895**, 285) Déterminer six formes binaires a_i ($i = 1, \ldots, 6$) et six formes quadratiques b_i de telle façon que les cinq formes cubiques $(a_i - a_k)b_i$ (k fixe) appartiennent au même faisceau linéaire pour chaque valeur de k. E. WAELSCH (Prague).

629. **[N¹1g]** (**1895**, 286) Une surface quadratique étant donnée par l'équation $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$, comment peut-on construire les droites du complexe quadratique, donné par l'équation

$$\alpha(\beta - \gamma)^2 p_{1,4}^2 + \beta(\gamma - \alpha)^2 p_{2,4}^2 + \gamma(\alpha - \beta)^2 p_{3,4}^2 \\ - \beta\gamma\, p_{2,3}^2 - \gamma\alpha\, p_{3,1}^2 - \alpha\beta\, p_{1,2}^2 = 0,$$

où $p_{i,k}$ sont les coordonnées rectilignes?

Ce complexe contient les tangentes des douze coniques cuspidales de la développée de la surface donnée.

E. WAELSCH (Prague).

2809. [R8d] Je désirerais savoir où l'on pourrait trouver la solution la plus complète, c'est-à-dire sans aucune hypothèse, des équations différentielles

$$\frac{d\left(x^2 \frac{dy}{dt}\right)}{dt} = \text{A} \sin y . x \frac{dz}{dt} + \text{B} x \frac{dx}{dt},$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \text{C}(\text{D} - x^2),$$

$$x^2 = (\text{E} - z)z$$

relatives à la théorie du pendule de Foucault.

M. Wolkow.

2810. [M'5kα] Connaît-on le théorème suivant de la théorie des cubiques circulaires?

Si, par le point double O *d'une cubique circulaire, on mène des couples de droites* OM, OM'; ON, ON'; ... *également inclinées sur les bissectrices de l'angle des tangentes au point double :*

1° *Les cordes* MM', NN', ... *interceptées par ces couples de droites sont parallèles à l'asymptote de la courbe;*

2° *Les cercles* OMM', ONN', ... *passent par un second point fixe* ω, *projection du point double sur la corde interceptée dans la courbe par les bissectrices de l'angle des tangentes en ce point.*

Comme conséquence immédiate, on voit que :

Les bissectrices de l'angle des tangentes au point double d'une cubique circulaire rencontrent cette courbe en deux points tels que les tangentes en ces points sont parallèles à l'asymptote.

Les réciproques sont vraies.

T. Lemoyne.

2811. [Q1d] Si, par extension de mots, on convient de dire que toute courbe, de la forme

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

constitue un ensemble de points *analytiques* (c'est-à-dire à coordonnées finies et mesurables), force ne sera-t-il pas de dire que toute pseudo-surface, de la forme

$$dy = \varphi(x)\,dx,$$

constitue un ensemble de points, *géométriques* sans doute, mais non pas analytiques?

Par contre, les expressions des arcs de ces lieux, savoir :

$$\int_0^t \sqrt{f'^2 + g'^2}\,dt, \qquad \int_0^x \sqrt{1+\varphi^2}\,dx,$$

ne définissent-elles pas des *contours* qui, au même titre, le cas échéant, peuvent être *rectifiables?* ISSALY.

2812. [Q1d] Étant donnée la pseudo-courbe ou l'hyper-courbe

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x):$$

1° Peut-on affirmer que, lorsqu'on a simultanément

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi'(x) = 0, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} \neq 0,$$

trois points consécutifs du lieu sont en ligne droite ou, autrement dit, qu'il y a inflexion?

2° Le cas échéant, peut-on fixer, par le calcul, le *point* précis où cette inflexion se produit? ISSALY.

2813. [I25b] I. Tout nombre premier du type $8n+1$ peut être composé avec 1 triangle, 2 carrés et 2 pentagones, tous $\neq 0$ (*comp.* **1901**, 183; **1903**, 229).

II. Tout nombre premier $8n+5$ peut être formé avec 2 triangles, 1 carré, 1 hexagone et 1 octogone, tous $\neq 0$ (*comp.* **1903**, 302).

III.

$$N = a^2 + b^2 + c^2 + d^3 + e^4 + f^4 + g^4 \qquad (a, b, c, d, e, f, g \neq 0)$$

(N entier > 6; $N = 8, 9, 11, 12, 19, 24$ et 27 exceptés).

IV. Toute puissance cinquième n^5 peut se développer en une somme de $n-1$ décagones et de n carrés,

$$3^5 = (27 + 175) + (1 + 4 + 36).$$

V. Toute puissance septième n^7 peut se développer en une somme de n heptagones, de $n-1$ hexagones et de $n-2$ triangles de rang pair,

$$3^7 = (1 + 112 + 1525) + (6 + 15) + (528).$$

VI. Tout bicarré est la somme de 2 cubes et de 2 hexagones, $\neq 0$.

VII. n^{14} est la somme de 2 triangles de rang pair et de 2 hexagones, $\neq 0$,

$$2^{14} = (78 + 6105) + (190 + 10011)$$

(*comp.* **1903**, 6, 301).

VIII. n^{26} est la somme de 3 triangles de rang pair et de 3 hexagones, $\neq 0$.

Exemple :

$$2^{26} = (21 + 171 + 31\,430\,556) + (28\,680 + 36\,856 + 35\,611\,580)$$

(*comp.* **1902**, 230).

IX. Tout carré entier $n^2 > 6^2$ est la somme de 8 carrés $\neq 0$, dont 4 au moins sont distincts (*comp.* **1902**, 68).

X. Le produit, augmenté de 1,

$$1.2.3.5.7\ldots p + 1$$

des n premiers nombres premiers, qui est la somme de 4 carrés $\neq 0$, pour $n > 2$, est aussi la somme de 4 carrés et de 1 octogone, $\neq 0$, pour $n > 3$ (*comp.* **1904**, 68).

G. de Rocquigny.

RÉPONSES.

582. (1895, 181; 1903, 249) (C. Couturier). — *Représentation des séries équiconvergentes par des intégrales définies.* — Lorsqu'il s'agit d'une seule variable, et que le domaine de convergence uniforme est à deux dimensions, les termes de la série y étant des fonctions synectiques, le problème est résolu par l'intégrale de Cauchy.

Si la région de convergence uniforme est à une seule dimension, mais la série dérivable terme à terme, la réponse est également immédiate, à cause de la relation

$$f(x) = f(a) + (x-a)\int_0^1 f'[t(x-a)]\,dt.$$

Je suppose maintenant que la somme $f(x)$ de la série donnée n'admette pas de dérivée, mais qu'il existe une constante positive $s<1$ telle que

$$\lim_{\xi=\xi_1} \frac{f(\xi)-f(\xi_1)}{(\xi-\xi_1)^{1-s}} = 0$$

pour toute valeur ξ_1 qui fait partie de l'intervalle étudié. J'admets ensuite l'existence de l'intégrale

$$\chi(\zeta) = \int_a^\zeta [f(\xi)-f(\zeta)](\zeta-\xi)^{s-2}\,d\xi,$$

qui est, en même temps, supposée continue. Alors on a

$$f(x) = \frac{\sin s\pi}{\pi}\int_a^x f(z)(x-z)^{-s}(z-a)^{s-1}\,dz$$
$$+(s-1)\frac{\sin s\pi}{\pi}\int_a^x \chi(z)(x-z)^{-s}\,dz$$

(*Mém. de l'Académie de Prague*, 2ᵉ année, n° 34, 1893).

M. Lerch (Fribourg).

603. (**1895**, 205) (H. TARRY). — *Problème des reines.* — Le savant auteur de *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* (Leipzig, Teubner, 1901), M. le D[r] W. Ahrens, de Magdebourg, a appelé mon attention sur la question 603 (**1895**, 205), restée jusqu'ici sans réponse dans l'*Intermédiaire,* parce que je lui avais communiqué, en 1902, le résultat de ma solution du *Problème des reines* pour le cas de $n = 12$. Ce résultat a été déjà publié par M. Ahrens dans un article de l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften,* t. I, p. 1082, Leipzig, Teubner ([1]). Je suis donc en état de vous donner la réponse exacte à la question précitée. Mais d'abord il faut formuler avec plus de précision la question même de M. Tarry. Il dit : « solutions commençant par 1, c'est-à-dire en plaçant la première reine *sur une des cases* de la première colonne verticale ». Il est évident qu'il veut dire « *sur la première case* de la première colonne » et qu'il demande combien il y a de solutions en plaçant la première reine sur la *deuxième, troisième,* etc. case de la première colonne. Encore dois-je observer que le nombre de 248 ([2]) que M. Tarry a trouvé pour les solutions commençant par 1 n'est pas correct. Cela m'étonne, car après avoir trouvé (comme moi-même) le nombre exact des solutions pour $n = 11$, il lui était facile de fixer le nombre 500 des solutions pour $n = 12$ commençant par 1.

Voici les résultats relatifs au cas de $n = 12$:

Commencement.	Solutions.
1 ou 12............	500
2 » 11............	797
3 » 10............	1147
4 » 9............	1353
5 » 8	1599
6 » 7............	1620
Total.........	7016 × 2 = 14032 solutions

Ces solutions se réduisent à 1766 primordiales : 250 commençant par 1; 685 par 2; 594 par 3; 201 par 4; 36 par 5.

KOPFERMANN (Gr. Lichterfelde).

([1]) Où, au lieu de « 1765 », il faut lire « 1766 ».

([2]) « Qui correspondent à 124 simples » (ED. LUCAS, *Récréations mathém.,* 2[e] édit., t. I, p. 231; Paris, 1891).

687. (**1895**, 401) (*Anonyme*). — ***Formule approchée donnant le périmètre de l'ellipse*** (**1896**, 7, 137, 234; **1897**, 64, 202; **1900**, 409; **1903**, 281). — On m'a communiqué ces jours-ci une question de l'*Intermédiaire des Mathém.* (**1895**, p. 401) qui, malgré la mention de *mathématicien italien,* me concerne certainement et doit se rapporter aux quelques lignes publiées par le *Genevois* du 28 septembre 1893, à propos de ma formule d'approximation

$$E = 4\,\frac{(a-b)^2 + \pi ab}{a+b}$$

pour évaluer la périphérie de toute ellipse E ayant a et b pour demi-axes.

Or cette expression algébrique s'obtient en faisant $\varphi = \dfrac{a-b}{a+b}$ dans cette formule fondamentale

$$E = \pi(a+b) + \varphi(4-\pi)(a-b),$$

que j'ai déduite de certaines relations géométriques existant entre l'ellipse, la sinusoïde et la parabole. Vu sa simplicité, elle pourrait être quelquefois utile dans la pratique. Ainsi, voulant mesurer le contour d'une ellipse ayant 100^m pour grand axe et 50^m pour petit axe, on trouverait, en se servant de logarithmes à six décimales, $242^m,77$ au lieu de $242^m,21$ que donnerait le calcul analytique par séries.

Relativement parlant, l'erreur par excès diminuerait à mesure que le rapport $\frac{b}{a}$ s'élèverait au-dessus de $\frac{1}{2}$, tandis qu'elle augmenterait dans le cas contraire.

Mais on peut pousser plus loin l'approximation en remplaçant le rapport des deux longueurs $(a-b)$ et $(a+b)$ par celui des arcs sous-tendus par ces droites dans le cercle de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$ ou, ce qui revient au même, en faisant

$$\varphi = \arcsin\frac{a-b}{2\sqrt{a^2+b^2}} : \arcsin\frac{a+b}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Calculant de cette manière le quadrant des ellipses ayant constamment l'unité pour demi-grand axe a, on trouve :

Avec $b = 0,9$ .... $\frac{E}{4} = 1,4932\,(7)$

» $b = 0,5$ .... $\frac{E}{4} = 1,2110\,(05)$

Comme on peut le vérifier par les *Tables* de Legendre et plus commodément par celles de Kulik, les quatre premières décimales sont justes, mais celles des parenthèses sont trop faibles. On arriverait à l'exactitude pour une ellipse, dont le rapport des axes serait de très peu inférieur à $\frac{1}{4}$. Puis notre formule donnerait une erreur par excès. Ainsi l'on aurait :

Avec $b = 0,2\ldots$ $\frac{E}{4} = 1,052\ldots$ au lieu de $1,050\ldots$

» $b = 0,1\ldots$ $\frac{E}{4} = 1,018\ldots$ » $1,0159\ldots$

CAMUS (Turin).

2243. (**1901**, 309) (V. AUBRY). — ***Roulettes gauches*** (**1902**, 242; **1904**, 98). — Les intéressantes réponses de M. Brocard sont surtout relatives aux courbes sphériques. La question reste posée pour les courbes gauches quelconques. V. AUBRY.

2404. (**1902**, 205) (*Ymer*). — ***Applications de la fonction***

$$y = \log \text{nép tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

(**1903**, 165). — Toute une catégorie d'applications de cette formule se rencontre dans les recherches que CATALAN a publiées à diverses reprises, à la suite de ses études de la constante $G = 0,915965\ldots$, somme de la série

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots.$$

Voir : Mémoire sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies (*M. A. B.*, t. XXXIII, 1865).

Mélanges mathématiques (*passim*).

Recherches sur la constante G et sur les intégrales eulériennes (*Mém. de Pétersb.*, 7e série, t. XXXI, 1883, 51 pages), etc.

BRESSE. — Note sur la recherche des fonctions auxiliaires dans l'application de la méthode de Kummer à la sommation des séries (*C. R.*, t. LXIV, 1867, p. 1023 et 1139).

Il existe une étroite corrélation entre ces recherches et l'objet de la question **2404**, en raison de ce fait que la constante G représente

une foule d'intégrales définies, parmi lesquelles

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathcal{L} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx.$$

Il ne sera pas inutile d'observer, également, que la fonction y a pour dérivée $\frac{1}{\cos x}$.

H. Brocard.

2418. (**1902**, 228) (H. Brocard). — Examen fait des manuscrits du Recueil 954 de la Bibliothèque d'Orléans, j'ai constaté qu'aucun d'eux n'a trait au calcul par chiffres complémentaires.

Quant aux Lettres à une dame sur les Mathématiques attribuées à Berthevin d'après le Catalogue, leur signature biffée de trois réseaux de hachures ne paraît pas correspondre au nom de Berthevin, bien qu'on ne puisse rétablir le nom de l'Auteur, qui s'intitulait Maître de Mathématiques. Ces papiers se sont peut-être trouvés parmi ceux de Berthevin, mais ils ne sont pas de son écriture.

Un écrit mathématique de Berthevin a été indiqué dans l'énoncé 2779 (**1904**, 115).

H. Brocard.

2439. (**1902**, 260) (N. Plakhowo). — Voir *Z. H.*, 1903, p. 130 les indications bibliographiques données en réponse à la question de M. Geuer (*Ibid.*, 1902, n° 1987, p. 60).

Ce point rencontré par Gauss dans sa Méthode des moindres carrés (1821-1826) est aujourd'hui appelé *point de Grebe* ou de *Lemoine*.

H. Lieber, *Ueber die Gegenmittellinien und den Grebe'schen Punkt*. Progr. Stettin (1886), p. 10, n°s 36 et 37.

Emmerich, *Die Brocard'schen Gebilde* (1891), § 19.

Fuhrmann, *Synthetische Beweise* (1890), p. 95 et suiv.

Voir aussi la Notice très documentée de M. E. Lemoine sur les Origines de la Géométrie du triangle (*A. F.*, Grenoble, 1885). On y trouve (p. 41) cette remarque : « Avant Gauss, du reste, Simon Lhuilier (*Éléments d'Analyse géométrique et d'Analyse algébrique*, 1809, p. 296) s'occupe dans le triangle et dans le tétraèdre d'un point tel que la somme des carrés de ses distances aux côtés ou aux faces soit minima. »

H. Brocard.

2483, 2484 et **2485.** (**1902**, 316, 317) (P.-F. Teilhet). — *Facteurs de* x^2+1 (**1903**, 170, 245; **1904**, 50). — Si les facteurs de x^2+1 sont

de la forme a^2+b^2, soit

$$x^2+1=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux réduites consécutives d'une fraction continue; alors, puisque $ad-bc=\pm 1$, nous aurons

$$x=ac+bd.$$

Si $a=1$, $b=1$, on a

$$d=c\pm 1,$$

ce qui donne la formule de 2484. La forme la plus générale pour les réduites d'une fraction continue est exprimée par le symbole d'Euler $[a, b, c, \ldots, g]$ [*voir* la question 2559 (1903, 97)] :

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{[a, b, \ldots, g]}{[b, \ldots, g]}, \qquad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}=\frac{[a, b, \ldots, g, h]}{[b, \ldots, g, h]}.$$

La formule la plus générale est alors

$$\begin{aligned} x^2+1 &= (u_n u_{n+1}+v_n v_{n+1})^2+1 \\ &= [h, g, \ldots, b, a, a, b, \ldots, g]^2+1 \\ &= (u_n^2+v_n^2)(u_{n+1}^2+v_{n+1}^2). \end{aligned}$$

Exemple. — Réduisons $\frac{10}{7}$ en fraction continue; les réduites $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{10}{7}$ donnent

$$(3^2+2^2)(10^2+7^2)=44^2+1.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2525. (1903, 40) (H. Brocard). — *Problème de Géométrie.* — Ce problème ne peut pas se résoudre à l'aide de la règle et du compas.

T. Hayashi (Tokyo, Japon).

2563. (1903, 99) (G. Espanet). — *Propriétés du multilatère.* — Les circonstances remarquées par M. Espanet trouvent leur explication dans les considérations géométriques par lesquelles j'ai résolu la question 1556 (1900, 68) et qui sont applicables au cas du multilatère aussi bien qu'au cas du triangle.

En effet, si, à tout point M du plan on associe le point M' qui est le barycentre du polygone formé par les projections de M sur les côtés du multilatère donné (*barycentre podaire* selon l'heureuse

dénomination de M. d'Ocagne), on établit entre les systèmes ponctuels (M) et (M′) une homographie possédant, comme toute homographie plane, trois points et trois droites autohomologues, mais avec cette particularité que trois de ces six éléments, une droite et deux points, sont rejetés à l'infini et que les droites autohomologues à distance finie sont rectangulaires. En traitant la question par le calcul on arrive très vite, non seulement à cette conclusion, mais encore à reconnaître l'identité des deux droites autohomologues à distance finie avec les axes des coniques considérées dans l'énoncé **2563**, dont le centre est le point de Lemoine (généralisé) du multilatère.

D'autre part, la Géométrie enseigne le moyen de construire les éléments autohomologues : il faut pour cela mener, par un point O arbitrairement choisi sur un cercle (C) arbitrairement tracé dans le plan, des parallèles aux divers côtés du multilatère donné. Soient alors 1, 2, 3, ..., i, ..., j, ..., k, ..., n, les deuxièmes points de rencontre de ces parallèles avec le cercle et G leur barycentre : on tirera le diamètre $\overline{Gc}$ dont les extrémités sont les points U et V, et l'on n'aura plus qu'à joindre ces points à l'origine pour avoir, *en direction*, les droites autohomologues.

Pour les construire, *en situation*, on partira d'un couple quelconque de points conjugués M, M′, puis, menant par M deux parallèles aux droites autohomologues, on prendra sur chacune d'elles un nouveau point, dont on déterminera le conjugué : si P est par exemple sur la parallèle à $\overline{OU}$ passant par M, son conjugué P′ sera sur la parallèle à $\overline{OU}$ passant par M′; mais de plus les droites $\overline{MM'}$, $\overline{PP'}$ se couperont en un point de la droite autohomologue elle-même qui a la direction de $\overline{OV}$. Ce paragraphe répond à la question **2507** (**1903**, 11, 174, 263; **1904**, 100).

Mais, pour insister seulement sur ce qui est relatif aux directions des droites autohomologues, j'observerai que la manière de les déterminer, signalée au paragraphe antéprécédent, comporte diverses variantes. Ainsi, au lieu de considérer les points 1, 2, 3, ..., i, ..., j, ..., k, ..., n, en bloc pour ainsi dire, on peut les grouper d'abord par couples, par triples, etc., comme on peut grouper les côtés eux-mêmes du multilatère par couples, triples, etc. Prenant alors les centres de gravité de ces couples, ou triples, de points, c'est-à-dire faisant entrer en ligne de compte $\frac{n(n-1)}{2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, etc.

nouveaux systèmes de points, le point G sera toujours le barycentre de chacun de ces nouveaux systèmes.

Or on peut imaginer que l'on procède par voie de composition successive des éléments envisagés et que l'on soit arrivé à la pénultième phase de l'opération, où il ne reste plus à composer que le barycentre d'un seul couple, ou triple, avec le barycentre de tous les autres couples, ou triples, déjà construit. Il est bien clair alors que si le barycentre du couple, ou du triple restant, coïncide avec le centre du cercle (C), ou si même il se trouve de lui-même en ligne droite avec ce centre et avec le barycentre des autres couples, ou triples, la détermination des directions $\overline{OU}$, $\overline{OV}$ sera en réalité indépendante de la dernière construction; en remarquant toutefois que dans le cas de coïncidence avec le centre du cercle on a affaire à une propriété *intrinsèque* du couple, ou du triple, tandis que dans l'autre cas il y a une certaine dépendance de ce couple, ou triple, au reste de la figure.

Ce point bien éclairci, il est hors de doute que le calcul algébrique doit pouvoir être présenté sous une forme qui mette en relief les circonstances que le raisonnement géométrique vient d'expliquer. Par exemple, dans la décomposition par triples, la condition pour que le barycentre du triangle ijk coïncide avec le centre du cercle circonscrit est équivalente à la condition que ce triangle soit équilatéral, et cette condition à son tour implique que les côtés correspondants du multilatère donné forment un triangle équilatéral. Et, lorsqu'il n'y a pas de coïncidence du barycentre et du centre, il suit du même raisonnement géométrique que l'influence du dernier triple, dans la construction des droites $\overline{OU}$ et $\overline{OV}$, se mesure en quelque sorte par l'écart de ces deux points. On conçoit donc que, dans l'expression algébrique de laquelle dépend la détermination des droites $\overline{OU}$, $\overline{OV}$, chaque triple de droites intervienne par l'expression

$$1 - 8 \cos A \cos B \cos C,$$

qu'on peut appeler le *module d'asymétrie ternaire* de ce triple.

Semblablement, en répartissant par couples les droites du système donné, on peut mettre le radical considéré par M. Espanet sous la forme

$$\sqrt{-n(n-2) + 2(1 + \cos 2\theta_{ij})},$$

en désignant par θ_{ij} l'angle des droites numérotées i et j : il est ainsi

rendu évident, par le calcul comme par la voie géométrique, que, dans le fractionnement par couples, un couple rectangulaire est sans influence sur la direction des droites autohomologues.

E. Malo.

2384. (**1903**, 147) (E.-N. Barisien). — *Lieu relatif à deux coniques* (**1903**, 320). — Soient a, b les demi-axes d'une ellipse; ξ, η les coordonnées du centre dans un système rectangulaire; l'équation de l'ellipse dans le même système peut s'écrire :

$$F \equiv (\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta) : \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2} = 0.$$

Si x, y sont les coordonnées d'un point quelconque du plan, sa distance au centre de l'ellipse est

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2};$$

t étant la longueur d'une tangente issue de ce point à l'ellipse, on a :

$$ut^4 - 2vt^2 + w = 0,$$

avec

$$u = (F + ab)^2,$$
$$v = F[(F - ab)r^2 + (F + ab)(a^2 + b^2)],$$
$$w = F^2[4abF + (r^2 - a^2 - b^2)^2].$$

Soient données *deux* ellipses, la condition pour que les tangentes issues d'un point soient égales est

$$(w_2 u_1 - w_1 u_2)^2 = 4(u_1 v_2 - u_2 v_1)(v_1 w_2 - v_2 w_1),$$

équation dont le degré est $\overline{\overline{<}}\, 20$, et non 36, comme l'indiquait M. Espanet (**1903**, 320).

Un cas intéressant est celui où les axes sont respectivement égaux et rectangulaires, les coniques ayant même centre.

Les communes sécantes, qui passent par le centre, comptent chacune deux fois dans le lieu et la courbe restante est ainsi C_{16}.

Elle se compose de huit branches égales.

Weinmeister (Tharandt).

2618. (**1903**, 178) (G. Estanave). — *Transformation d'intégrales définies en sommes.* — L'intégration par parties des inté-

grales

$$\int z^q \sin(jz)\,dz \quad \text{et} \quad \int z^q \cos(jz)\,dz$$

permet de ramener à o l'exposant entier q.

Il suffit de remarquer que

$$\sin(jz) = -\frac{1}{j}\frac{d}{dz}\sin\left(jz + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos(jz) = -\frac{1}{j}\frac{d}{dz}\cos\left(jz + \frac{\pi}{2}\right),$$

et d'intégrer par parties sur ces facteurs. Cette intégration, répétée q fois, conduira à une somme de $(q+1)$ termes. En passant de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie aux limites o et π, on aura un développement limité, suivant les puissances de π.

Cet artifice est dû, je crois, à Bierens de Haan.

V. Williot.

2665. (**1903**, 256) et **2666** (**1903**, 257) (V. Aubry). — *Décomposition de* 2^n+1 *et* 2^n-1 (**1903**, 328; **1904**, 120). — E. Lucas (*A. J. M.*, t. I) donne les théorèmes suivants déduits du théorème de Fermat :

Si $4q+3$ *et* $8q+7$ *sont des nombres premiers, le nombre* $2^{4q+3}-1$ *est divisible par* $8q+7$.

Tous les diviseurs de 2^n-1 qui ne divisent pas un nombre plus petit de même forme sont de la forme $kn+1$.

Tous les diviseurs de 2^n+1 qui ne divisent pas un nombre plus petit de même forme sont de la forme $2kn+1$.

2^n+1 ne contient aucun nombre premier de la forme $8q+7$.

D'autres articles ont été publiés par E. Lucas dans *B. Bon.* (1877), 10; *A. A. T.* (1876), 11; *A. F.* (1876); *C. R.*, t. LXXXII, LXXXIV, LXXXV, XC.

Ed. Lucas donne une méthode pour déterminer si un nombre de cette forme est premier ou non. L'application se simplifie quand on se sert du système binaire de numération.

Pour les facteurs de $2^{2^n}+1$ *voir* la question 1173. Les facteurs de ce nombre sont remarquables par la similitude de leur forme, $2^m a+1$, où $m > n$.

Dans les *Mathematical papers presented at the Mathematical Congress at Chicago*, 1893, p. 277, M. Pervouchine donne une méthode pour décomposer en facteurs les nombres $2^{2^{12}}+1$, $2^{2^{23}}+1$.

Le procédé consiste dans la comparaison des restes qui s'obtiennent en divisant par le nombre $998 = 10^3 - 2$.

Ce reste s'obtient d'une façon très simple, car, le nombre N étant

$$a_n . 10^{(n-1)3} + a_{n-1} . 10^{(n-2)3} + \ldots + a_1,$$

le reste de la division par 998 sera égal à

$$2\{[2(2a_n + a_{n-1}) + a_{n-2}] + a_{n-3}\} \ldots,$$

et se calcule facilement sur le boulier russe. Ce n'est que dans le cas où les chiffres a_{n+166} se permutent avec les chiffres a_n que la faute de calcul peut passer inaperçue : aussi le rayon de la vérifiation par ce procédé s'étend-il sur 498 chiffres. Dans ce cas, M. Pervouchine recommande d'opérer la division par le nombre $9998 = 10^4 - 2$.

D'autres questions (*I. M.*) relatives à ce sujet sont les questions **266**, **594**, **659**, **660**, **1173**, **1613**, **2253**. En addition à ces références bibliographiques on peut indiquer :

C.-E. Bickmore, *On the numerical factors of* $a^n - 1$ [*M. M.*, (1895), 25, 26].

P. Seelhoff [*Z. S.*, 31 (1886); *A. Gr.*, 2e série, 2 (1885); 2e série, 3 (1886); *A. J. M.*, 7 (1885); 8 (1886)].

Pepin, *Extension de la méthode d'Euler pour la décomposition des grands nombres en facteurs premiers* [*N. L. M.*, 9, Ire Partie (1893), p. 47-76)].

Encyclopädie der Math. Wiss., Band I, Heft 5, p. 576.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2692. (**1903**, 300) (E.-B. Escott). — *Formule algébrique* (**1904**, 124). — Le premier membre de l'équation considérée par M. Escott est $\Delta^n \log x$, la différence élémentaire Δx étant 1 ; la formule

$$\log(x + k) = \log x + \frac{k}{x} - \frac{k^2}{2x^2} + \frac{k^3}{3x^3} - \ldots$$

permet de conclure

$$\Delta^n \log x = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + (-1)^n \frac{\Delta^n 0^{n+1}}{(n+1)x^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{\Delta^n 0^{n+2}}{(n+2)x^{n+2}} + \ldots$$

$$(|x| > n).$$

On a

$$\Delta^n 0^k = D^k_{z=0}(e^z - 1)^n.$$

Lambda.

2716. (1904, 8) (E. Maillet). — *Fonctions entières.* — Nous insérons, comme pouvant se rattacher à cette question, la Communication suivante de M. G. Remoundos. La Rédaction.

Dans un travail, paru dans les *Arkiv för matematik, astronomi och fysik utg. af. k. svenska vetenskapsakademien* (1904, Band I), M. Wiman a signalé un certain défaut dans le complément apporté par M. Maillet au théorème bien connu de M. Hadamard sur le module minimum (¹).

M. Wiman substitue au théorème de M. Maillet le suivant :

Si l'on décrit autour de chaque zéro un cercle de rayon r_n^{-k}, k désignant un nombre positif aussi grand que l'on veut, on a, pour r assez grand, en tout point extérieur à ces cercles,

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

La démonstration de ce théorème a été publiée par M. B. Lindgren dans sa thèse : *Sur le cas d'exception de M. Picard,* p. 22 (Upsala, 1903).

Or, je démontre qu'il n'y a qu'à apporter un certain complément dans la démonstration même de M. Maillet pour arriver au théorème suivant, d'une précision plus grande que celui de M. Wiman, savoir :

Si de la circonférence de rayon r assez grand on exclut certains arcs de longueur totale inférieure à

$$e^{-r^{\alpha}},$$

α étant un nombre positif QUELCONQUE *inférieur à ε, tous les autres points de la circonférence satisfont à l'inégalité*

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Il est vrai que M. Wiman énonce une proposition analogue, en excluant de la circonférence des parties dont la longueur totale est plus petite qu'un nombre positif donné arbitraire par rapport à celle des parties qu'on conserve; mais il est aisé de voir que ce théorème est moins précis que celui que nous venons d'énoncer.

(¹) *Voir* E. Maillet, *Sur les fontions entières et quasi-entières* (*Journal de M. Jordan,* 1902).

Le théorème de M. Maillet prend ainsi une forme très utile dans les applications. C'est là, semble-t-il, la précision la plus extrême que l'on puisse exiger du théorème de M. Hadamard, dans le cas d'ordre fini.

Juin 1904. G. Remoundos.

2721. (**1904**, 9) (P. Renard). — (**1904**, 112). — La traduction, par M. H. Fehr, du Rapport cité de M. W.-F. Meyer, *Sur les progrès de la Théorie des invariants projectifs,* a été publiée dans la Ire Partie du *Bulletin des Sciences mathématiques.*

Introduction. 1894, p. 179-196 et 213-220.

Première Partie : Équivalence des formes. 1894, p. 284-308.

Deuxième Partie : Affinité des formes. 1895, p. 87-110, 213-224, 246-264 et 1896, p. 139-151. H. Brocard.

2723. (**1904**, 18) (P.-F. Teilhet). — *Diviseurs de* $N = \dfrac{a^b \pm 1}{a \pm 1}$ (**1904**, 133). — Le premier et le dernier théorèmes sont donnés par E. Lucas dans l'article intitulé : *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* (*A. J. M.,* Vol. I, p. 291).

Soit

$$U_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}, \qquad V_n = a^n + 1;$$

si d est un facteur de n, U_n est divisible par tous les facteurs de U_d. Les diviseurs de U_n qui ne divisent pas un nombre d'ordre moindre sont de la forme $kn + 1$. Les diviseurs de V_n qui ne divisent pas un nombre d'ordre moindre sont de la forme $2kn + 1$.

Le second théorème peut être établi comme suit :

$$N = \frac{a^b \pm 1}{a \pm 1} = \frac{(c\gamma \mp 1)^{c\beta} \pm 1}{c\gamma} \qquad \text{où} \qquad a \pm 1 = c\gamma, \qquad b = c\beta;$$

$$N = \frac{(c\gamma)^{c\beta} \mp \ldots + c^2\beta\gamma \mp 1 \pm 1}{c\gamma} = (c\gamma)^{c\beta-1} \mp \ldots + c\beta \equiv 0 \pmod{c}.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2727. (**1904**, 36) (Issaly). — *Sur les fonctions et les pseudo-surfaces dites analytiques.* — Comme prélude, considérons l'équation de la pseudo-surface *générale* suivante :

$$(1) \qquad dz = \varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy.$$

Si, dans φ et dans ψ, on remplace respectivement x et y par $x + ht$

et $y + kt$, puis qu'on développe le second membre suivant les puissances entières de t et qu'enfin, dans le résultat, on pose $t = 1$, avec $h = dx$, $k = dy$, il viendra

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta z &= (\varphi\, dx + \psi\, dy) \\ &+ \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dx\, dy + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy^2\right] \\ &+ \frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} dx^3 + \left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) dx^2\, dy \right. \\ &\qquad \left. + \left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) dx\, dy^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} dy^3\right] \\ &+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} dx^4 + \ldots + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^3}\right) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

C'est la formule de Taylor *mise en harmonie* avec les pseudo-surfaces que l'équation (1) représente.

Venons maintenant aux pseudo-surfaces *analytiques* que définissent, on le sait, les conditions

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Le Tableau ci-dessus devient alors

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta z &= (\varphi\, dx + \psi\, dy) \\ &+ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(dx^2 + dy^2) + \frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} dy\right](dx^2 + dy^2) \\ &+ \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} dx^2 - \left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}\right) dx\, dy + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \partial y^3\right](dx^2 + dy^2) \ldots. \end{aligned} \right.$$

Comme les deux premiers termes négligés contiennent, eux aussi (nous en avons la certitude), le facteur $(dx^2 + dy^2)$, on est porté à admettre que ce facteur figure dans *tous* les termes, sans exception. Que si cela est, on a donc *rigoureusement* $dz = \Delta z$, pour

$$dx^2 + dy^2 = 0,$$

c'est-à-dire suivant les projections horizontales des lignes asymptotiques du lieu; résultat à rapprocher des *représentations planes* classiques que l'on sait.

Ajoutons que, d'après les mêmes calculs, et par induction encore,

on peut écrire

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \pm \dfrac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \pm \dfrac{\partial^n \psi}{\partial y^n} = 0, \end{cases}$$

selon que n est un multiple impair ou pair de 2.

Ces équations aux dérivées partielles rentrent, on le voit, dans les deux types généraux

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial x^n} \pm \frac{\partial^n \theta}{\partial y^n} = 0,$$

dont le premier fait retrouver, pour $n = 2$, l'équation si connue de Laplace. ISSALY.

2755. (**1904**, 72) (T. LEMOYNE). — *Propriétés des cubiques.* — La deuxième des propriétés signalées sous le n° **2755** est certainement exacte.

Puisqu'il s'agit d'une propriété évidemment projective, elle peut indifféremment être établie soit pour l'énoncé donné dans l'*Intermédiaire,* soit pour l'énoncé transcrit dualistiquement; et comme on est un peu plus familiarisé avec les cubiques ponctuelles, c'est sous ce point de vue que j'aborderai la question : rien de plus facile d'ailleurs que de transcrire dualistiquement le raisonnement lui-même. Je dis donc que :

A, B, C, D, E, F *étant six points d'une cubique et les côtés opposés* $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ *étant supposés se couper sur la courbe en* O, *les troisièmes points d'intersection avec la cubique des côtés* $\overline{BC}$ *et* $\overline{FA}$ *d'une part, et* $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ *d'autre part, déterminent deux droites se coupant de nouveau sur la cubique.*

En effet, soit K le point où la diagonale $\overline{CF}$ rencontre cette cubique, ou, suivant la dénomination de Sylvester, soit K le résiduel des points C, F; soient encore G, H, I, J, respectivement les résiduels des points B et C, F et A, C et D, E et F, et de nouveau M le résiduel de G et H, N celui de I, J : les points K, O et M sont en ligne droite, et de même les points K, O et N. Cela étant, comme une droite ne saurait, par définition, couper une cubique en plus de trois points, les points M et N ne sont qu'un seul et même point.

Quant au premier des énoncés compris sous le n° 2755, il revient à une réponse affirmative donnée à la question suivante :

Peut-on prendre pour les neuf points fixes d'un faisceau de

cubiques les six sommets d'un hexagone et les trois points d'intersection des côtés opposés?

Or, si je représente en abrégé par $\overline{AB} = 0$ l'équation de la droite joignant les deux points A et B, l'équation

$$s.\overline{AB}.\overline{CD}.\overline{EF} + t.\overline{BC}.\overline{DE}.\overline{FA} = 0$$

sera celle d'une cubique passant manifestement par les points A, B, C, D, E, F, ainsi que par les trois points d'intersection P, Q, R des côtés opposés $\overline{AB}$ et $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ et $\overline{EF}$, $\overline{CD}$ et $\overline{FA}$; mais, comme on dispose encore de l'indéterminée $s : t$, on peut assujettir cette cubique à passer par un point M arbitrairement choisi; les neuf points A, B, C, D, E, F, P, Q, R n'équivalent donc qu'à huit points indépendants et ils ne déterminent qu'un faisceau de cubiques et non pas une cubique distincte et unique.

Cette propriété des cubiques comprend comme cas particulier le théorème de Pascal pour les coniques. E. MALO.

2761. (**1904**, 91) (*Carevyge*). — I. *Centre d'un cercle par le compas seul.* — Problème classique, vulgarisé depuis son étude dans l'Ouvrage de Lorenzo Mascheroni, *Géométrie du compas,* édité en italien en 1797 (Pavie) et traduit par Carette (Paris, 1798 et 1828).

Voir, pour ce problème et d'autres du même genre :

BRETON DE CHAMP. — Solution de la question 88 (Prouhet, 1845, p. 376) (*N. A.*, 1850, p. 299-304).

DELISLE ET DIGUET. — Centre du cercle par le compas seul et côté du décagone régulier inscrit (*N. A.*, 1860, p. 35-38).

II. *Perpendiculaire à une droite par la règle seule.* — Je ne crois pas que le problème soit résoluble avec la règle à un seul bord, mais il l'est avec une règle plate à deux bords parallèles, comme l'a montré M. de Coatpont (*N. C.*, 1877 : Sur la Géométrie de la Règle, p. 204-208; et Remarques de M. de Tilly, 1879, p. 438-442).

La même question a été proposée dans l'*Intermédiaire* par M. A. Tummarello sous le n° 2017 (**1901**, 35) et résolue (**1901**, 212).

Voir aussi la question 1202 (*Mire*) (**1898**, 4, 155; **1900**, 202).

H. BROCARD.

Soit (C) le cercle dont on veut déterminer le centre ou, ce qui revient au même, le rayon R.

Prenons sur la circonférence un point ω quelconque, et de ce

point comme centre, avec un rayon arbitraire, compris entre $\frac{R}{2}$ et $2R$, traçons un cercle (Σ) coupant (C) aux points M et N.

Désignons par M′ le symétrique de M par rapport au centre ω, ce point étant obtenu en inscrivant dans le cercle (Σ) un demi-hexagone régulier. Le cercle passant par les points ω et M′ et ayant un rayon égal à M′N rencontre le cercle (Σ) en un point A.

On démontre facilement, par la considération de triangles semblables, que MA est égal au rayon du cercle (C).

G. Friocourt.

I. *Voir* le numéro du 15 juillet du *B. M. E.*, année 1895-1896, Tome I, page 305, et à la page 306 où il y a une estimation géométrographique de la méthode monographique et de la méthode polygraphique.

II. *Voir :* Georges Ritt, *Problèmes de Géométrie et de Trigonométrie,* p. 156.

N. Plakhowo.

2767. (**1904**, 94) (J. Jan). — *Cylindroïde.* — Avant de s'occuper de la monographie de cette surface, il serait bon de fixer son appellation.

C'est sous le nom de *conoïde de Plücker* que j'ai étudié, dans mon *Cours de Géometrie descriptive,* la surface que Cayley a appelée *cylindroïde.*

En proposant ce nom, Cayley ne savait probablement pas qu'il avait été déjà employé par Frézier dans sa *Coupe des pierres* (Livre IV, Chap. VII).

Il le proposa parce que ce conoïde jouit, comme une surface cylindrique, de cette propriété : *Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les génératrices appartiennent à une surface plane.*

Il y a pourtant une différence essentielle. Pour une surface cylindrique, les projections d'un point sur les génératrices sont dans un plan *normal* à la surface, tandis que, pour le conoïde en question, de telles projections sont dans un plan *tangent* à cette surface.

Voilà pour quelles raisons je n'ai pas adopté le nom de *cylindroïde.*

J'ai dit *conoïde de Plücker,* pour rappeler que Plücker, le premier, trouva cette surface en s'occupant des complexes linéaires.

Mannheim.

Le cylindroïde, appelé aussi *conoïde de Plücker,* est, par définition, le conoïde engendré par une droite mobile, se transportant parallèlement à un plan directeur, et s'appuyant sur une droite fixe et sur une conique ayant un de ses points sur la droite fixe.

C'est aussi la surface à plan directeur, lieu des perpendiculaires communes à une génératrice fixe d'un hyperboloïdè et à une génératrice mobile [*voir* quest. **2590** (**1903**, 148, 271)].

Enfin, je crois me rappeler que le conoïde de Plücker peut définir et représenter une des variétés géométriques du ruban ployé sur lui-même, formant le type le plus simple de surface unilatère.

Je ne connais pas d'étude spéciale du conoïde de Plücker, mais cette surface a été rencontrée à l'occasion d'autres recherches, notamment dans les travaux ci-après désignés :

A. Mannheim. — Propriétés relatives aux déplacements infiniment petits d'un corps lorsque ces déplacements ne sont définis que par quatre conditions (*C. R.,* t. LXXIII, 1871, p. 1096).

R.-S. Rouse Ball. — Théorie des vis (*screws*). Étude géométrique sur la cinématique, l'équilibre et les petites oscillations d'un corps solide (*angl.* 61 pages, 2 pl.) (*Tr. of the Irish Acad. Dublin,* t. XXV, 1872).

F. Lindemann. — Sur les mouvements infiniment petits et sur les systèmes de forces, pour les relations métriques projectives les plus générales (*M. A.,* t. VII, 1874, 89 pages).

A. Mannheim. — Représentation plane relative aux déplacements d'une figure de forme invariable assujettie à quatre conditions (*C. R.*, t. C, 1885, p. 268-271).

H. Picquet. — Note sur le conoïde de Plücker (*S. M.,* t. XIV, 1886, p. 68-76).

A. Mannheim. — Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, 2[e] éd., 1886, p. 435-449. Étude du conoïde de Plücker, avec indications bibliographiques.

A. Mannheim. — Sur certains conoïdes et en particulier sur le conoïde de Plücker (*C. R.,* t. CVI, 1888, p. 820-823).

J. de la Gournerie. — Traité de Géométrie descriptive, 1891-1880-1885.

A. Schoenflies. — La Géométrie du mouvement (traduct. C. Speckel) et additions de G. Fouret, 1893, p. 249-252. Faisceaux de complexes linéaires. Conoïde de Plücker. H. Brocard.

QUESTIONS.

630. **[T2aδ]** (1895, 286) Les formules de Lamé font connaître les efforts élastiques supportés par une enveloppe d'*épaisseur constante,* soumise à des pressions déterminées. Le cas des enveloppes d'*épaisseur variable* est-il traité quelque part? A cette question se rattache celle de la résistance aux efforts centrifuges d'un disque animé d'une rotation rapide autour de son axe : a-t-on calculé la forme d'égale résistance pour un pareil disque?

E. Francken (Liége).

637. **[M¹1b]** (1895, 314) Exprimer les nombres plückériens de la courbe de déviation d'une courbe plane donnée (lieu des centres des coniques à contact du quatrième ordre) en fonctions de trois des six nombres plückériens de la courbe donnée.

P.-H. Schoute (Groningue).

642. **[P6f]** (1895, 315) Existe-t-il des Ouvrages traitant de la transformation par représentation conforme et s'est-on occupé de l'étude des courbes transformées et particulièrement des courbes qui sont des transformées de droites?

M. Servant.

650. **[H9]** (1895, 316) Je serais reconnaissant à celui qui pourrait m'indiquer dans l'ordre systématique, simplement par leur titre et leur date, les travaux sur l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues, d'un nombre quelconque de variables indépendantes, qu'il connaîtrait.

Enesca.

652. [V] (**1895**, 316) Dans quel Ouvrage a paru pour la première fois l'expression « condition nécessaire et suffisante » pour l'énonciation d'un théorème et de son inverse?

Humilis.

658. [V] (**1895**, 317) Quel est l'auteur qui le premier a fait usage de l'expression « sectio aurea »?

W.-W. Beman (Ann Arbor).

666. [A3g] (**1895**, 318) La méthode pour trouver la limite supérieure des racines d'une équation que M. H. Laurent attribue à Laguerre (Laurent, *Algèbre*, 4ᵉ édit., IIIᵉ Partie), est-elle de cet auteur, ou de M. Thibault, comme M. B. Niewenglowski le dit dans son Algèbre?

J.-J. Duran-Loriga (La Corogne).

668. [J1aα] (**1895**, 319) Parmi les vingt-quatre permutations des quatre premiers nombres, il y en a deux (2413 et 3142) qui jouissent de cette propriété que la différence de deux quelconques de leurs nombres n'est jamais égale à la différence de leurs rangs :

1° *Démontrer* que le nombre des permutations jouissant de cette propriété *doit* être égal à 2;

2° Généraliser, en considérant les permutations des n premiers nombres.

H. Delannoy.

669. [C2h] (**1895**, 319) Soit une fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes définie dans un champ fini C; soient (c, d) l'intervalle de l'ordonnée minima à l'ordonnée maxima, (a, b) l'intervalle de l'abscisse minima à l'abscisse maxima des points du contour; soit enfin y_r un point de l'intervalle (c, d) et désignons par (α, β) le segment de $y = y_r$ compris dans le champ, α et β étant fonctions de y_r. Ayant partagé les intervalles (a, b) et (c, d) l'un en m et l'autre en n parties suivant une loi quelconque (mais telle que m et n soient indéfiniment croissants par l'application répétée de cette loi et que les parties des deux intervalles deviennent

infiniment petites); l'intervalle (α, β) sera aussi décomposé en parties $\delta_1, \ldots, \delta_n$, par les parallèles à l'axe des y menées par les points de division de (a, b). Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des points du champ, choisis respectivement dans $\delta_1, \ldots, \delta_n$, et ε_r une quantité aussi petite qu'on voudra; on pourra déterminer m de façon que

$$|\delta_1 f(x_1, y_r) + \ldots + \delta_n f(x_n, y_r) - \varphi(y_r)| < \varepsilon_r,$$

$\varphi(y_r)$ étant supposé exister et être égal à $\int_\alpha^\beta f(x, y_r)\,dx$. On dit que la fonction $f(x, y)$ est *uniformément intégrable* par rapport à x et pour les valeurs de y comprises dans l'intervalle (c, d), lorsque, ε étant aussi petit qu'on le voudra, on peut déterminer m de façon que dans tout intervalle tel que (α, β) on ait

$$|\delta_1 f(x_1, y) + \ldots + \delta_n f(x_n, y) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Or, je demande ceci : Si la fonction $f(x, y)$ est intégrable par rapport à x pour toute valeur de y comprise dans l'intervalle (c, d), sera-t-elle aussi uniformément intégrable par rapport à x et pour les mêmes valeurs de y?

La démonstration n'offre aucune difficulté lorsque le champ est rectangulaire; mais il n'en est pas de même, je crois, lorsque cela n'a pas lieu.

U. Ceretti (Rieti).

2814. [**C1b**] Dans quel Recueil pourrait-on trouver des indications sur l'interprétation du symbole $D^n y$ qui représente la dérivée d'ordre n de la fonction y, dans le cas où n est fractionnaire irrationnel ou même imaginaire?

C. Popovici.

2815. [**K20e**] Sait-on résoudre un triangle dont on connaît l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle inscrit?

C. Popovici.

2816. [Σ] L'Académie de Madrid a-t-elle décerné le prix proposé pour 1899 :

Traité de Trigonométrie circulaire et hyperbolique ?

LER.

2817. [**E5**] A l'étude de la fonction profondément dissymétrique $\zeta(s)$, Riemann a substitué l'étude d'une fonction holomorphe

$$\Gamma(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

qui ne change pas par la substitution de $(1-s)$ à s et présente ainsi une sorte de symétrie par rapport à la parallèle $\left(s=\frac{1}{2}\right)$ à l'axe imaginaire. La substitution $s=\frac{1}{2}+ti$ le conduit à la fonction

$$\xi(t) = F\left(\frac{1}{2}+ti\right) = \xi(0)\prod_{\alpha}\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right),$$

les α étant les racines de $\xi(t)$.

Il y aurait grand intérêt à trouver une relation entre les valeurs de $F(s)$ prises sur l'axe imaginaire $\left(s=\frac{1}{2}\right)$ et les valeurs de la même fonction prises sur une parallèle audit axe $(s>1)$, région où la fonction $\zeta(s)$ se confond avec la somme $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$.

Je trouve la relation générale

$$\xi(t) = F\left(\frac{1}{2}+ti\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(s)\left(\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}+ti\right)}+\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-ti\right)}\right)ds$$
$$(a>1).$$

Si l'on ne considère que les valeurs réelles de t, cette équation exprime $F\left(\frac{1}{2}+ti\right)$ en fonction de $F(a+\theta i)$ $(a>1)$.

Cette relation, qui peut encore s'écrire

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty-\sigma i}^{+\infty-\sigma i} \xi(\theta)\frac{2\theta\, d\theta}{\theta^2 - t^2} \qquad \left(\sigma > \frac{1}{2}\right),$$

est-elle connue? A-t-elle été déjà utilisée?

V. Williot.

2818. [**K1d**] Soit un triangle variable de base constante AB et dont le sommet se déplace sur une droite CD faisant avec AB un angle α.

Tous ces triangles sont divisés en deux parties équivalentes par une droite FH parallèle à CD.

Si maintenant on divise l'un d'eux en deux parties égales par une perpendiculaire à FH, on a ainsi divisé le triangle en quatre régions a, b, c, d qui donnent les égalités

$$a + b = c + d,$$
$$a + c = b + d$$

(a et d, de même que b et c, n'ayant aucun côté commun).

Mais, suivant la position du sommet C, on a soit $a > b$, soit $a < b$.

Il y a donc un point C' tel que $a = b$. Quel est-il?

Ce problème, dérivé de la question 3 (**1894**, I), doit pouvoir, ce me semble, se résoudre par la géométrie élémentaire.

G. Picou.

2819. [**K8f**] A-t-on étudié les propriétés d'un quadrilatère dont : 1° deux des angles adjacents sont égaux; 2° deux des angles adjacents sont supplémentaires; 3° deux des angles opposés sont égaux. Dans quels Ouvrages?

E.-N. Barisien.

2820. [**K8b**] Je désire connaître la relation existant entre les quatre côtés d'un quadrilatère inscriptible pour que l'une des diagonales intérieures soit perpendiculaire à la diagonale extérieure.

E.-N. Barisien.

2821. **[M'8a]** Peut-on démontrer *rigoureusement* que la $n^{\text{ième}}$ podaire du centre d'une épicycloïde à p rebroussement a une aire qui tend vers l'infini, lorsque n augmente indéfiniment? E.-N. Barisien.

2822. [Σ] I. L'énoncé

« Tout nombre pair, sauf 2, 6, 8, 16, 24 et 40, est la somme de 1 cube et de 3 carrés, tous $\neq 0$, »

(**1894**, 82) peut être généralisé comme il suit :

Tout nombre pair 2A, sauf un nombre limité de valeurs de A, est la somme d'une puissance de degré impair et de 3 carrés, tous $\neq 0$,

$$2A = a^{2n+1} + b^2 + c^2 + d^2.$$

II. Le produit

$$1.2.3.5.7\ldots p$$

des n premiers nombres premiers est la somme de 2 triangles, de 2 carrés et de 2 ennéagones, tous $\neq 0$ ($n > 2$).

III. Tout cube entier n^3, qui est le $2(n+2)$-gonal de rang n (¹), est la somme du $(n+5)$-gonal de même rang n et du $(n+3)$-gonal de rang $(n-1)$.

IV. $(8A \pm 3)^2$ est la somme de 2 nombres m-gonaux consécutifs, $m \neq 3$, étant à déterminer.

V. Toute puissance septième n^7 peut se développer en une somme de $n-1$ triangles de rang pair, de $n-1$ hexagones et de $n-1$ heptagones, tous $\neq 0$,

$$4^7 = (36 + 55 + 528) + (6 + 66 + 4950) + (7 + 1525 + 9211).$$

G. de Rocquigny.

(¹) n^α est le $2\left(\dfrac{n^{\alpha-1}-1}{n-1}+1\right)$-gonal de rang n.

RÉPONSES.

563. (**1895**, 164; **1903**, 145) (E.-M. Lémeray). — *Convergence de séries* (**1904**, 74). — Soit $Z = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ une série convergente pour $|z| \leqq r$ et supposons $|a_1| > 0$. On pose $z = \rho e^{i\Theta}$, de sorte que la fonction $R = |Z|$ devient une fonction continue de deux variables réelles Θ et ρ. Pour toute valeur de Θ, on note la valeur $\rho = \rho'$ qui rend maximum la fonction R. Le point M' de coordonnées polaires (Θ, ρ') décrit une courbe fermée Γ; en un de ses points, la fonction R prend sa valeur minima R_0. Alors l'équation proposée $Z = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ aura une solution, et une seule, faisant partie de l'intérieur de Γ, lorsque $|Z| < R_0$. La série inverse $z = b_1 Z + b_2 Z^2 + b_3 Z^3 + \ldots$ sera convergente pour $|Z| < R_0$.

La détermination du minimum R_0 des maxima étant pénible, on se borne, dans la pratique, à établir un domaine de convergence *suffisant;* tel est le cas du problème de Kepler (*voir* le *Cours de M. Hermite,* réd. par M. Andoyer, 4e édit.). *Lambda.*

801. (**1896**, 80) (E.-B. Escott). — *Le nombre* $2^k + 1$ *est premier ou composé, suivant qu'il divise ou ne divise pas* $3^{2^{k-1}} + 1$ (**1896**, 214; **1898**, 152). — Si $2^k + 1$ est premier, $3^{2^k} - 1 = (3^{2^{k-1}} + 1)(3^{2^{k-1}} - 1)$ est divisible par $2^k + 1$. Mais $3^{2^{k-1}} - 1$ ne peut être multiple de $2^k + 1$, parce que $2^k + 1$ admet 3 comme racine primitive, par conséquent $2^k + 1$ doit diviser $3^{2^{k-1}} + 1$.

Réciproquement, si $3^{2^{k-1}} + 1$ est divisible par $2^k + 1$, aucun des nombres $3^{2^{k-1}} - 1$, $3^{2^{k-2}} - 1$, ..., $3 - 1$ n'est divisible par $2^k + 1$; par conséquent $2^k + 1$ est premier. Nazarevsky.

1641. (**1899**, 221) (E.-B. Escott). — *Tables de racines carrées des nombres développées en fractions continues* (**1900**, 107; **1901**, 166; **1902**, 12). — J'ai calculé cette Table jusqu'à 1000; elle est imprimée dans *Math. Sbornik de Moscou,* t. XXIV.

A. Werebrusow.

1988. (**1900**, 405) (Burali-Forti). — *Construction approchée des polygones réguliers* (**1901**, 126). — Cette construction a été étudiée avec quelque développement dans un article de M. V. Schlegel : *Sur le système de coordonnées réciproque à celui des coordonnées polaires* (*A. F.*, Grenoble, 1885, p. 156-168).

L'auteur cite des études antérieures datant de 1876 à 1884, mais j'ignore si elles renferment des indications historiques plus anciennes, remontant par exemple à Bion (1752). H. Brocard.

2127. (**1901**, 186) (A. Perna). — *Bibliographie des formes ternaires biquadratiques.* — Voir *M. A.*, Tome XVII, 1880 :

P.-A. Gordan. — I. Sur le système de formes complet de la forme biquadratique

$$f_1 = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$$

(p. 216-233) (all.).

II. Sur la représentation typique de la forme ternaire biquadratique

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$$

(p. 359-378) (all.).

Et dans le Tome XX, 1882 :

III. Nouvelles recherches sur la forme biquadratique ternaire

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$$

(p. 487-514) (all.).

Voir aussi *I. M.*, **1903**, 9. H. Brocard.

2128. (**1901**, 186) (L. Lévy). — *Origine de la semaine* (**1901**, 303). — Voir *Manuel des Antiquités romaines*, par Th. Mommsen et J. Marquardt. *Le Culte chez les Romains*, par J. Marquardt, traduction Brissaud, 2 vol. de 420 pages (Paris, E. Thorin, 1889-1890).

Au Tome I (p. 345 et 346), on trouve l'indication suivante :

« La semaine romaine ressemblait à la nôtre en ce que, comme celle-ci, elle chevauchait d'un mois sur l'autre et d'une année sur l'autre; mais elle en différait en ce qu'elle avait huit jours; aussi désignait-on sous le nom d'*internundinum* (*tempus*) un laps de neuf jours.

» Les paysans travaillaient sept jours et venaient le huitième jour

en ville pour le marché; c'était là un usage particulier aux Romains, car chez les Sabins, du temps de l'Empire, il y avait encore une semaine de sept jours. »

Au Tome XXXII (1891) des *Mémoires de l'Institut national de France, Acad. des Inscr. et B.-Lettres,* on trouve (II[e] Partie, p. 319-385) un Mémoire de M. Deloche intitulé : *Le jour civil et les modes de computation des délais légaux en Gaule et en France depuis l'antiquité jusqu'à nos jours.*

Bien que ce travail ne fasse pas la moindre mention de la semaine, comme délai judiciaire, il est à observer que la *lex salica,* rédigée entre les années 486 et 496, contient de nombreux exemples de délais fixés à 7, 10, 14, 21, 30, 40 ou 80 *nuits.*

La *lex ripuaria* contient aussi des délais de même durée.

Voir aussi l'article *Calendarium* de M. Ruelle, au Dictionnaire de Daremberg et Saglio. H. Brocard.

2205. (**1901**, 254) (N.-J. Hatzidakis). — *Généralisation de la courbe de poursuite.* — Je pense qu'il faut mentionner à ce sujet les courbes dites *de fuite,* qui sont, en quelque sorte, inverses des courbes de poursuite, en ce sens que la distance des deux mobiles M, P sur les deux trajectoires augmente au lieu de diminuer. Il y a entre les deux courbes la même corrélation; la tangente à l'une d'elles en M passe par le point P.

Une variété de courbes de poursuite est donnée dans les courbes ci-après désignées :

La tractrice, développante de la chaînette;

La tractrice circulaire;

Les tractrices déduites de courbes fixes;

Les courbes dites *équitangentielles;*

Enfin, les courbes généralisées de ces dernières, et représentant les positions d'un point invariablement lié à une corde de longueur donnée.

Par extension, la développée d'une courbe peut être considérée aussi comme courbe de fuite ou comme courbe de poursuite.

Une autre variété de courbe de poursuite serait celle de la marche vers un mobile, à condition que le rayon visuel passe par un point fixe, question posée ici n° **746** (**1896**, 35) et résolue (*ibid.*, 193).

On peut classer encore les trajectoires orthogonales et obliques parmi les courbes de poursuite.

Enfin, comme problèmes déterminés, ayant trait à une généralisation de la courbe de poursuite, je citerai ceux qu'a mentionnés M. Gino Loria dans son Ouvrage sur les courbes planes, traduct. Schütte, p. 610 (Leipzig, Teubner, 1902) :

C. Sturm. — Extension du problème des courbes de poursuite (*A. G.*, t. XIII, p. 1822-1823).

E. Cesàro. — Propriétés d'une courbe de poursuite (*N. A.*, 1883).

E. Cesàro. — Sur les lignes de poursuite (*N. A.*, 1886).

E. Cesàro. — Les lignes barycentriques (*N. A.*, 1886).

Le problème à résoudre s'énoncerait ainsi :

Déterminer une courbe telle que le segment de droite fixe D, *limité à deux tangentes* M, M′, *soit dans un rapport donné avec l'arc* MM′.

La droite D pourrait être remplacée par une courbe fixe, une circonférence par exemple, et ce serait là une généralisation de la courbe de poursuite, mais ce problème n'a sans doute pas été encore abordé.

Notes. — I. La dénomination de ligne de fuite ne saurait être adoptée ici. Elle a d'ailleurs son emploi pour désigner, en perspective, la ligne d'horizon du tableau.

II. Comme je ne puis affirmer que la présente réponse convienne exactement à la question proposée, je me permettrai d'y ajouter quelques indications bibliographiques relatives à certaines variétés de courbes de poursuite :

Léonard de Vinci. — Première idée de ces courbes (d'après M. S. Günther).

Bouguer. — Problème de la route du vaisseau à la chasse d'un autre (courbes ou lignes de poursuite) (*Mém. de l'Acad. des Sc.* pour 1732, p. 1).

Dubois Aymé. — La courbe du chien (*Corr. sur l'Éc. Pol.*, t. II, 1814, p. 275); *N. A.*, 1849, p. 94-96, Note de Terquem; *N. C.*, 1880, p. 211-213; *S. M.*, 1883, p. 134, et 1884, p. 74 (M. d'Ocagne); *N. A.*, 1886, p. 65-83 (E. Cesàro).

P. Barbarin, question 1518 (*N. A.*, 1884, p. 544; solution par J. Richard, 1885, p. 526-528).

E. Collignon. — Problème de Géométrie : un bâtiment se meut

à la surface de la mer supposée plane avec une vitesse v constante en grandeur. On demande quelle courbe il faut lui faire décrire pour que son pavillon, orienté par le vent qui souffle avec une vitesse donnée V dans une direction constante, soit constamment dirigé vers un point fixe (*A. F.*, Grenoble, 1885, p. 6–23).

H. Brocard.

2347. (**1902**, 117) (*Artigensis*). — *Méridienne de la surface gauche de révolution* (**1902**, 287; **1903**, 26). — La question vient d'être étudiée et résolue dans la *R. T. M.*, 1904, p. 78-84 par M. S. de la Campa.

La Rédaction.

2595. (**1903**, 149) (J. Amodeo). — *Annibal Jourdan, ci-devant Annibale Giordano* (**1903**, 272). — A l'occasion de ladite question, je suis amené à faire deux remarques :

I. Le problème dit *de Cramer* (*loc. cit.*) est sans doute celui que les auteurs français désignent du nom de *Castillon :* Dans un cercle donné inscrire un triangle dont les côtés passent par trois points donnés.

M. C. Alasia lui a récemment consacré une étude historique et géométrique, parue au *Pitagora* (t. X, 1903-1904), intitulée : *Un antico problema di Geometria piana.*

Ce problème a occupé Castillon (1742); Cramer (1744); le Journal d'Aia (1755); Bouquet (*Acad. de Berlin,* 1776); Lagrange (1780); Fuss et Lexell (*Acad. Petropol.*); A. Giordano (1788); J.-F. Malfatti (1788); Petersen; Dauzat (*Élém. de méthodologie math.*, 1901).

Voir aussi la *Géométrie* de Rouché (t. I, 1900, p. 310).

II. En 1892, M. J.-M. Brückner a publié un Programme scolaire intitulé : *Das Ottajano'sche Problem. Mathematische-historische Studie* (25 pages).

Que faut-il entendre par problème d'Ottajano?

D'après M. F. Muller (*Dict. math. fr.-all.*, t. I), ce serait le problème du triangle inscrit au cercle (1788) (*voir* ci-dessus); mais, au Tome II (*Dict. math. all.-fr.*), l'auteur le définit plus exactement, semble-t-il, le problème du polygone inscrit dans un cercle (1788). Ce serait donc la généralisation du problème de Cramer (ou de Castillon).

Au risque d'avoir pris le Pirée pour un nom d'homme, que désigne

maintenant le nom d'Ottajano? Faut-il en conclure, par exemple, que l'étude de 1788, de Giordano, a été publiée à Ottajano sous le couvert de l'anonyme? H. Brocard.

2602. (**1903**, 152) (A. Werebrusow). — *Formules donnant la solution de l'équation* $A^3 - P^2 = - Da^2$ (**1903**, 290; **1904**, 101). — Les formules (**1903**, 152) n'ont lieu que pour les formes décomposables en facteurs, qui peuvent être, outre la classe principale, dans diverses classes. A. Werebrusow.

2632. (**1903**, 204) (*Rab*). — *Classification des surfaces de Steiner.* — Je pense qu'il conviendra de consulter les études que voici :

F.-E. Eckardt. — Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbes. zur Theorie der Flächen 3[ter] Grades mit 4 Doppelpunkten u. der Steiner'schen Flächen, sowie zur Lehre von den Raumcurven, 1869.

Gerbaldi. — La superficie di Steiner studiata nella sua rapprezentazione analitica mediante la forme ternarre quadratiche. Torino, 1881.

Gino Loria. — Luigi Cremona et son œuvre mathématique (*B. M.*, 3[e] série, t. V, 1904, p. 125-195, § 9 et 14 et *passim*).

H. Brocard.

2685. (**1903**, 279) (V. Williot). — *Équation caractéristique des nombres premiers.* — Puisque l'on a

$$\frac{\sin\theta}{1 - 2z\sin\theta + z^2} = \sin\theta + z\sin 2\theta + z^2\sin 3\theta + \ldots$$

pour $|z| < 1$, on en conclut

$$\sum \frac{q^m \sin mx}{1 - q^m \cos mx + q^{2m}}$$

$$\begin{aligned}
= q\sin x + q^2\sin 2x + q^3\sin 3x + q^4\sin 4x + q^5\sin 5x + q^6\sin 6x &+ \ldots \\
+ q^2\sin 2x \qquad\qquad + q^4\sin 4x \qquad\qquad + q^6\sin 6x &+ \ldots \\
+ q^3\sin 3x \qquad\qquad\qquad\qquad + q^6\sin 6x &+ \ldots \\
+ q^4\sin 4x \qquad\qquad\qquad\qquad &+ \ldots \\
+ q^5\sin 5x \qquad\qquad &+ \ldots \\
+ q^6\sin 6x &+ \ldots,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{q^m \sin mx}{1 - q^m \cos mx + q^{2m}} \\
&\quad = q \sin x + 2q^2 \sin 2x + 2q^3 \sin 3x \\
&\qquad\qquad + 3q^4 \sin 4x + 2q^5 \sin 5x + 4q^6 \sin 6x + \ldots \\
&\quad = \sum \psi(p) q^p \sin px,
\end{aligned}$$

en désignant par $\psi(p)$ le nombre des diviseurs de p. D'autre part on a

$$\int_0^\pi \sin^2 px\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \sin nx \sin px\, dx = 0,$$

l'entier n étant différent de l'entier p. Dans l'intégrale

$$\int_0^\pi \left(\sum \frac{q^m \sin mx}{1 - q^m \cos mx + q^{2m}} \right) \sin px\, dx$$

il ne subsiste donc qu'un seul terme, qui est

$$\frac{\pi}{2} \psi(p) q^p.$$

La formule indiquée est par suite exacte, mais il n'est guère à prévoir que l'on puisse la rendre pratiquement calculable.

E. Malo.

2689. (**1903**, 298) (A. Grévy; E. Maillet). — *Vœu relatif aux caractères typographiques russes* (**1904**, 121). — Les caractères latins sont en usage chez quatre nations slaves (polonais, tchèques, slovaques, croates) contenant ensemble plus de trente millions d'habitants. Il n'est pas douteux qu'une grammaire, compatible avec l'esprit de la langue russe et avec toutes les finesses étymologiques qui se présentent dans les langues slaves, soit aussi possible pour le russe en caractères latins. La question est cependant loin d'être si simple qu'elle puisse être résolue sans le concours des étymologistes russes. De nombreuses difficultés sont, je crois, surmontées par l'orthographe tchèque; on écrira ainsi « Pafnutyj Lvovič Čebyšev » au lieu de l'écriture évidemment insoutenable rappelée à la page 123 (**1904**). On pourra supprimer les demi-voyelles dites *yer*. Mais il reste les difficultés provenant de la *iotation*, très fréquente dans le

russe. Toutefois la difficulté signalée par M. Plakhowo, et concernant les deux **a**, se résout tout simplement; on écrira **a** ou **ja**, suivant la prononciation (Razkolnikov; rjad, Poljana). Les consonnantes iotées à la fin des mots se distingueraient au moyen d'un accent : gosudar', etc.

Une décision favorable au vœu énoncé dans l'*Intermédiaire* serait applaudie par nombre de savants slaves auxquels la langue russe présente des difficultés de même nature qu'aux Français. Les patriotes russes devraient penser combien la race slave aurait gagné en cohésion par une réforme semblable. *Lambda.*

2710. (**1904**, 5) (T. Lemoyne). — *Limaçon de Pascal* (**1904**, 107). — A. Genocchi, *C. R.*, t. XCVIII, 1884, p. 81; *N. A.*, 1885, p. 206.

M. d'Ocagne, *C. R.*, t. XCVII, 1883, p. 1424.

A. Cayley, *J. M*, 1849. p. 40; 1850, p. 354-356.

Les propriétés du limaçon peuvent être obtenues par transformation de l'équation d'une section conique.

M. Weill donne 21 théorèmes (*N. A.*, 1881, p. 160).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2742. (**1904**, 66) (C.-A. Cikot). — En appelant a, b, c les cosinus directeurs de l'une des arêtes, r la longueur de cette arête, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale au plan sécant et p la distance invariable de ce plan à l'origine, on a la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma - \frac{p}{r} = 0. \tag{1}$$

Tous les tétraèdres formés par les trois arêtes et le plan sécant variables ayant même hauteur, leurs volumes sont entre eux comme les surfaces des triangles déterminés sur chaque plan sécant par les points d'intersection des arêtes. Le triangle de surface minimum est celui qui correspond au tétraèdre de volume minimum. Ce volume est proportionnel au produit $r_1 r_2 r_3$. Il faut, pour qu'il soit minimum, que l'on ait la relation

$$\sum \frac{dr}{r} = 0$$

ou, à cause de la relation (1),

$$\sum (a\,d\alpha + b\,d\beta + c\,d\gamma)r = 0. \tag{2}$$

On a d'ailleurs

$$(3) \qquad \alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma = 0.$$

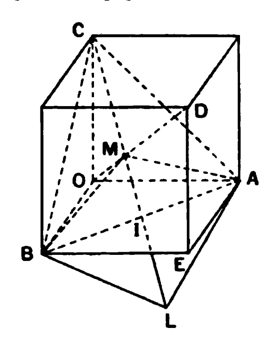
Multiplions (2) par λ, (3) par μ et ajoutons, il vient

$$d\alpha\left(\sum \lambda ar + \mu\alpha\right) + d\beta\left(\sum \lambda br + \mu\beta\right) + d\gamma\left(\sum \lambda cr + \mu\gamma\right) = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients de $d\alpha$, $d\beta$ et $d\gamma$ et éliminant λ et μ, on obtient la relation

$$\frac{\alpha}{a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3} = \frac{\beta}{b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3} = \frac{\gamma}{c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3}.$$

Si l'on considère le parallélépipède construit sur les trois arêtes, la



diagonale partant de l'origine a pour projections sur les axes de coordonnées les quantités en dénominateurs dans la proportion ci-dessus. Dans le cas du triangle minimum, le plan sécant est donc perpendiculaire à la diagonale du parallélépipède construit sur les trois arêtes qui part du point de rencontre des arêtes.

Imaginons que l'on ait construit sur les trois directions OA, OB, OC un prisme répondant à la question. ABC est le plan sécant, M le point de rencontre de la diagonale OD avec ce plan. Les trois arêtes OA, OB, OC ont pour projections sur le plan ABC les trois droites AM, BM, CM. Le contour OBED, dont la résultante se projette au point M, a pour projections les droites MB, BL, LM ; ML est égal à CM et dans son prolongement. De plus, la figure AMBL étant un parallélogramme, I est le milieu de AB. On voit donc que, de tous les plans ABC situés à une distance OM du point O, celui qui correspond au cas où le triangle ABC a une surface minimum est

celui sur lequel les droites OA, OB, OC se projettent suivant les médianes du triangle ABC.

Le tétraèdre correspondant a son centre de gravité à une distance minimum du point O, parmi tous les tétraèdres dont la base ABC est à une distance donnée du point O. MATHIEU.

Comparer questions 2325 et 2420 (**1902**, 93 et 229).

2751. (**1904**, 71) (G. FRIOCOURT). — *Bibliographie de la Navigation et de l'Hydrographie.* — Une bibliographie spéciale des Ouvrages étrangers (Traités, Mémoires et Tables) relatifs à la Navigation et à l'Hydrographie serait considérable. Il n'en existe pas; mais il est facile de trouver tous les renseignements désirables sur la matière dans les répertoires généraux d'Astronomie et de Mathématiques, notamment dans la *Bibliographie générale de l'Astronomie* de Houzeau et Lancaster, et, pour les publications récentes, dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (depuis 1868), ou dans l'*Astronomischer Jahresbericht* de Wislicenus (depuis 1899), Recueils qui donnent l'analyse des Ouvrages, Mémoires et Tables parus dans le cours de chaque année.

M. GODEFROY.

2757. (**1904**, 89) (T. LEMOYNE). — *Propriété des cubiques.* — L'énoncé n° **2757** n'est que la transcription dualistique du deuxième énoncé compris sous le n° **2755** (**1904**, 72). C'est cette transcription dualistique que j'avais envisagée de préférence dans ma réponse à la question **2755**, comme se rapportant à la représentation concrète des équations cubiques ternaires la plus familière à l'esprit : il suffit donc de se reporter à cette réponse. E. MALO.

2764. (**1904**, 93) (E. MAILLET). — Puisqu'il n'est demandé que des indications bibliographiques, je me permettrai de renvoyer à celles que j'ai données (**1895**, 214) en réponse à la question **150** (**1894**, 87) qui me paraît avoir un objet tout à fait analogue à celui de la question **2764**.

Plus récemment M. G. Teixeira a traité le même sujet (*E. M.*, 1904, p. 214-218 : *Sur une formule trigonométrique d'interpolation*) en rappelant qu'il s'en était déjà occupé en 1885 (*N. A.*, p. 351-359 : *Sur l'interpolation au moyen des fonctions circulaires*).

Voir aussi le *Cours d'Analyse* de Ch. Hermite.

H. BROCARD.

2765. (**1904**, 94) (E.-N. Barisien). — *Lieu de la rencontre d'une tangente à l'ellipse avec la normale au point conjugué.* — J'ai trouvé que ce lieu était, non une quartique, mais une octique. La recherche est ramenée à l'élimination de φ entre les équations

$$\frac{x\cos\varphi}{a}+\frac{y\sin\varphi}{b}-1=0,$$

$$\frac{by}{\cos\varphi}+\frac{ax}{\sin\varphi}+c^2=0,$$

et je trouve le résultat suivant :

$$\begin{aligned}a^2b^2[c^2ax(b^2-y^2)+by(b^2x^2+a^2y^2)]^2\\+a^2b^2[c^2by(a^2-x^2)+ax(a^2y^2+b^2x^2)]^2\\-c^4[ab(b^2x^2-a^2y^2)-xy(b^2x^2+a^2y^2)]^2=0.\end{aligned}$$

Ler.

2768. (**1904**, 94) (E.-N. Barisien). — *Lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans un triangle donné.* — Ce problème peut être avantageusement abordé sous la forme la plus générale qu'il comporte et qui est celle-ci :

Une figure plane, toujours semblable à elle-même, se déplace dans son plan de telle sorte que trois de ses points, pris comme sommets d'un triangle de référence auquel tout le reste de la figure est rattaché, décrivent trois droites fixes : quel est le lieu d'un point quelconque?

On sait comment on peut construire autant de positions que l'on veut de la figure mobile, c'est-à-dire du triangle de forme donnée PQR inscrit dans le triangle fixe ABC. Si l'on mène entre les côtés de l'angle $\widehat{BAC}$ une droite $\overline{Q'R'}$ parallèle à $\overline{QR}$ et que l'on achève le triangle P′Q′R′ ayant la forme donnée, le sommet A est le centre d'homothétie des triangles PQR et P′Q′R′ : autrement dit le choix arbitrairement fait de la direction $\overline{Q'R'}$ détermine d'une façon univoque les sommets P, Q, R. Les coordonnées de ces points sont donc des fonctions linéaires d'une même variable, et de même encore les coordonnées d'un point dont la situation relativement au triangle PQR ne change pas, parce que les coordonnées d'un tel point sont des fonctions linéaires des premières. *Chaque point de la figure mobile décrit par conséquent une ligne droite.*

Il faut cependant observer ceci :

Dans ce qui précède on a implicitement admis non seulement que les sommets PQR du triangle mobile se trouvaient placés chacun sur une droite déterminée du plan fixe, mais encore qu'en prenant ces sommets dans l'ordre décroissant des valeurs angulaires constantes qui leur sont assignées on tournerait relativement à un point intérieur dans un sens toujours le même. C'est moyennant cette distinction essentielle qu'on a trouvé comme lieu une ligne droite; mais on aurait une deuxième ligne droite en changeant simplement le sens de la rotation.

Or, lorsque le triangle PQR est équilatéral, c'est-à-dire parfaitement symétrique, et que l'on cherche le lieu de son centre, la distinction que l'on peut établir dans le cas général ne subsiste plus, et ainsi le lieu se compose dans son ensemble de *deux* lignes droites.

D'autre part, on détermine aisément les points du lieu situés sur les côtés $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$; soit, par exemple, L le point où la droite conjuguée harmonique relativement à l'angle $\widehat{BAC}$ de la hauteur issue du sommet A rencontre $\overline{BC}$: la perpendiculaire à $\overline{BC}$ en L, limitée aux côtés $\overline{CA}$ et $\overline{AB}$, est la base commune de deux triangles équilatéraux pour chacun desquels le dernier sommet et le centre, situés sur $\overline{BC}$, se construisent immédiatement.

De tout cela résulte que le lieu se compose de deux droites parallèles, équidistantes de la sécante (axe radical) qui appartient en commun au cercle circonscrit au triangle ABC et au cercle de Feuerbach du même triangle. E. MALO.

Soient x_1, y_1 les coordonnées d'un centre ω; en fonction des paramètres ρ et θ,

$$x = x_1 + \rho\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{3}\right), \qquad y = y_1 + \rho\sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{3}\right)$$
$$(k = 0, 1, 2)$$

sont les coordonnées des sommets M_k du triangle équilatéral de centre ω. Soient de même a, b les coordonnées du centre du cercle inscrit au triangle ABC et r le rayon de ce cercle;

$$D_k = (x-a)\cos\alpha_k + (y-b)\sin\alpha_k - r = 0 \qquad (k = 0, 1, 2)$$

sont les équations des côtés du triangle liées aux parallèles α_k.

On a donc les trois conditions

$$\rho\cos\theta\cos\left(\alpha_k-\frac{2k\pi}{3}\right)+\rho\sin\theta\sin\left(\alpha_k-2k\frac{\pi}{3}\right)+D_k=0$$
$$(k=0,1,2),$$

où dans D_k, x_1 et y_1 remplacent x et y. Le lieu du point ω s'obtient par élimination de ρ et θ sous la forme

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_0 & \sin\alpha_0 & D_0 \\ \cos\left(\alpha_1-\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\alpha_1-\frac{2\pi}{3}\right) & D_1 \\ \cos\left(\alpha_2-\frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\alpha_2-\frac{4\pi}{3}\right) & D_2 \end{vmatrix}=0.$$

C'est donc généralement une droite qui devient parallèle à la base du triangle ABC quand celui-ci est isoscèle.

Qu'arrive-t-il quand ABC est équilatéral? $\alpha_k-\frac{2k\pi}{3}$ étant alors une constante, les trois conditions ne peuvent plus être simultanément vérifiées que si $x_1=a$, $y_1=b$ et, dans ce cas, se réduisent à une seule. Donc tous les triangles équilatéraux inscrits dans ABC ont même centre que lui, ce qui était *a priori* évident. LER.

Question proposée par ED. LUCAS en 1876 dans la *N. C.*, sous le n° **143** et résolue en 1880 (p. 72-74) par M. J. NEUBERG qui en a donné une généralisation :

Si un triangle, inscrit à un triangle fixe, se meut en restant semblable à lui-même :

1° Un point quelconque de son plan décrit une droite;

2° Il existe, dans le plan mobile, un point qui reste fixe;

3° Toute droite de ce plan enveloppe une parabole ayant pour foyer le point fixe du plan mobile, et les points de cette droite décrivent des tangentes à la parabole.

Voir aussi les remarques de M. J. NEUBERG (*ibid.*, p. 219-221).

Antérieurement, d'ailleurs, M. J. PETERSEN avait formulé dans les *N. A.* (1866, p. 480) les propositions suivantes (quest. **782** et **783**) :

« Si une figure, qui reste toujours semblable à une figure donnée, se meut de manière :

» **782**. Que trois points décrivent des lignes droites, tout autre point de la figure décrira aussi une ligne droite;

» 783. Que trois de ses lignes passent par des points fixes, toute autre ligne de la figure passera aussi par un point fixe. »

Suit une propriété corrélative du quadrilatère.

Voir les solutions DURAND (*N. A.*, févr. 1867, p. 80-84); C. WIENER (*A. D. M.*, mai 1867); et A. BOULANGIER (*N. A.*, févr. 1872, p. 94).

Note. — Les questions susmentionnées se trouvent aux *Problèmes* de C.-A. LAISANT : t. IV, nos 614 (E. LUCAS), 1142 et 1143 (J. PETERSEN).

H. BROCARD.

Prenons pour axes de coordonnées un des côtés du triangle et la perpendiculaire sur le milieu de ce côté.

En appelant x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 les sommets du triangle équilatéral inscrit, X, Y les coordonnées du centre de ce triangle, on peut poser

$$x_1 - x_2 = l\cos\varphi_3, \qquad x_2 - x_3 = l\cos\varphi_1, \qquad x_3 - x_1 = l\cos\varphi_2,$$
$$y_1 - y_2 = l\sin\varphi_3, \qquad y_2 - y_3 = l\sin\varphi_1, \qquad y_3 - y_1 = l\sin\varphi_2,$$
$$3X = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$3Y = y_1 + y_2 + y_3.$$

En appelant α et β les coordonnées du sommet du triangle donné non situé sur l'axe des x, $2a$ la longueur du côté pris pour axe, on aura encore

$$x_1 = 0, \qquad (a+\alpha)y_2 - \beta x_2 - a\beta = 0,$$
$$(a-\alpha)y_3 + \beta x_3 - a\beta = 0;$$

d'où l'on tire

$$a(y_2+y_3) + \alpha(y_2-y_3) - \beta(x_2-x_3) - 2a\beta = 0,$$
$$a(y_2-y_3) + \alpha(y_2+y_3) - \beta(x_2+x_3) = 0,$$

et, en tenant compte des relations précédentes,

$$(1)\qquad \begin{cases} 3aY + \alpha l\sin\varphi_1 - \beta l\cos\varphi_1 - 2a\beta = 0, \\ al\sin\varphi_1 + 3\alpha Y - \beta(x_2+x_3) = 0. \end{cases}$$

Par ailleurs on déduit encore de ces relations

$$\cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = -\cos\varphi_1,$$
$$\cos\varphi_2 - \cos\varphi_3 = \frac{3(x_2+x_3) - 6X}{l},$$
$$\sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 = -\sin\varphi_1,$$
$$\sin\varphi_2 - \sin\varphi_3 = \frac{3Y}{l}.$$

On élimine sans peine φ_2 et φ_3 de ces quatre équations et l'on obtient les deux suivantes :

$$l^2 = 3(x_2 + x_3 - 2X)^2 + 3Y^2,$$
$$0 = (x_2 + x_3 - 2X)\cos\varphi_1 + Y\sin\varphi_1.$$

D'où l'on tire

$$l\cos\varphi_1 = \pm Y\sqrt{3}, \qquad x_2 + x_3 - 2X = -\frac{Y\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}.$$

Portons ces valeurs de l et de $x_2 + x_3$ dans les équations (1), puis éliminons φ_1, il vient

$$y[3(a^2 - \alpha^2) - \beta^2] + 2\alpha\beta x - 2a^2\beta - \frac{2a\beta^2}{\sqrt{3}} = 0,$$
$$y[3(a^2 - \alpha^2) - \beta^2] + 2\alpha\beta x - 2a^2\beta + \frac{2a\beta^2}{\sqrt{3}} = 0,$$

équations de deux droites parallèles.

Si le triangle donné est équilatéral, la première de ces droites va à l'infini et la seconde a une équation identiquement nulle. Si l'on fait, dans (1), $\alpha = 0$, $\beta = a\sqrt{3}$ (hypothèses qui conviennent à ce cas), puis si l'on élimine l et φ_1, on voit que, en faisant $l\cos\varphi_1 = Y\sqrt{3}$, on est conduit à une impossibilité et que $l\cos\varphi_1 = -Y\sqrt{3}$ conduit pour le lieu au seul point $X = 0$, $Y = \frac{\beta}{3}$, centre du triangle donné.

MATHIEU.

Autres réponses de MM. FABRY et *E.-A. Majol.*

2771. (**1904**, 113)(N. QUINT). — ***Problème du triangle par trois bissectrices.*** — *Voir* J. DELITALA : *Construire un triangle, connaissant une bissectrice de chaque angle* (*M.*, 1902, p. 159-162).

L'auteur rappelle les résultats obtenus par M. P. Barbarin. La question dépend d'une équation de 14e degré lorsqu'on donne trois bissectrices concourantes, et d'une équation du 16e degré lorsqu'on donne trois bissectrices non concourantes (*M.*, 1896, p. 143-160, 1 pl.). Ces équations sont irréductibles dans le cas général, mais peuvent être simplifiées dans des cas particuliers.

M. Delitala fonde sa méthode sur le théorème suivant :

Dans tout triangle, les bissectrices internes (externes) sont inversement proportionnelles aux projections des côtés opposés sur les bissectrices externes (internes) correspondantes.

L'étude de M. Barbarin (*loc. cit.*) est intitulée : *Construire un triangle dont les bissectrices sont données.*

Une autre étude de M. Barbarin a été publiée (*S. M.*, 1894, t. XXII, p. 76-80) : ***Résumé d'un Mémoire** sur la détermination d'un triangle au moyen des longueurs de ses bissectrices.*

Ce problème a été traité antérieurement à diverses reprises : Ladie's Diary, 1797; O. Terquem (*N. A.*, 1842, p. 86; R. Blazeievski (*N. A.*, 1894 et 1895), etc. *Voir* aussi la Note bibliographique que j'ai donnée au *Z. H.*, t. XXXII, 1901, p. 443-444.

Cette question a d'ailleurs été déjà posée dans l'*Intermédiaire*. *Voir* **270** (**1894**, 149; **1895**, 171); **446** (**1895**, 15, 396); **620** (**1895**, 284; **1896**, 109; **1900**, 16). H. Brocard.

Dans le *Bulletin scientifique* que j'ai rédigé (huit années, 1886-1894, Paris, A. Colin), j'ai proposé à résoudre la question suivante (4e année, 20 nov. 1888, p. 42) :

Calculer les côtés d'un triangle rectangle en fonction de ses bissectrices.

Après l'énoncé, j'ai montré qu'il existe une relation entre les bissectrices intérieures d'un triangle rectangle; indiqué comment on peut obtenir cette relation sous une forme rationnelle; fait remarquer que le calcul de ces bissectrices dépend d'une équation du troisième degré résoluble par la formule de Cardan. La solution a été développée par M. Jules Delmas (4e année, 20 fév. 1889, p. 159-161).

E. Lebon.

Autre réponse de M. Ler.

2772. (**1904**, 113) (*Jipé*). — *Étant donnés un angle* XAY *et un point* P *à l'intérieur, on mène par ce point une droite* XPY *limitée aux côtés de l'angle et l'on abaisse la perpendiculaire* AQ *à cette droite; la position pour laquelle* XPY *est minimum est telle que l'on a* PX = QY.

Puisque le segment XPY est minimum, sa variation de longueur, pour un déplacement infiniment petit autour de P, est nulle. Il y a alors un centre instantané de rotation C; ce point est à la rencontre des perpendiculaires élevées respectivement de X à AX, de Y à AY et de P à XY.

Appelons D le point où le cercle AYCX de diamètre AC est coupé

par CP. L'angle CDA est droit et, par suite, DA est parallèle à XY. Les cordes XD, YA sont alors égales, *ainsi que leurs projections* XP, QY.

Canon.

2773. (1904, 114) (N. Quint). — J'ai déjà fait plusieurs propositions tendant à obtenir des mathématiciens allemands la réédition en *fac simile* de la célèbre Notice de Feuerbach : *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks* (Nürnberg, 1822).

Le mieux serait, je crois, de la réimprimer en série d'articles dans le *Journal* de Hoffmann, puis d'en mettre en librairie le tirage à part. Cette réimpression serait certainement recherchée des mathématiciens.

On pourrait profiter de la réédition désirée pour la compléter par une notice historique, un exposé de différentes démonstrations et une bibliographie étendue.

Note. — Sur ce sujet, voir *I. M.*, questions et réponses 1238, 1256 et 2143.

H. Brocard.

2785. (1904, 118) (T. Hayashi). — L'équation proposée

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f^2(x)$$

se ramène à la forme

$$\frac{dy}{dx} = y^3 + \varphi(x)$$

(*voir* par exemple W. Heymann, *Cr.*, Bd. 119, 1898; M. Petrovitch, *C. R.*, n° 22, 1896) pour laquelle on connaît de nombreux cas d'intégrabilité par quadratures (*voir* par exemple : R. Liouville, *C. R.*, 6 sept. 1886 et 12 sept. 1887; P. Appell, *J. M.*, 4ᵉ série, t. V, 1889).

En voici deux cas simples :

1° Cas de $f(x) = ae^{mx}$ où le changement

$$e^{\frac{mx}{2}}\, dx = dt$$

conduit à l'équation

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{m^2}{4}\left(\frac{y}{t}\right)^2 = a$$

homogène en t et y;

2° Cas de $f(x) = (ax + b)e^{\pm 2xi}$ où le changement

$$y = ve^{\pm xi}$$

conduit à l'équation

$$v'^2 \pm 2ivv' = ax + b,$$

qui s'intègre en la différentiant par rapport à x : l'équation résultante, lorsqu'on y considère v' comme variable indépendante et v comme fonction inconnue, est linéaire.

M. PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

L'équation

$$(1) \qquad y'^2 + y^2 = f^2(x)$$

devient, en posant $\frac{y'}{y} = \frac{1}{z}$, $\frac{f'}{f} = a$,

$$(2) \qquad z' = (1 + z^2)(1 - az),$$

type étudié par M. Appell (*J. M.*, 1889).

L'équation (2) est évidemment intégrable si a est constant, c'est-à-dire si $f(x)$ est une constante ($a = 0$) ou une exponentielle

$$e^{mx} \qquad (a = m);$$

on obtient un autre cas simple d'intégrabilité si

$$a = -\frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{2}{3}(x + k),$$

k étant une constante qu'on peut supposer nulle pour simplifier l'écriture. Soit donc

$$a = \frac{f'}{f} = -\frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{2}{3}x, \qquad f^2 = \cos\frac{2}{3}x.$$

Un changement de fonction et de variable donne l'équation transformée

$$\frac{dY}{dX} = Y^3$$

(APPELL, *loc. cit.*, p. 368).

Les autres cas d'intégrabilité indiqués ne donnent rien de simple.

RIVEREAU.

Autre réponse de M. H. BROCARD.

Voir aussi réponse 839 (**1902**, 41 et 123; **1903**, 13).

QUESTIONS.

670. [Q2] (1895, 320) On sait que les généralisations ont été faites pour le plan et pour les hyperplans à n dimensions, en partant de la notion du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. Je désirerais des renseignements sur toutes les généralisations de cette nature qui ont été faites. E.-H. MOORE (Chicago).

671. [Q4c] (1895, 320) Pour gagner au $n^{\text{ième}}$ coup du jeu du Go-Bang (*voir* t. II, p. 2) il suffit de placer quatre jetons de même couleur au $(n-2)^{\text{ième}}$ coup sur quatre cases consécutives en ligne droite, les cases contiguës dans le prolongement de cette ligne étant libres. Pour arriver à ce résultat, il suffit de placer au $(n-4)^{\text{ième}}$ coup un jeton, qui forme, dans deux directions différentes, deux séries de trois jetons de même couleur sur trois cases consécutives en ligne droite, les cases contiguës dans le prolongement de ces deux lignes étant libres; il y a d'autres dispositions qui assurent le gain de la partie. Combien y a-t-il de diagrammes, ou types différents de dispositions des jetons d'une même couleur, qui assurent le gain de la partie, et quel est le nombre de coups minimum nécessaire pour réaliser chacun de ces types sur l'échiquier, quel que soit le jeu de l'adversaire, le nombre des cases et des jetons étant supposé illimité?

Si on limite le nombre des cases ou des jetons, la question présente, en dehors du cas général, des complications qui rendent inapplicables à un échiquier carré les formules appli-

cables à un échiquier à deux bords (au lieu de 4) dans le problème des n reines (¹). H. TARRY.

673. [**A3b**] (**1895**, 385) Soit posé, comme à l'ordinaire,

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!},$$

et soient les deux équations

$$(1)\qquad x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

$$(2)\qquad y^{C_m^n} + \beta_1 y^{C_m^n - 1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_{C_m^n - 1} y + \beta_{C_m^n} = 0,$$

liées par la condition que les racines de (2) sont les combinaisons n à n des racines de (1); je désire obtenir une formule qui donne les coefficients de (2) en fonction des coefficients de (1); on a, en particulier,

$$\beta_1 = (-1)^{n-1} p_n,$$

$$\beta_2 = p_{n-1} p_{n+1} - p_{n-2} p_{n+2} + \ldots + (-1)^{k-1} p_{n-k} p_{n+k} + \ldots + (-1)^{n-1} p_{2n}.$$

Je voudrais les autres.

G. RICALDE (Mérida, Yucatan).

675. [**V8**] (**1895**, 386) Les *Œuvres complètes de Diderot* renferment deux écrits scientifiques : un résumé d'*Acoustique*, œuvre de seconde main évidemment, et un *Traité de la développante du cercle*, où la Géométrie infinitésimale est maniée avec autant d'aisance que dans les *Principes* de Newton; ce Traité contient, entre autres, une construction intéressante des racines de l'équation générale du troisième degré, basée sur la trisection empirique de l'angle. Pourrait-on me dire si son contenu est de l'invention de Diderot lui-même ou si l'on a affaire à une simple compilation, dont les matériaux auraient pu être aisément

(¹) *Voir* LUCAS, *Récréations mathématiques*, t. I.

fournis par d'Alembert? Il serait intéressant de savoir si la valeur mathématique de Diderot était ce que semblent indiquer de pareilles recherches, ou si elle était la même que celle de Voltaire, mort sans avoir compris que l'arc n'est pas proportionnel à son sinus. CH. RABUT.

677. **[K14]** (**1895**, 386) J'ai posé *comme exercice* dans le *J. E.*, 1894, sous le n° **551**, la question suivante :

« On donne six droites $a_1, \ldots, a_6$ rangées par ordre de grandeur. Combien peut-on faire, au maximum, de tétraèdres non superposables avec ces six droites? Discuter le problème en montrant quels sont les seuls nombres possibles de tétraèdres que l'on peut former au-dessous du maximum suivant les relations de grandeur qui existent entre ces six droites. »

La discussion que je croyais avoir faite quand j'ai proposé la question est erronée; je la propose aux lecteurs de l'*Intermédiaire;* je n'ai pu y arriver complètement.

E. LEMOINE.

691. **[I4a]** (**1895**, 417) Je me suis appuyé, dans ma solution de la question n° **109** (**1896**, 62), sur le théorème suivant :

« p étant un nombre premier de la forme $8m+3$, la suite $1, 2, \ldots, 2m$ contient toujours m résidus quadratiques du nombre p. »

On a aussi le théorème analogue, que l'on peut démontrer à peu près de la même manière :

« p étant un nombre premier de la forme $8m+7$, la suite $2m+2, 2m+3, \ldots, 4m+3$ contient toujours $m+1$ résidus quadratiques de p. »

Ces théorèmes ont-ils déjà été énoncés? Je ne demande qu'un renseignement bibliographique, puisque j'ai leur démonstration. R. BRICARD.

692. [**I19a**] (**1895**, 417) Soient r un nombre rationnel mesurant la diagonale d'un parallélépipède rectangle; α, β, γ les angles qu'elle forme avec trois arêtes issues du même sommet. Les longueurs de ces arêtes sont $r\cos\alpha$, $r\cos\beta$, $r\cos\gamma$; celles des diagonales des faces sont $r\sin\alpha$, $r\sin\beta$, $r\sin\gamma$, et l'on a la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{1}$$

De plus, les formules

$$\sin\alpha = \frac{2\tang\frac{\alpha}{2}}{1+\tang^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-\tang^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tang^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \tang\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

montrent que, si $\tang\frac{\alpha}{2}$ est rationnelle, $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ le sont; et, réciproquement, si $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ sont en même temps rationnels, il en est de même de $\tang\frac{\alpha}{2}$.

Donc, si l'on veut que les arêtes et toutes les diagonales soient commensurables, il faut et il suffit que $\tang\frac{\alpha}{2}$, $\tang\frac{\beta}{2}$, $\tang\frac{\gamma}{2}$ le soient.

Posant, pour abréger l'écriture, $\tang\frac{\alpha}{2} = x$, $\tang\frac{\beta}{2} = y$, $\tang\frac{\gamma}{2} = z$, la relation (1) devient

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 + \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 = 1.$$

Mais, d'après la réponse de M. Brocard à la question **361** (**1895**, 174), cette équation est impossible en nombres rationnels. Pourrait-on démontrer *directement* cette impossibilité? (*Voir* **1896**, 227.)

E. Fauquembergue.

2823. [Σ] Notations de la question **2251** (**1902**, 1) :

1° N quelconque > 3, $n = 2$, $q = 6$, les Π étant 3 triangles et 3 hexagones;

2° $N = 2(2a+1)^2$, $q = 4$, les Π étant 1 triangle, 1 pentagone, 1 heptagone et 1 ennéagone;

3° $N = 2a+1$, $n = 3$, $p_1 = 4$, $q_1 = 1$, le Π_1 étant octogone;

4° $N = 2a > 2$, $n = 4$, $q = 3$, les Π étant 1 triangle de rang pair, 1 hexagone et 1 octogone;

5° $N = 2a+1$, $n = 5$, $p_1 = 4$, $q_1 = 4$, les Π_1 étant 2 triangles et 2 hexagones;

6° N quelconque, $n = 6$, $p_1 = 1$, $q_1 = 4$, les Π_1 étant 2 triangles et 2 pentagones;

7° $N = 2a+1$, $n = 7$, $p_1 = 4$, $q_1 = 4$, les Π_1 étant 2 triangles et 2 pentagones;

8° N quelconque, $n = 8$, $p_1 = 2$, $q_1 = 4$, les Π_1 étant 3 triangles et 1 pentagone;

9° $N = 2a+1$, $n = 9$, $p_1 = 3$, $q_1 = 4$, les Π_1 étant 3 triangles et 1 pentagone;

10° N quelconque, $n = 10$, $p_1 = 1$, $q_1 = 5$, les Π_1 étant 2 triangles, 2 pentagones et 1 hexagone;

11° $N = 2a+1$, $n = 11$, $p_1 = 3$, $q_1 = 3$, les Π_1 étant 2 triangles et 1 octogone;

12° N quelconque, $n = 12$, $p_1 = 1$, $q_1 = 4$, les Π_1 étant 1 triangle, 1 pentagone, 1 hexagone et 1 heptagone;

13° $N = 2a+1$, $n = 13$, $p_1 = 3$, $q_1 = 2$, les Π_1 étant 1 triangle et 1 ennéagone;

14° N quelconque, $n = 14$, $p_1 = 2$, $q_1 = 4$, les Π_1 étant 1 triangle de rang pair et 3 hexagones.

G. DE ROCQUIGNY.

2824. [**Q1d**] L'existence et les propriétés si universelles, tant des pseudo-surfaces (ou hypersurfaces) que des pseudo-courbes (ou hypercourbes), étant des *faits mathématiques* désormais incontestablement acquis, n'y a-t-il

pas lieu, entre autres conséquences, de reviser (pour le moins) toute théorie, voire tout calcul où l'on se croit en droit d'assigner, *a priori*, une fonction primitive à la dérivée $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$ ([1]), comme s'il pouvait être loisible et équivalent de substituer l'*aire*, toujours calculable $\int \varphi(x)\, dx$, de la courbe $y = \varphi(x)$, à l'*ordonnée*, généralement inexistante sous une forme finie, de la courbe $y = F(x)$, qu'on suppose liée à la précédente par la relation $F'(x) = \varphi(x)$?

Issaly.

2825. [V3b] A la fin d'une Notice sur Apollonius (*N. A.*, 1844, p. 488) il est dit que, dans sa traduction d'Euclide (t. II, Préf. vii), Peyrard annonce avoir remis à l'Académie des Sciences le texte grec et la traduction latine et française des sept Livres d'Apollonius.

Qu'est devenu ce précieux travail?

A-t-il été publié?

Dans l'affirmative, où et à quelle époque?

Dans la négative, les progrès réalisés dans la connaissance et le commentaire de la Géométrie d'Apollonius doivent-ils faire ajourner cette publication? H. Brocard.

2826. [M²2dα] Sur la transversale rectiligne qui rencontre une surface algébrique d'ordre en des points réels ou imaginaires, on prend des points tels que si l'on cherche leurs distances aux points d'intersection de la surface et de la transversale, la somme de ces distances, ou la somme de leurs produits, deux à deux, trois à trois, etc. soit nulle. Quels sont les lieux géométriques déterminés par ces points, lorsque la transversale se déplace suivant une loi donnée?

Renseignements bibliographiques.

C. Alasia (Tempio).

([1]) Nous n'écrivons pas $\frac{dA}{dx} = \varphi(x)$.

2827. **[L¹ 15f]** Je désire connaître :

1° Le lieu des centres des cercles qui sont tangents à une conique donnée et qui passent par un point fixe;

2° Le lieu des centres des cercles qui sont tangents à une conique donnée et à une droite donnée.

E.-N. Barisien.

2828. **[L¹ 15f]** Je désire connaître dans une ellipse rapportée à ses axes, l'enveloppe des cercles ayant pour diamètres les ordonnées ou les abscisses des divers points de l'ellipse. E.-N. Barisien.

2829. **[I20b]** Si l'on remarque que $15^2 + 15^3 = 3600$, il paraît intéressant de connaître quels sont les nombres qui, comme 15, ont la somme de leur carré et de leur cube terminée par deux zéros. E.-N. Barisien.

2830. **[S5a]** Partons du problème :

On donne un vaisseau rempli d'un gaz. Le vaisseau est muni d'un ajutage cylindrique bouché par un piston libre dont le poids est négligeable.

Trouver le poids du gaz qui s'écoule du vaisseau par l'ajutage, en un temps t.

Soient v_0, π_0, ε_0 et v, π, ε le volume, la pression et la densité du gaz dans les moments t_0 et t. Soient P_0 le poids du gaz, p le poids qui s'écoule par l'ajutage et P le poids qui reste dans le vaisseau.

On a

$$v\varepsilon = v_0\varepsilon_0 = P_0 = p + P$$

et, conformément à la loi de Mariotte,

$$\frac{d\pi}{\pi} = -\frac{dv}{v} = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Mais d'autre part la loi de Pascal dit que la pression s'exerce proportionnellement et normalement à la surface; et comme

de la loi de Mariotte il résulte que la pression est proportionnelle à la densité, on en conclut que la densité est uniforme, puisque la pression s'exerce uniformément. Donc

$$dp = \varepsilon\, dv,$$

relation qui résulte encore de

$$\varepsilon\, dv + v\, d\varepsilon = dp + d\mathrm{P} = d\mathrm{P}_0 = 0,$$

même si ε représentait la densité moyenne. On a donc

$$\frac{d\pi}{\pi\, dp} = -\frac{dv}{v(\varepsilon\, dv)} = -\frac{1}{\varepsilon v} \quad \text{ou} \quad \frac{d\pi}{\pi} = -\frac{dp}{\mathrm{P}_0}.$$

Mais on a évidemment

$$dp = \lambda . \pi\, dt$$

(λ étant une constante). Donc

$$\frac{d\pi}{\pi^2} = -\frac{\lambda}{\mathrm{P}_0} dt \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi_0} = \frac{\lambda}{\mathrm{P}_0}(t - t_0).$$

La pression varie inversement avec le temps, ce qui est naturel. Mais, d'autre part,

$$\int \frac{d\pi}{\pi} = -\frac{1}{\mathrm{P}_0} \int dp,$$

d'où

$$\pi = \pi_0 e^{-\frac{p}{\mathrm{P}_0}} \quad \text{ou} \quad v_0 = v e^{-\frac{p}{\mathrm{P}_0}}.$$

Mais on a

$$\frac{p}{\mathrm{P}_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{v - v_0}{v_0} = \frac{v_0}{v} \frac{v - v_0}{v_0} = 1 - \frac{v_0}{v}.$$

Donc

$$v_0 = v e^{\frac{v_0}{v} - 1} \quad \text{ou} \quad v_0 e = v e^{\frac{v_0}{v}}.$$

Il s'ensuit que v ne dépend pas du temps, tandis que π en dépend, *ce qui est absurde*. Peut-on m'en indiquer la cause? Est-ce que j'ai fait une erreur, ou *les principes de la Physique ne sont-ils pas exacts?* C. Popovici.

RÉPONSES.

1716. (**1900**, 5) (C. Berdellé). — *Le système octaval* (**1900**, 370; **1901**, 168; **1902**, 299). — Aux références bibliographiques je puis ajouter :

Mariage. — Numération par huit : anciennement en usage par toute la Terre, prouvée par les Koua des Chinois, par la Bible, par les Livres d'Hésiode, d'Homère, d'Hérodote, etc., 1857. In-8°.

H. Brocard.

1822. (**1900**, 125) (A. Mannheim). — *Traduction d'écrits de Stewart* (**1901**, 176). — Les *Propositiones geometricæ* de Stewart ont-elles été démontrées? Je suis porté à croire que leur démonstration doit se trouver avec leur traduction dans les manuscrits, encore inédits, laissés par A. Labosne, licencié ès sciences, en ce moment déposés et en vente chez M. Blanchard, libraire à Paris, rue de la Sorbonne.

Ces manuscrits renferment également la traduction des 217 questions de Diophante, du *Liber Quadratorum* de Leonard de Pise, et d'un fragment du *De Inventionibus Scientiarum* de *Jacobus Palominus*.

Il pourrait être intéressant de tenter la publication de ceux de ces Mémoires demeurés inédits, soit dans un Ouvrage spécial, soit dans la collection des *Notices des Manuscrits*. H. Brocard.

2153. (**1901**, 191) (Hoffbauer). — *Aire de l'ellipsoïde*. — Voir J. Houël : *Recueil de formules et de Tables numériques*, 1885, p. lxi.

a, b, c étant les demi-axes, avec $a < b < c$, si l'on pose (avec Legendre)

$$k = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{c},$$

l'aire de l'ellipsoïde sera donnée par la formule

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi ab[\cot\varphi\, F(\varphi) + \tang\varphi\, E(\varphi)],$$

E, F désignant deux séries ordonnées suivant des termes en $\sin 2n\varphi$.

Appliquant cette formule aux valeurs $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, J. Houël parvient, avec rapidité, à

$$S = 48,86;$$

puis, par un calcul plus développé, à

$$S = 47,882.$$

Voir aussi, au *J. M.*, les études ci-après :

Lobatto. — Note sur l'évaluation de l'aire de l'ellipsoïde à trois axes inégaux (t. V, 1840, p. 115-119).

O. Schlömilch. — Sur la quadrature des surfaces du deuxième ordre douées de centre (2e série, t. VIII, 1863, p. 89-98).

H. Brocard.

2338. (**1902**, 114). — Une Note de la *R. T. M.* (1904, p. 44) fait connaître que ce concours n'a pas donné de résultat.

La Rédaction.

2571. (**1903**, 102) (*Rudis*). — *Solutions de l'équation*

(1) $$x^2 - Dy^2 = -1$$

(**1903**, 224, 319; **1904**, 156). — La critique de M. Escott (**1904**, 156) est erronée. Pour le nombre a, représenté par la forme principale $x^2 - Dy^2$, on a deux conditions

$$\left(\frac{D}{a}\right) = +1, \qquad \left(\frac{a}{D}\right) = +1.$$

L'égalité

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{b^2}{a}\right) = +1$$

est vraie pour $a^2 + b^2$ premier, mais $221 = 13.17$,

$$\left(\frac{5}{13}\right) = -1, \qquad \left(\frac{11}{13}\right) = -1,$$

on a donc

$$\left(\frac{5}{221}\right) = \left(\frac{11}{221}\right) = -1.$$

Il est remarquable que cette propriété si simple restait inconnue jusqu'ici. L'équation (1) a des solutions si, au milieu de la moitié de la période des formes réduites, il y a une forme $(a, b, -a)$, c'est-à-dire

$$D = a^2 + b^2,$$

où a est un résidu quadratique $(\bmod D)$. Si a et b sont des non-résidus, la classe principale aura au milieu de la période deux formes (c, b, d), (d, b, c) et l'équation (1) n'aura pas de solutions.

De la condition $\left(\frac{a}{D}\right) = +1$ on trouve les règles pour les cas particuliers. Par exemple, pour $D = 2(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2$ un des nombres $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ sera un résidu si

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = \left(\frac{-2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = \left(\frac{-2}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = -1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8n + 5, \qquad \ldots .$$

A. Werebrusow.

2682. (**1903**, 277) (*Nobel*). — *Recherche des caractères de divisibilité des nombres entiers. Bibliographie sommaire. — Voir :*

B. Pascal. — Œuvres mathématiques. — *De numericis ordinibus tractatus. — § de numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis,* 1653.

N. A., 1855, p. 118-120. — Note sur la divisibilité des nombres (La Rédaction). Indication d'un théorème énoncé dans le *J. de Cambridge* et dans l'*Algèbre* de Mayer et Choquet.

1867. J.-C. Dupain. — Note sur un caractère de divisibilité (*N. A.*, p. 368 et 369).

1881. R. Vasquez. — Propiedades elementales relativas à la Divisibilidad de los Numeros enteros. — Valladolid.

1885. E. Gelin. — *Traité d'Arithmétique élémentaire,* p. 93-109, Namur et Huy.

1889. *J. E.* — Question d'examen d'admission à l'École de Saint-Cyr (p. 66).

Ibid. — Recherche sur les Caractères de divisibilité d'un nombre entier par 7, 9, 11, 12, 37, 73, 101, 137 (p. 107).

Ibid. Loir. — Caractères de divisibilité d'un nombre par un nombre premier (p. 121).

1893. A. Sanchez. — *Revue mensuelle de la Société des Sciences de Guatemala,* nov. et déc.

1894. Larbalétrier. — Note d'Arithmétique sur les Caractères généraux de divisibilité (*J. E.*, p. 54-63 et 73-78).

1896. E. Gelin. — Caractères de divisibilité (17 propositions générales, avec leur application à tous les nombres premiers jusqu'à 1000).

Du même. — 450 questions d'Arithmétique. (Par ex., n°s **2474** à **2508**.)

1903. L. Ripert. — Questions **2607** (*I. M.*, p. 153 et 272).

1904. Ripert. — Sur les Caractères de divisibilité des nombres (*E. M.*, p. 40-46). H. Brocard.

2691. (**1903**, 299) (H. Brocard). — *Nombres dont les puissances commencent par les mêmes chiffres que le nombre.* — Soit N ce nombre. On a alors approximativement

$$N^m = N \times 10^r$$

et par conséquent

$$N^{m-1} = 10^r,$$

$$(m-1)\log N = r, \qquad \log N = \frac{r}{m-1}.$$

Exprimons le logarithme d'un nombre donné N en fraction continue et calculons les réduites.

Les dénominateurs des 1re, 3e, 5e, ... réduites donneront les valeurs de $m-1$.

Exemples :

$$\log 14 = 1,146128 = (1, 6, 1, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 2, \ldots).$$

Les dénominateurs des réduites sont

1, 6, 7, 41, 89, 130, 214, 349, 568, 917, 1485, 6857, 15199, ...,

$m = 8$, 90, 220, 569, 1486, 15200, ...

Puisque $N^{m-1} = 10^r$ approximativement, nous pouvons aussi avoir, pour autres valeurs de m, ces nombres augmentés de 7, 41, 89, ...

ce qui donne

$$m = 49,\quad 97,\quad 138,\quad 179,\quad 227,\quad \ldots.$$

Il est nécessaire de considérer ces dernières valeurs afin d'être sûr que l'inégalité

$$N \times 10^r < N^m < (N+1)10^r$$

est vérifiée. E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2777. (1904, 114) (E. Weber). — *Propriétés des coniques.* — Les deux énoncés du n° 2777 ne sont que des cas particuliers de théorèmes plus étendus et déjà indiqués, par exemple dans le Traité classique de Salmon (*passim*).

I. *Si l'on joint un point* M *pris arbitrairement dans le plan d'un triangle* ABC *aux points d'intersection* P, Q, R *des côtés* $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ *de ce triangle avec une droite aussi choisie arbitrairement, on obtient trois droites* MPQ'R', MP''QR'', MP'''Q'''R *rencontrant ces mêmes côtés aux points* Q', R', R'', P'', P''', Q''' : *ces six points sont sur une conique.*

II. *Les tangentes menées à une conique par les sommets* A, B, C *d'un triangle rencontrent les côtés opposés en trois couples de points qui sont situés sur une conique. Inversement, les droites joignant respectivement les sommets d'un triangle aux points où les côtés opposés rencontrent une conique sont six tangentes à une même conique.*

Les démonstrations sont du reste fort aisées. Pour le théorème I, la conique étant représentée par l'équation

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0,$$

en coordonnées-points, et par

$$\Sigma = A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2F\mu\nu + 2G\nu\lambda + 2H\lambda\mu = 0,$$

en coordonnées-droites, ce qui suppose les relations

$$A = bc - f^2,\qquad B = ca - g^2,\qquad \ldots,\qquad H = fg - ch;$$

on observera que les tangentes à cette conique issues du sommet A

($y = 0$, $z = 0$) sont données par l'équation

$$Cy^2 + Bz^2 - 2Fyz = 0,$$

et que, par conséquent, elles coïncident avec les droites joignant ce même sommet aux deux points où la conique

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - \frac{2F}{BC}yz - \frac{2G}{CA}zx - \frac{2H}{AB}xy = 0$$

rencontre le côté $\overline{BC}$. Inversement, les droites allant du sommet A aux points d'intersection de $\overline{BC}$ avec la conique S touchent la conique

$$\frac{\lambda^2}{a} + \frac{\mu^2}{b} + \frac{\nu^2}{c} - \frac{2f}{bc}\mu\nu - \frac{2g}{ca}\nu\lambda - \frac{2h}{ab}\lambda\mu = 0.$$

Pour le cas particulier que considère M. Weber (coniques dégénérant en un couple de points), Salmon remarque que la condition suivante est remplie, savoir :

$$\Delta = 4fgh.$$

Quant au théorème I, c'est une conséquence immédiate du théorème de Pascal : les sommets de l'hexagone étant pris dans l'ordre déjà indiqué Q', R', R'', P'', P''', Q''', les points de concours des côtés opposés sont les points P, Q, R collinéaires par hypothèse : donc, etc.... *E.-A. Majol.*

I. La question de M. Weber est un cas particulier du théorème suivant :

Si un triangle A'B'C' *est homothétique avec* ABC, *les côtés des deux triangles se coupent en six points situés sur une conique, d'où l'on déduit comme cas particulier les cercles de Tucker et, par suite, les deux cercles de Lemoine, le cercle de Taylor, etc.*

II. Le théorème se déduit *immédiatement* par projection conique de celui d'Euler relatif au cercle des neuf points.

J.-J. Duràn-Loriga (La Corogne).

Le premier de ces théorèmes a été énoncé par S. Roberts (*N. A.*, quest. 873, 1868, p. 237, résolue 1868, p. 550, L. T. D. et 1870, p. 559, Endrès).

Le second théorème a été énoncé par SCHRŒTER (*N. A.*, quest. 1562, 1886, p. 303, résolue, 1891, p. 13*, H. LEZ et p. 37*, SONDAT, avec la remarque relative au cercle des neuf points ou d'Euler.

H. BROCARD.

2779. (1904, 115) (H. BROCARD). — *Sur un problème de Berthevin.* — 1° Supposons d'abord que les nombres a, b, c, ..., k, l soient premiers entre eux, deux à deux. Nous aurons les égalités

$$ax + r_a = by + r_b = cz + r_c = \ldots = ku + r_k = lv + r_l,$$

et, par suite, les équations suivantes qui forment un système indéterminé :

$$\begin{aligned} ax - by &= r_b - r_a, \\ by - cz &= r_c - r_b, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ ku - lv &= r_l - r_k. \end{aligned}$$

Soient $x = m$, $y = n$, ..., $v = s$ un groupe de solutions; on aura

$$N = am + r_a = bn + r_b = \ldots;$$

la solution générale est donc

$$N = am + r_a + \text{mult. } abc\ldots kl.$$

Exemple. — Trouver les nombres qui donnent 3, 5, 6 pour restes de leur division par 5, 7, 11. On aura

$$\begin{aligned} 5x - 7y &= 2 \\ 7y - 11z &= 1 \end{aligned} \qquad (x = 27,\ y = 19,\ z = 12),$$

$$N = 138 + \text{mult. } 5.7.11.$$

2° Si a, b, c, ..., k, l ne sont pas premiers entre eux deux à deux la méthode est analogue, mais le problème peut être impossible.

Exemple. — Trouver les nombres qui donnent 2 et 5 pour restes de leurs divisions par 6 et 8. Il faudra résoudre l'équation

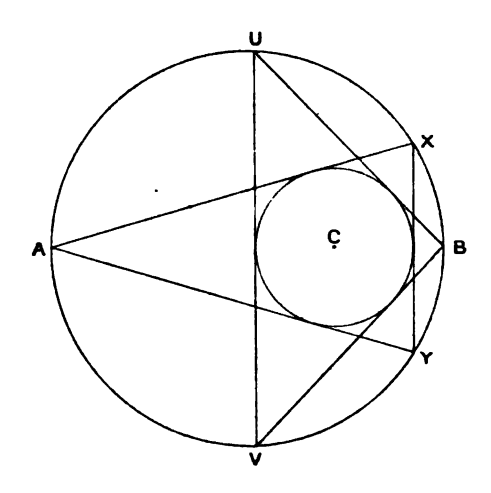
$$6x - 8y = 3,$$

qui est impossible en nombres entiers.

J.-J. DURÀN-LORIGA (La Corogne).

2783. (**1904**, 117) (E.-N. Barisien). — *Maximum de l'aire d'un triangle.* — Ce problème a été résolu par Schlœmilch (année 1889) dans le *Aufgaben-Repertorium der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* de Hoffmann (t. XX, p. 343).

Les extrémités du diamètre AB du cercle circonscrit qui passe par le centre C du cercle inscrit sont des sommets des triangles AXY et BUV, qui ont la plus grande et la plus petite aire. ΔAXY est maximum, ΔBUV est minimum. Ils ont à la fois le plus grand et



le plus petit périmètre, parce que l'aire égale pr et que r est donné.

Le demi-périmètre p étant

$$r \cot \frac{\alpha}{2} + 2 R \sin \alpha,$$

les plus $\left\{ \begin{matrix} \text{grand} \\ \text{petit} \end{matrix} \right\}$ périmètres sont

$$\sqrt{(R \mp d)(3R \pm d)^3} : R,$$

en posant

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

P. Weinmeister (Tharandt).

Dans un triangle quelconque on a les relations

$$2\,R\sin A = r\left(\frac{1}{\tang\frac{B}{2}} + \frac{1}{\tang\frac{C}{2}}\right),$$

$$2\,R\sin B = r\left(\frac{1}{\tang\frac{A}{2}} + \frac{1}{\tang\frac{C}{2}}\right),$$

$$2\,R\sin C = r\left(\frac{1}{\tang\frac{A}{2}} + \frac{1}{\tang\frac{B}{2}}\right),$$

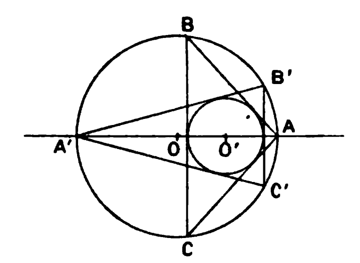
$$S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C).$$

A cause des trois premières, la dernière devient

$$S = r^2\left(\frac{1}{\tang\frac{A}{2}} + \frac{1}{\tang\frac{B}{2}} + \frac{1}{\tang\frac{C}{2}}\right) = \frac{r^2}{\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{c}\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2} + \tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2} + \tang\frac{C}{2}\tang\frac{A}{2} = 1\\ \text{car}\quad \frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}\end{array}\right).$$

Si l'on retranche les deux premières de nos relations et si l'on



remplace $\sin A$ et $\sin B$ par leurs valeurs en $\tang\frac{A}{2}$ et $\tang\frac{B}{2}$, on obtient l'équation suivante :

$$\tang^2\frac{B}{2}\left[r\left(1 + \tang^2\frac{A}{2}\right) + 4\,R\tang^2\frac{A}{2}\right]$$
$$- 4\,R\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2} + r\left(1 + \tang^2\frac{A}{2}\right) = 0.$$

En supposant $\tang \frac{A}{2}$ donnée, ses deux racines donnent $\tang \frac{B}{2}$ et $\tang \frac{C}{2}$; il en résulte que le produit $\dfrac{1}{\tang \frac{A}{2} \tang \frac{B}{2} \tang \frac{C}{2}}$ est égal à

$$\frac{r\left(1 + \tang^2 \frac{A}{2}\right) + 4R \tang^2 \frac{A}{2}}{r\left(1 + \tang^2 \frac{A}{2}\right) \tang \frac{A}{2}}$$

et, par suite, on a

$$S = \frac{r^2}{\tang \frac{A}{2}} + 4Rr \frac{\tang \frac{A}{2}}{1 + \tang^2 \frac{A}{2}} = \frac{r^2}{\tang \frac{A}{2}} + 2Rr \sin A.$$

Égalant à o la dérivée de S, on obtient

$$2R \cos A - \frac{r}{1 - \cos A} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\cos A = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R}$$

ou, dans l'hypothèse $d^2 = R^2 - 2Rr$,

$$\cos A = \frac{R + d}{2R}, \qquad \cos A = \frac{R - d}{2R}.$$

La discussion des équations montre que la première de ces valeurs correspond à un minimum de S

$$S = \sqrt{\frac{3R + d}{R - d}}(R + r - d)r$$

et la deuxième à un maximum

$$S = \sqrt{\frac{3R - d}{R + d}}(R + d + r)r.$$

Le carré de la bissectrice correspondant à l'angle A a pour valeur

$$b^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \begin{cases} 2r(R + d) & \text{minimum,} \\ 2r(R - d) & \text{maximum.} \end{cases}$$

Si l'on construit les deux cercles inscrit et circonscrit et si l'on mène la droite qui joint les centres et les tangentes du cercle inscrit aux points où il est rencontré par cette droite, ces deux droites sont les bases des triangles maximum et minimum et les extrémités du diamètre passant par la ligne des centres en sont les sommets opposés :

ABC triangle minimum,

A'B'C' triangle maximum.

MATHIEU.

On a les formules classiques

$$S = 4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r = 4R\,\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

A, B, C étant les variables liées, en outre, par la relation

$$A + B + C = 2\pi;$$

la différentiation donne

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\,dC + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\,dB + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\,dA = 0,$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\,dC + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\,dB + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\,dA = 0,$$

$$dA + dB + dC = 0;$$

remplaçant dA par la valeur tirée de la dernière équation dans les deux précédentes et éliminant le rapport $\frac{dB}{dC}$, il vient, tous calculs faits,

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2} = \operatorname{tang}\frac{C}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad B = C.$$

Le triangle qui répond à la question est donc isoscèle; en ce cas, OI (O centre du cercle circonscrit, I centre du cercle inscrit) est perpendiculaire à la base.

En examinant un peu la question, on constate qu'il y a à la fois un maximum et un minimum à chercher; tous deux répondent à B = C.

Si A et A' sont les points où OI rencontre la circonférence circonscrite, A étant plus loin de I que A'; si B et C sont les points et B', C' les points où les tangentes au cercle I perpendiculaires à OI rencontrent O, BC étant plus près de O que B'C'; le triangle maximum est ABC, le triangle minimum A'B'C', et leurs aires sont

$$S = (R + r + d)\sqrt{R^2 - (d + r)^2},$$

$$S' = (R + r - d)\sqrt{R^2 - (d - r)^2}.$$

A. Boutin.

Réponse analogue de M. Malo.

2784. (**1904**, 117) (E. Estanave). — *Un triangle arithmétique.* — En réalité le Tableau est double, il y a un premier Tableau pour $p + q$ pair, et un second Tableau, indépendant du premier, pour $p + q$ impair.

Prenons d'abord les termes où p et q sont de même parité, et relevons les colonnes de manière à l'écrire :

1	1	1	2	6	24	...
1	2	8	40	240	1680	...
2	16	136	1232	12096	129024	...
16	272	3968	56320	814080	......	...
272	7936	....	.....	......	......	...

Les lignes étant numérotées, à partir de $x = 1$, et les colonnes à partir de $q = 1$, j'appelle b les nombres du Tableau précédent; on a entre les a et les b les relations

$$a_p^q = b^q_{\frac{p-q}{2}+1},$$

$$b_x^q = (q-2)b_x^{q-1} + q b_{x-1}^{q+1}.$$

De cette dernière on déduit, entre les b_{x-1} et un b_x, la relation,

$$b_x^q = (q-2)!\left(2b_{x-1}^3 + \frac{3b_{x-1}^4}{1!} + \frac{4b_{x-1}^5}{2!} + \frac{5b_{x-1}^6}{3!} + \ldots + \frac{qb_{x-1}^{q+1}}{(q-2)!}\right),$$

d'où pour les premières valeurs de x,

$$b_1^q = (q-2)!,$$

$$b_2^q = \frac{1}{3}(q+1)!,$$

$$b_3^q = \frac{1}{90}(q+3)!(5q+2),$$

$$b_4^q = \frac{1}{5670}(q+5)!(35q^2+77q+12).$$

Si l'on prend les termes où p et q sont de parité différente, qu'on relève de même les colonnes successives, de manière à former le Tableau

1	1	2	6	24
1	5	28	180	..
5	61	662	...	
61	1385	...		

Lignes et colonnes étant numérotées à partir de 1, j'appelle c ces nombres. On a les relations

$$a_p^q = c^q_{\frac{p-q+1}{2}},$$

$$c_x^q = (q-1)c_x^{q-1} + qc_{x-1}^{q+1},$$

d'où

$$c_x^q = (q-1)!\left(c_{x-1}^2 + \frac{2c_{x-1}^3}{1!} + \frac{3c_{x-1}^4}{2!} + \ldots + \frac{qc_{x-1}^{q+1}}{(q-1)!}\right),$$

et pour les premières valeurs de x

$$c_1^q = (q-1)!,$$

$$c_2^q = \frac{(q+1)!(2q+1)}{6},$$

$$c_3^q = \frac{(q+3)!(20q^2+48q+7)}{3.4.5.6}.$$

Il faudrait trouver l'expression générale de b_x^q et de c_x^q :

$$b_x^q = (q+2x-3)!(\alpha_1 q^{x-2} + \alpha_2 q^{x-3} + \ldots),$$
$$c_x^q = (q+2x-3)!(\beta_1 q^{x-1} + \beta_2 q^{x-2} + \ldots).$$

Les nombres α_1, α_2, ..., β_1, β_2, ... sont des fonctions linéaires des nombres de Bernoulli, fonctions linéaires qu'il reste à déterminer; aussi la présente réponse n'est-elle que partielle.

A. Boutin.

2794. (**1904**, 139) (*A.-P. Ericsson*). — La question suppose qu'au commencement du XIe siècle quelqu'un, dans l'Occident latin, était capable de faire un *raisonnement* géométrique. Je crois avoir péremptoirement établi le contraire (*voir* une *Correspondance d'écolâtres du* XI[e] *siècle* : Not. et Extr. des Mss., t. XXXVI, 1900); à cette date, nos pères n'avaient aucun modèle pour une démonstration géométrique, ne se doutaient pas de ce qu'elle pouvait être et étaient certainement moins avancés que les Grecs avant Pythagore. Ils considéraient et ne pouvaient considérer que comme *empiriques* les règles de calcul pratique transmises par les écrits des arpenteurs romains.

Celle qu'applique Adalbold d'Utrecht dans sa Lettre à Gerbert $\left(\text{calculer le volume d'une sphère de diamètre D en prenant } \frac{11}{21}D^3\right)$ se retrouve effectivement dans ces écrits (voir *Un nouveau texte des Traités d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus,* Not. et Extr. des Mss. XXXV_2, 1896, n° 40). Elle a été recueillie dans la *Géométrie* attribuée à Gerbert (éd. Olleris, 82 : *Circulum incrassare si vis, etc.*), bien que l'auteur de la question ne l'y ait pas retrouvée. Quoique cette *Géométrie* ne soit pas en fait de Gerbert, il n'est donc pas douteux qu'Adalbold n'ait appris cette règle par une tradition écrite.

Il ne *démontre* nullement et ne cherche nullement à *démontrer* que le volume de la sphère représente les deux tiers du volume du cylindre circonscrit; mais, après avoir posé la règle $V = \frac{11}{21}D^3$, il fait la remarque qu'il en est ainsi, et c'est en cela seulement que consiste l'originalité de sa Lettre; cela prouve uniquement ce que j'ai essayé de faire ressortir dans ma publication précitée, à savoir qu'à cette époque les connaissances en Calcul étaient relativement beaucoup plus développées que les connaissances en Géométrie.

Comment d'ailleurs Adalbold est-il conduit à cette remarque?

De la façon la plus simple : il a exposé que, pour le cercle, la surface est $\frac{11}{14}D^2$; ce qu'il faut retrancher du carré pour avoir le

cercle est donc proportionnellement beaucoup moins que ce qu'il faut retrancher du cube pour avoir la sphère (presque la moitié). C'est ce qu'il veut chercher à expliquer; s'il retranche du cube les $\frac{3}{14}$, il voit très bien intuitivement qu'il reste beaucoup plus que la sphère, à savoir ce que nous appelons le *cylindre circonscrit;* n'ayant pas ce mot, il emploie celui de *forma modii* (figure de boisseau). Puis, partant du volume de ce boisseau, il constate qu'il faut en retrancher le tiers pour avoir le volume de la sphère donné par la règle qu'il applique.

De la phrase citée par l'auteur de la question, on peut tout au plus conclure qu'Adalbold se rendait compte (de façon ou d'autre) que la soustraction de la moitié du volume du boisseau eût donné un résultat trop faible, mais il ne faut pas y chercher un indice pouvant faire croire qu'il se proposât de montrer qu'il fallait nécessairement en retrancher précisément le tiers, ni plus ni moins. A cet égard il n'a aucun *motif,* autre que la règle pratique qu'il connaît.

Je ne suis au reste nullement convaincu qu'Adalbold eût même été capable de prouver réellement que la sphère est supérieure en volume à la moitié du cylindre circonscrit, car précisément son langage me ferait supposer une erreur intuitive. Mais ceci n'a pas d'importance historique. PAUL TANNERY.

Autre réponse de M. H. BROCARD.

2795. (**1904**, 141) (D[r] PROMPT). — Les difficultés astronomiques que présentent certains passages de Virgile ont été souvent discutées, et cela dès l'antiquité. Mais il est certain qu'il ne s'agit pas d'y remédier par des corrections arbitraires, en supposant, de la part des copistes, des altérations tout à fait différentes de celles qu'ils ont pu commettre.

En particulier, pour les vers 231-235 des *Géorgiques,* IV (ici transcrits), la question a été étudiée à fond par Denis Petau, dans *l'Auctarium doctrinæ temporum* (1630, p. 95 et suiv.), et il est parfaitement établi que Virgile y a bien prétendu indiquer le lever du matin, puis le coucher du soir des Pléiades, limites déjà indiquées par Aristote pour le travail des abeilles. Pline (XI, 46) insiste d'ailleurs sur l'existence d'un miel particulier, recueilli plus tard que les autres, entre l'équinoxe d'automne et le coucher des Pléiades, qu'il fixe au 11 novembre.

Il est incontestable dès lors que l'interprétation obvie du vers 234, à savoir que les Pléiades, à leur coucher, fuiraient la constellation du Poisson (dans ce cas, le Poisson Austral), non le signe des Poissons, n'est guère soutenable. On est donc en présence de deux alternatives : ou Virgile s'est trompé, par suite d'une confusion quelconque; ou il s'est exprimé d'une façon obscure et il faut chercher un autre sens que le sens obvie; si, par exemple, l'on remarque que Virgile dit *sidus hibernum* pour signifier simplement le temps de l'hiver, on peut très bien admettre que, dans le vers précité, il a voulu exprimer l'idée que les Pléiades se cachent pendant trois mois environ pour fuir la mauvaise saison, la période où le Soleil parcourt les signes soumis à l'influence pluvieuse du Poisson Austral (*sidus Piscis aquosi*).

Quant au vers Eclog. VIII, 30 : *tibi deserit Hesperus Œtam :* il a de même été expliqué de diverses façons plus ou moins satisfaisantes; je me contenterai de remarquer qu'il a un caratère ironique, et doit contenir une allusion qui nous échappe probablement.

Enfin, pour la légende qui fait du cygne un oiseau chanteur, si elle est absolument fausse, elle est tellement courante pour Virgile (le cygne de Mantoue) et pour les poètes de son temps qu'on ne peut songer à la bannir de leurs œuvres.

En résumé, pour la critique des textes anciens qui intéressent les sciences, même mathématiques ou astronomiques, on ne peut être dispensé d'observer les règles consacrées; il ne suffit pas, pour prouver qu'un texte est altéré, de montrer qu'il contient une invraisemblance, il faut encore expliquer comment l'altération a pu se produire. PAUL TANNERY.

Autre réponse de M. H. BROCARD.

2796. (**1904**, 142) (J. JONESCO). — *Calcul numérique.* — Dans quelques universités allemandes on fait des cours sur le Calcul numérique. Deux de ces cours ont été récemment publiés, savoir :

LUROTH, *Vorlesungen über unmerisches Rechnen* (Leipzig, 1900).

BRUNS, *Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens* (Leipzig, 1903). G. LORIA.

AVIS.

Nous croyons devoir signaler à nos lecteurs l'*enquête sur la méthode de travail des mathématiciens* ouverte par la Rédaction de l'*Enseignement mathématique* (C.-A. Laisant, H. Fehr, A. Buhl). On trouvera des détails à ce sujet dans l'*Enseignement mathématique,* 1904, numéro du 15 septembre, p. 376, 395, 401. LA RÉDACTION.

QUESTIONS.

2831. [L²21d] On donne, dans l'espace, trois droites M, N, P, dont la troisième P est parallèle à la plus courte distance des deux premières M, N.

Résulte-t-il de ces situations quelque propriété particulière de la surface réglée gauche qui admet ces trois droites pour directrices? H. BROCARD.

2832. [K18c] Une sphère variable se déplace en touchant trois droites fixes données dans l'espace et ne se rencontrant pas. Les plans passant par ces droites et tangents à la sphère déterminent un point M. Le lieu de ce point a-t-il une définition simple? A-t-il une relation simple avec le lieu du centre de la sphère? H. BROCARD.

2833. [L²7b] Trois droites données dans l'espace, A_1, A_2, A_3, déterminent un segment variable $a_1 a_2 a_3$ sur une

quatrième droite mobile qui s'appuie sur elles. Est-il possible de définir simplement la situation du segment minimum $a_1 a_2 a_3$? H. BROCARD.

2834. [I1] Est-il exact, en thèse générale et en principe, que telle disposition de chiffres (en nombre fini) dans un système donné, représente ou puisse représenter telle autre disposition donnée d'autres chiffres (en nombre fini) dans un autre système convenablement choisi?

Par exemple, un nombre (fini) formé des n premiers chiffres de $\sqrt{2}$ dans le système décimal, pourrait-il être transformé en un autre nombre (fini) donné d'avance, dans un système de numération différent? H. BROCARD.

2835. [L16a] Quelles sont les propriétés élémentaires de l'ellipse où intervient le rapport $\frac{c}{d}$?

On a

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{et} \quad d^2 = a^2 + b^2,$$

a et b étant les longueurs des demi-axes.

Question analogue pour l'hyperbole. HOFFBAUER.

2836. [L16b] Si l'on appelle *rayon de l'ellipse* la longueur

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

des demi-diamètres conjugués égaux, on peut appeler *cercle radial* de l'ellipse le cercle concentrique de même rayon.

Quelles sont les propriétés connues de ce cercle?

Il n'y a lieu de citer, ni l'équation

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

commune aux deux courbes, mais relative pour chacune à un système convenable d'axes cartésiens, ni la transformation correspondante.

Question analogue pour l'hyperbole. HOFFBAUER.

2837. [I25b] (S) *Suite arithmétique.* — A un nombre N_0, non carré, on ajoute l'excès de N_0 sur le plus grand carré. On a ainsi un nombre N_1.

On opère de même sur N_1, ce qui donne un nombre N_2, et ainsi successivement.

Cela posé, la suite $N_1, N_2, N_3, \ldots$ est indéfiniment croissante; autrement dit, elle ne contient aucun carré.

Exemple :

$$N_0 = 7,$$
$$N_1 = 7 + 3 = 10,$$
$$N_2 = 10 + 1 = 11,$$
$$N_3 = 11 + 2 = 13,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

10, 11, 13, 17, 18, 20, 24, 32, 39, 42, 48, 60, 71, ...

H. Brocard.

2838. [V7] Parlant du comédien Raimond Poisson, né à Paris en 1633, les biographes se bornent à dire de son père qu'il fut un mathématicien célèbre (Desessarts), savant et pauvre (F. Didot et Hoefer).

Que sait-on de la vie et des travaux de ce mathématicien, non mentionné, que je sache, dans les biographies?

Était-il apparenté à la famille de Simon Denis Poisson, de l'Institut, né en 1781 à Pithiviers? H. Brocard.

2839. [H3c] Je me trouve avoir besoin, pour une question d'application, d'intégrer le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{du}{dt} = -g\sin\alpha - au\sqrt{u^2+w^2},$$
$$\frac{dw}{dt} = \quad g\cos\alpha - Aw\sqrt{u^2+w^2},$$

où $A \neq a$. Un lecteur pourrait-il me donner une indication utile, ou la solution : il y a urgence. Ferber.

2840. [**A3d**] L'équation algébrique

$$x^n - \frac{n}{2!}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{4!}x^{n-2} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}n!}{(2n-2)!}x + \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} = 0,$$

rencontrée par moi dans l'étude des nappes souterraines, a-t-elle toutes ses racines réelles? Peut-on séparer ses racines? E. MAILLET.

2841. [Σ] Soient les deux équations aux dérivées partielles

$$\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial(\zeta+z_0)}{\partial x}\right), \qquad \frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial z_0}{\partial x}\right),$$

où k est constant et z_0 une fonction donnée de x.

On peut déterminer pour chacune d'elles une solution qui, pour $t=0$, se réduise à $\zeta_0(x)$.

Peut-on, sous certaines conditions à remplir au besoin par $\zeta_0(x)$ ou z_0 [$\zeta_0(x)$ petit, par exemple, les deux équations ayant la solution commune $\zeta=0$], déterminer une intégrale particulière de l'une qui, dans un certain domaine par rapport à x, donne, quel que soit t, une valeur approchée d'une intégrale particulière de l'autre? En d'autres termes, soit ζ_1, ζ_2 l'intégrale de chaque équation qui, pour $t=0$, se réduit à $\zeta_0(x)$; si $\zeta_0(x)$ est petit dans un certain domaine relatif à x, $|\zeta_1-\zeta_2|$ est-il petit par rapport à $|\zeta_1|$, quel que soit t, dans un certain domaine relatif à x? Dans quels cas ceci a-t-il lieu? Il y a des applications éventuelles à la théorie des nappes souterraines [1].

Extensions à d'autres paires d'équations aux dérivées partielles. E. MAILLET.

2842. [Σ] Médaille Guccia décernée par le *Circolo Matematico di Palermo,* 30, via Ruggiero Settimo, à l'oc-

[1] Pour éviter des redites, *consulter* E. MAILLET, *Essais d'hydraulique souterraine et fluviale*. Paris, Hermann, 1904. Inutile, en particulier, de chercher les solutions communes aux deux équations.

casion du Congrès international des Mathématiciens à Rome, en 1908 :

Faire faire un progrès essentiel à la théorie des courbes gauches algébriques.

Si aucun Mémoire ne satisfait à cette condition le prix pourra être adjugé à qui fera :

Faire un progrès essentiel à la théorie des surfaces, ou autres variétés, algébriques.

Les Mémoires, inédits et *écrits* (sauf les formules) *avec la machine à écrire,* doivent être rédigés en italien, français, allemand ou anglais et parvenir en trois exemplaires au président du Circolo avant le 1er juillet 1907 avec épigraphe, le nom de l'auteur étant sous enveloppe cachetée.

Si aucun Mémoire ne remplit ces conditions, le prix pourra être attribué à un Mémoire imprimé et publié, remplissant certaines conditions. La Rédaction.

2843. [**A1**] Considérons la fonction

$$f(n,r) = n^r - n(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^r - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^r + \ldots,$$

où n et r sont entiers.

Montrer que $f(n,r) = 0$ quand $r < n$ et que

$$f(n,n) = n!$$

Quelles sont les valeurs de $f(n,r)$ pour $r = n+1$, $n+2$, ...? E.-B. Escott (Ann Arbor.)

2844. [**I19a**] Résoudre en nombres entiers impairs

$$x^2 + y^2 + z^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$
$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2,$$

où $x, y, z \neq p, q, r$.

Note. — Il est facile de trouver des solutions où deux des nombres sont égaux; exemple :

x	y	z	p	q	r
7	7	0	8	5	3
10	9	1	11	6	5

E.-B. Escott (Ann Arbor.)

[**2843** et **2844** trad. de l'anglais. (La Réd.)]

2845. **[V9]** Les Tables de logarithmes d'addition et de soustraction de Zech, à sept décimales, sont-elles encore dans le commerce? *Rudis.*

2846. **[I19c]** Je demande :

1° Par qui, le premier, a été signalée l'identité

$$(s^2+t^2)(u^2+v^2)=(x^2+y^2),$$

où l'on fait

$$x=\pm(su\mp tv), \qquad y=\pm(sv\pm tu),$$

et qui montre que tout produit de facteurs individuellement décomposables en deux carrés positifs est lui-même décomposable en deux carrés positifs;

2° Par qui, le premier, a été rigoureusement établie la proposition réciproque : Tout diviseur d'un nombre qui est la somme de deux carrés est lui-même la somme de deux carrés;

3° Quelle est la démonstration la plus simple qui ait été donnée de cette proposition réciproque. *Rudis.*

2847. **[V9]** Sans parler de celle qui se trouve placée à la fin des Tables de logarithmes à cinq décimales de Houël et qui ne comprend guère que les 10 000 premiers nombres, quelles sont les Tables des diviseurs des nombres qui ont été publiées (auteur, éditeur, principe, disposition, étendue), et s'en trouve-t-il encore dans le commerce? En existe-t-il de manuscrites qui appartiennent à une bibliothèque publique? (*Comp.* **1904**, 103.) *Rudis.*

RÉPONSES

2707. (**1904**, 4) (T. Lemoyne). — *Coniques et cubiques* (**1904**, 107, 129, 174). — La Note de M. *Lambda* me donne l'occasion de compléter le second théorème que j'ai énoncé dans cette question :

Les milieux des cordes d'une cubique circulaire vues du point double sous un angle droit sont sur la droite équidistante des tangentes à la courbe parallèles à l'asymptote.

Pas plus d'ailleurs que la première fois, je ne demande une démonstration du théorème ainsi complété. T. Lemoyne.

2744. (**1904**, 67) (G. Picou). — *Solution de la congruence*

$$x^2 \equiv N \pmod{p}$$

sans les racines primitives (**1904**, 180). — $a \equiv bx$ est une solution de la congruence $x^m = N$ suivant le module $a^m - Nb^m$ ou son diviseur; cette propriété peut être employée avantageusement pour quelques valeurs de N

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \ldots.$$

Exemples :

I. $p = 19^2 - 16^2 = 13^2 - 8^2 = 11^2 - 4^2$:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{105};$$

$$16x \equiv 19, \quad 8x_1 \equiv 13, \quad 4x_2 \equiv 11;$$

$$x = 1, \quad 29, \quad 34, \quad 41, \quad 64, \quad 71, \quad 76, \quad 104.$$

II. $p = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1$:

$$x^2 \equiv -1 \pmod{65};$$

$$x = 8, \quad 18, \quad 47, \quad 57.$$

III. $p = 3^5 - 2^5$:

$$x^5 \equiv 1 \pmod{211};$$
$$x = 1, \quad 55, \quad 71, \quad 107, \quad 188.$$

A. Werebrusow.

2759. (1904, 89) (H. Brocard). — *Lieu géométrique.* — La projection du point P sur l'une quelconque des droites A, B, C, D décrit une série semblable à celle que le point P décrit lui-même sur la droite E; autrement dit la série initiale, ainsi que chacune des séries dérivées, peut être représentée par deux équations de la forme

$$x = \frac{\alpha + \alpha' t}{1 + t}, \qquad y = \frac{\beta + \beta' t}{1 + t},$$

t étant un paramètre variable. Soient donc, en prenant les axes coordonnés parallèles, l'un à la droite F, et l'autre à la direction perpendiculaire à F,

$$S = ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

l'équation d'une conique et, conséquemment,

$$ax + g = 0, \qquad by + f = 0$$

les équations du centre : on aura à éliminer les constantes a, b, g, f, c, d'une part entre les relations

$$S_1 = ax_1^2 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0,$$
$$S_2 = ax_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., sont respectivement les coordonnées des projections du point P sur les droites A, B, C, D, et l'une des équations du centre d'autre part. On obtient ainsi deux équations de la forme

$$x = \frac{\lambda}{(1+t)\nu}, \qquad y = \frac{\mu}{(1+t)\varpi},$$

λ et μ étant des polynomes du cinquième degré, et ν et ϖ des polynomes du quatrième degré en t. En substituant dans l'équation d'une droite

$$lx + my + n = 0,$$

on parvient à une équation du neuvième degré en t

$$l\lambda\varpi + m\mu\nu + n(1+t)\nu\varpi = 0.$$

L'ordre du lieu géométrique du centre serait donc le neuvième; mais des considérations aussi sommaires que celles qui précèdent ne permettent pas d'affirmer que les calculs à effectuer ne comporteraient pas une réduction finale de l'ordre présumé, quoique le chiffre annoncé demeure le maximum possible et probable. Ce qui est manifeste, même *a priori*, c'est que le lieu cherché doit être d'ordre impair et avoir une asymptote réelle dirigée (sauf hypothèse particulière) obliquement par rapport aux axes coordonnés. Les autres asymptotes, au contraire, doivent être parallèles à l'un des axes, et chacune correspond à une parabole; mais, parmi ces paraboles, celles-là seulement qui répondent à une asymptote parallèle à $\overline{OX}$, c'est-à-dire à la droite F, satisfont strictement aux conditions de l'énoncé.

Le cas du cercle et celui de l'hyperbole équilatère donnent lieu à une équation de la forme

$$S = a(x^2 \pm y^2) + 2gx + 2fy + c = 0.$$

En considérant donc trois des quatre conditions $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $S_4 = 0$, et, concurremment, l'une des équations du centre, on aura quatre groupes de deux équations paramétriques,

$$x = \frac{\lambda}{(1+t)\nu}, \qquad y = \frac{\mu}{(1+t)\varpi},$$

où λ et μ ne sont plus ici que du troisième et ν et ϖ du deuxième degré en t. Chaque groupe définit une courbe du cinquième ordre; mais ces courbes ont des points communs obligés, c'est-à-dire indépendants des données particulières de la question, qui ne répondent pas par suite à cette question. Les autres points communs y satisfont, mais on ne peut absolument affirmer qu'un point de cette sorte commun à deux des quatre quintiques considérées appartienne nécessairement aux deux autres, quoique la chose soit cependant probable, eu égard à la nature géométrique du problème posé. Ce qui est bien clair c'est que le nombre maximum admissible des cercles comme des hyperboles équilatères est de cinq.

E.-A. Majol.

II.

2772. (**1904**, 113) (*Jipé*). — *Problème de minimum* (**1904**, 230). — Supposons le problème résolu, et soit XPY la droite minima. Par le point fixe P conduisons une droite X'PY' faisant avec XPY l'angle infinitésimal θ. Menons YN et XR perpendiculaires sur XPY jusqu'à leur rencontre avec X'PY'. A la limite, si l'on fait tendre θ vers zéro, la variation de longueur de X'PY' est nulle : c'est la condition du minimum.

Mais, θ étant un infiniment petit du premier ordre, PR et PN seront respectivement égaux, à un infiniment petit du second ordre près pour chacun, à PX et à PY. La condition du minimum va donc se traduire par l'équation très simple

$$\text{NY}' = \text{RX}'. \tag{1}$$

Les triangles rectangles semblables PRX et PNY donnent la proportion

$$\frac{\text{YN}}{\text{XR}} = \frac{\text{PQ} + \text{QY}}{\text{PX}}. \tag{2}$$

Remarquons maintenant que, les angles N et R étant droits à un infiniment petit du premier ordre près, les couples de triangles rectangles semblables AQY, YNY' d'une part, et AQX, XRX' d'autre part, donnent les proportions

$$\frac{\text{QY}}{\text{NY}'} = \frac{\text{AQ}}{\text{YN}}, \tag{3}$$

$$\frac{\text{AQ}}{\text{XR}} = \frac{\text{QX}}{\text{RX}'}. \tag{4}$$

Mais on a évidemment :

$$\text{QX} = \text{PQ} + \text{PX}. \tag{5}$$

L'élimination de NY', RX', AQ, QX, YN, XR entre les équations (1), (2), (3), (4) et (5) donne

$$\text{QY}(\text{PQ} + \text{QY}) = \text{PX}(\text{PQ} + \text{PX}),$$

ou

$$\text{PQ}(\text{QY} - \text{PX}) + \overline{\text{QY}}^2 - \overline{\text{PX}}^2 = 0,$$

ou bien

$$(\text{QY} - \text{PX})[\text{PQ} + (\text{QY} + \text{PX})] = 0,$$

ou enfin

$$\text{PX} = \text{QY}.$$

C'est ce qu'il fallait prouver. PAULMIER.

Prenant pour axes de coordonnées les côtés de l'angle, vis-à-vis duquel le point P a pour coordonnées a, b, le problème revient au minimum de la fonction

$$l^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta,$$

avec

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1;$$

soit B le quatrième sommet du parallélogramme AXBY; l'emploi des dérivées montre immédiatement que BP est perpendiculaire sur XY; donc, etc. *Ler.*

La démonstration suivante me paraît, sinon peut-être la plus élémentaire que comporte la propriété rappelée sous le n° **2772**, du moins celle qui l'explique le mieux.

En supposant que la droite $\overline{XY}$, dont les extrémités s'appuient sur les droites données $\overline{AX}$, $\overline{AY}$, ait une longueur donnée, cette droite enveloppe une certaine courbe, qu'il ne s'agit pas ici de caractériser, mais dont le point de contact P avec la tangente $\overline{XY}$ s'obtient en projetant sur $\overline{XY}$ le point où se coupent la perpendiculaire menée à AX en X et la perpendiculaire menée à AY en Y : et il est bien clair que, parmi toutes les droites limitées aux côtés de l'angle $\overline{XAY}$ que l'on peut mener par le point P qui vient d'être défini, la droite $\overline{XY}$ est la plus courte.

Les points X et Y sont donc sur le cercle de diamètre $\overline{AR}$, le milieu de la corde $\overline{XY}$ est le même que celui de $\overline{PQ}$, projection sur $\overline{XY}$ du diamètre $\overline{AR}$: autrement dit l'on a

$$\overline{XP} = \overline{QY}.$$

E.-A. Majol.

La solution proposée (**1904**, 230) est certainement la plus simple que l'on puisse donner. Si l'on ne veut pas invoquer le principe sur lequel elle s'appuie, le principe du centre instantané de rotation, on pourra recourir à la démonstration que nous allons indiquer. Dans tous les cas, on peut abréger la rédaction de la solution rappelée, en invoquant le théorème élémentaire suivant :

Lorsqu'un quadrilatère ABCD *a deux angles* A, C *droits, les projections des sommets* A, C, *sur* BD, *donnent une division isotomique.*

Voici la démonstration que nous proposons pour la question **2772** :

Soit XPY la position cherchée; soit X'PY' la position infiniment voisine. Rabattons PX' sur PX, en PX''; PY' sur PY, en PY''. Puisqu'on suppose que XPY est la transversale minima, on a

$$XX'' = YY''.$$

Les proportions

$$\frac{XX''}{XH} = \frac{X'X''}{OH}, \qquad \frac{YY''}{YH} = \frac{Y'Y''}{OH}$$

donnent donc

$$\frac{YH}{XH} = \frac{X'X''}{Y'Y''} = \frac{PX'}{PY'}.$$

Passant à la limite, on a la proportion

$$\frac{HY}{HX} = \frac{PX}{PY},$$

qui prouve que la division X, P, H, Y est isotomique.

Lorsqu'on suit, pour résoudre cette question, la méthode analytique tout indiquée, celle qui consiste à introduire les inconnues AX, AY, on arrive à une conclusion qui renferme le théorème indiqué, sous une forme différente.

Menons par P des parallèles PI, PJ aux droites AX, AY; si XPY est le minimum cherché, *la puissance de* X *par rapport au cercle décrit sur* YJ *comme diamètre est la même que celle de* Y *par rapport au cercle décrit sur* XI *comme diamètre.*

On peut enfin observer que, si l'on remplace les droites AX, AY par deux courbes quelconques U, V, on a le théorème général suivant :

Étant donnés deux courbes quelconques U, V *et un point* P; *si l'on propose de tracer par* P *une droite rencontrant* U *en* X, V *en* Y; *pour que* XY *soit une longueur maxima ou minima, il faut que la projection sur* XY *du point de concours des tangentes en* X *et en* Y *aux courbes données soit l'isotomique de* P *sur* XY.

Voici une dernière remarque :

Si l'on cherche à résoudre le problème : *mener, par un point*

donné P *situé entre deux droites* AX, AY, *une transversale de longueur minima;* on peut observer qu'il résulte du théorème proposé que la solution cherchée dépend d'une équation du troisième degré.

En effet, le point inconnu H se trouve, d'après le théorème en question : 1° sur le cercle Δ décrit sur AP comme diamètre; 2° sur le lieu des isotomiques de P, sur les transversales XPY.

On sait que ce lieu est l'hyperbole Γ passant par P et dont les asymptotes sont AX, AY.

Les courbes Δ et Γ ont le point P commun; elles se coupent, dans l'angle XAY, en un autre point H; c'est le point qui, avec P, détermine la transversale minima. G. DE LONGCHAMPS.

2780. (**1904**, 116) (H. BROCARD). — *Règles simples pour la numération binaire et renseignements bibliographiques.* — Je possède une petite plaquette de quarante et quelques pages intitulée : *Arithmetica binaria sive dyadica,* das ist die Kunst nur mit zwei Zahlen..., zurechnen, herausgegeben von Georg Friederich Brander, mechanicus und der Churfürstl; Bayerischen Akademie der Wissenschaften Mitglied; Augsburg, bei Eberhard Kletts sel. Witwe, 1769. La préface de six pages contient les quelques renseignements bibliographiques suivants :

« Sur cette *Arithmetica binaria* mérite d'être lue la dissertation publiée en 1718 par Jean Bernard Widebourg, professeur de Mathématiques à Iéna, intitulée : *De praestantia arithmeticæ binariæ præ decimali.* Il y cite les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences,* l'*Histoire de l'Académie royale,* et les *Miscellanae Berolinensia,* où l'on parle de l'*Arithmetica binaria,* et conclut que cette numération doit être très ancienne, mais doit avoir été perdue, puisqu'elle est la clef de la *Koua* des Chinois inventée par Fo-HY, leur roi, et philosophe, et qui ne consiste qu'en lignes. »

Suit une citation en latin de l'Ouvrage de Widebourg où l'on parle d'une médaille frappée sur les ordres de Rodolphe Auguste, duc de Brunswick et de Lunebourg, à qui Leibniz avait fait connaître cette numération binaire. Puis il ajoute :

« Monsieur le professeur susdit a fait mettre le dessin de cette médaille au frontispice de sa dissertation, et il se trouve aussi à la page 1002 des *Collectanea de Breslau.* »

L'Opuscule de Brander contient les règles simples suivantes :

Pour convertir un nombre écrit dans la numération binaire en nombre décimal, on écrit au-dessous les uns des autres les nombres formés par le premier, les deux premiers, les trois premiers chiffres, etc., en commençant par la gauche :

1 =	1
1 1	3
1 1 0	6
1 1 0 1	13
1 1 0 1 1	27
1 1 0 1 1 1	55
1 1 0 1 1 1 0	110
1 1 0 1 1 1 0 1	221
1 1 0 1 1 1 0 1 0	442

A côté de chacun de ces nombres on met sa valeur qui est chaque fois égale au double du précédent, ou à ce double augmenté de 1, selon que le nombre à évaluer est terminé à droite par 0 ou par 1.

Telle est la règle donnée par Brander, mais il est facile de voir qu'il suffirait d'écrire le nombre de haut en bas.

Pour convertir un nombre décimal en nombre binaire, Brander donne la règle très simple qui suit :

On écrit d'abord le nombre, au-dessous on met son quotient par 2 et à sa droite le reste 1, ou bien 0, si le quotient est exact; alors on écrit de gauche à droite la suite des restes en commençant par le bas; c'est ainsi que l'on trouve que le nombre décimal 144 est égal à 10010000 binaire :

144 =	0
72	0
36	0
18	0
9	1
4	0
2	0
1	1

L'addition se faisant de la droite vers la gauche, comme dans tout autre système de numération, se réduit pour chaque colonne à

un simple comptage d'unités. Selon que le résultat de ce comptage est pair ou impair on pose 1 ou 0; on retient la moitié exacte ou la petite moitié des unités comptées qu'on ajoute à celles de la colonne suivante, etc. On voit que l'on mêle ici le calcul des nombres décimaux avec le calcul binaire.

Pour la soustraction Brander conseille de la faire aussi comme s'il s'agissait de nombres décimaux et de remplacer dans la différence trouvée les chiffres pairs par des 0 et les chiffres impairs par des 1. Il nous semble qu'il serait aussi facile de le faire directement.

Pour la multiplication, la division et même les extractions de racines, il n'y a pas besoin de règles particulières, ces opérations faites selon les règles générales étant même plus faciles dans le système binaire que dans tout autre.

M. Brocard doit connaître ce qu'a dit Lucas sur le système binaire, pages 247-260 du premier Volume de ses *Récréations mathématiques;* nous nous bornerons donc maintenant à lui signaler trois Communications faites par nous à l'*Association française pour l'avancement des Sciences :*

1887. *Toulouse.* — La numération binaire et la numération octavale.

1897. *Saint-Étienne.* — Arithmétique de la gamme.

1898. *Nantes.* — Les curiosités du calcul. Ch. Berdellé.

2781. (**1904**, 116) (H. Brocard). — L'auteur de la question nous annonce qu'il a reçu de différents correspondants d'intéressants témoignages au sujet du Mémoire de Bour. Il nous prie de vouloir bien leur transmettre ses affectueux remercîments.

La Rédaction.

2787. (**1904**, 118) (A. Tafelmacher). — I. On voit que tous les triangles inscrits dans un même triangle et semblables à un second triangle ont même point double (centre de similitude). On n'a donc qu'à construire ce point-là (par exemple en inscrivant deux de ces triangles) et à abaisser les perpendiculaires sur les côtés du premier triangle; les pieds sont les sommets du triangle demandé.

II. Le théorème peut être considéré comme étant l'inverse de celui-ci : Circonscrire à un triangle donné un triangle semblable à un second triangle donné et dont l'aire soit maximum (segments sur

les côtés du premier triangle, capables des angles du second; droites parallèles aux droites joignant les centres, par les sommets du premier; les points d'intersection des arcs et des parallèles sont les sommets du triangle demandé). Ensuite application de la méthode de la similitude pour revenir au triangle ABC. C.-A. CIKOT.

Autre réponse de M. *E.-A. Majol.*

2800. (**1904**, 162) (E. MAILLET). — La statistique de la température des sources a certainement fait l'objet d'observations suivies, et le lecteur en trouvera des traces et des preuves dans la collection des Volumes des sessions des Congrès internationaux d'Hydrologie, tenus depuis 1886, savoir :

I.	1886...............	Biarritz.
II.	1889...............	Paris.
III.	1894...............	Rome.
IV.	1896.	Clermont-Ferrand.
V.	1898...............	Liége.
VI.	1902...............	Grenoble.

En tout cas, si la question n'est pas encore formellement traitée, il sera très utile de la signaler à l'attention du prochain Congrès de 1905. En y intéressant les sociétaires, on réunira promptement les éléments de la statistique désirée.

Des observations du même genre ont été recueillies et insérées dans les publications de la Société météorologique de France, où on les retrouvera aisément aux noms de Belgrand, Renou, Hervé-Mangon, Grellois, Martin de Moussy, Thurmann, Pinot, Muller, Grad, Rissler. H. BROCARD.

En remerciant M. Brocard de ses renseignements, j'ajouterai seulement deux mots : c'est que je demande *des observations suivies, pendant dix ou quinze ans, au moins une fois tous les deux mois.*

E. MAILLET.

2801. (**1904**, 163) (G. DE ROCQUIGNY). — On a l'identité

$$(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = A^2+B^2+C^2,$$

à condition que

$$(1) \qquad ab+ac+bc=0.$$

Par contre, le produit de trois sommes de trois carrés est toujours une somme de trois carrés.

Même conclusion pour le carré et pour une puissance quelconque d'une somme de trois carrés.

Toutes ces remarques ont été signalées par E. Catalan : *Sur quelques décompositions en carrés* (*N. L. A.*, 1881 et 1883).

L'équation (1) admet pour solutions immédiates

$$a = a, \qquad b = 1 - a, \qquad c = a(a-1).$$

Comme alors $a^2 + b^2 + c^2$ devient égal à $(a^2 - a + 1)^2$, on voit que tout nombre de la forme $a^2 - a + 1$ est somme de trois carrés (ou même seulement de deux carrés, lorsque ce nombre est premier et de la forme $4m+1$).

H. Brocard.

On a, quels que soient a, b, α, β, γ,

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)[a^2\gamma^2 + b^2\gamma^2 + (a\alpha + b\beta)^2]$$
$$= [a\alpha\beta + b(\beta^2 + \gamma^2)]^2 + [a(\alpha^2 + \gamma^2) + b\alpha\beta]^2 + (a\beta\gamma - b\alpha\gamma)^2.$$

Si l'on fait dans cette identité $\alpha = \beta = \gamma = a$, et si l'on pose

$$b = a + d,$$

on obtient l'identité donnée comme exemple.

Mathieu.

La formule

$$(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = A^2 + B^2 + C^2$$

est exacte, grâce à l'identité

$$(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$
$$= (a\beta - b\alpha)^2 + (a\gamma - c\alpha)^2 + (b\gamma - c\beta)^2 + (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2,$$

dans les deux cas.

Premier cas :

$$a\beta - b\alpha = 0, \qquad a = nn, \qquad b = mp, \qquad \alpha = np, \qquad \beta = pq.$$

Second cas :

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$
$$a = K\beta - L\gamma, \qquad b = M\gamma - K\alpha, \qquad c = L\alpha - M\beta.$$

Le cas cité (**1904**, 163) correspond à

$$b = c = a, \qquad \gamma = -\alpha - \beta.$$

A. Werebrusow.

Réponse analogue de M. E.-B. Escott, qui ajoute : *Voir* E. Catalan, *M.*, 2ᵉ série, t. III, 1893, p. 105-106.

2819. (**1904**, 213) (E.-N. Barisien). — *Variétés de quadrilatères.* — I. *Quadrilatère dont deux des angles adjacents sont égaux.* — Se présente dans la section d'un triangle isoscèle par une droite oblique à la base; dans le trapèze birectangle, élément considéré dans la quadrature des courbes; dans le trapèze isoscèle ou contre-parallélogramme.

II. *Quadrilatère dont deux des angles adjacents sont supplémentaires.* — Se présente dans le parallélogramme, le trapèze rectangle et ses variétés, le rectangle et le carré; dans le losange.

III. *Quadrilatère dont deux des angles opposés sont égaux.* — Se présente dans le parallélogramme, le losange, le rectangle, le carré; le quadrilatère birectangle.

Bibliographie sommaire. — *Trapèze birectangle.* — Toutes les études sur l'évaluation approchée des aires planes, P. Mansion (Suppléments à *M.* pour 1881, 1884, 1887).

Contre-parallélogramme. — G. Dostor. — Propriétés du quadrilatère circonscriptible à deux cercles (*N. A.*, 1867, p. 57-62).

J. Neuberg. — Propriétés du contre-parallélogramme (*M.*, 1887, p. 227-228).

Mukhopadhyây. — *Educ. Times*, avril 1888.

Quadrilatère birectangle. — J. Casey, *Plane Trigonometry*, 1888, p. 186-187 et, d'après lui, les premières éditions de la *Géométrie* de Legendre. Il en est effectivement question, par exemple, dans la 12ᵉ édition, 1823, Note V.

Voir aussi rép. **2820**. H. Brocard.

2820. (**1904**, 213) (E.-N. Barisien). — *Quadrilatères inscriptibles dont une des diagonales intérieures est perpendiculaire à la diagonale extérieure.* — On peut obtenir immédiatement une infinité de ces quadrilatères, en considérant la configuration d'un triangle ABC, de ses trois hauteurs AHA′, BHB′, CHC′ et du triangle orthique A′B′C′. Tout côté du triangle primitif est la dia-

gonale extérieure du quadrilatère complet HB'A'C dont une diagonale HC est perpendiculaire à AB, l'autre diagonale étant oblique à AB.

Ces quadrilatères, il est vrai, sont birectangles, mais je n'en vois pas d'autres à signaler.

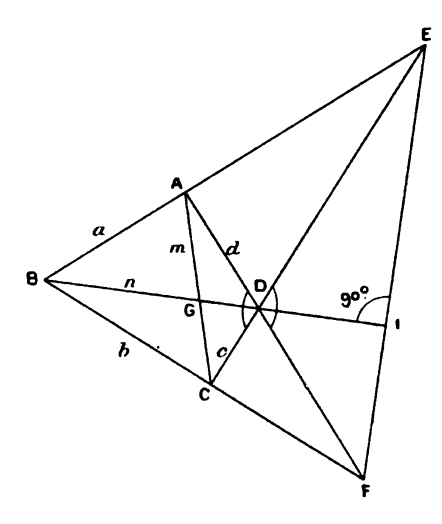
Si donc le quadrilatère donné est birectangle en deux angles opposés, formés par les côtés a et b, c et d, on aura

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 = 4R^2,$$

et la diagonale intérieure e sera perpendiculaire à la diagonale extérieure.

H. BROCARD.

Notations : $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; $AC = m$, $BD = n$.



Exprimons la surface du triangle EDF (au carré) :

$$(1) \qquad \overline{EF}^2 . \overline{DI}^2 = \overline{ED}^2 . \overline{DF}^2 \sin^2 D.$$

Les valeurs de ED, DF sont faciles à calculer (voir *M.*, 1900, p. 75), on a

$$ED = \frac{d(ab + cd)}{b^2 - d^2},$$

$$DF = \frac{c(ab + cd)}{a^2 - c^2}.$$

D'autre part, la diagonale EF est donnée par la relation

$$\overline{EF}^2 = \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd}.$$

On calcule de même facilement DI (*M.*, 1900, p. 75),

$$DI = \frac{cdn}{ab-cd},$$

mais

$$\overline{BD}^2 = n^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

En reportant dans la valeur de $\overline{DI}^2$, on a

$$\overline{DI}^2 = \frac{c^2d^2}{(ab-cd)^2}\,\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Il nous reste maintenant à calculer $\sin^2 D$; nous avons

$$\sin^2 D = 1 - \cos^2 D.$$

Égalons les deux expressions de la diagonale m, nous avons

$$m^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D = a^2 + b^2 - 2ab\cos B.$$

En remarquant que

$$\cos B = -\cos D,$$

on a

$$\cos D = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(ab+cd)}.$$

En reportant dans la valeur de $\sin^2 D$, on trouve

$$\sin^2 D = 1 - \frac{(c^2+d^2-a^2-b^2)^2}{4(ab+cd)^2} = \frac{4(ab+cd)^2-(c^2+d^2-a^2-b^2)}{4(ab+cd)^2}.$$

En reportant toutes ces valeurs trouvées dans (1), nous arrivons à

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(ac+bd)}\,\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{(ad+bc)}$$
$$= \frac{d^2(ab+cd)^2}{(b^2-d^2)^2}\,\frac{c^2(ab+cd)^2}{(a^2-c^2)^2}\left(\frac{4(ab+cd)^2-(c^2+d^2-a^2-b^2)^2}{4(ab+cd)^2}\right),$$

ou, après simplifications,

$$\frac{4(b^2-d^2)(a^2-c^2)}{c^2d^2} = [(c^2+d^2)^2-(a-b)^2][(a+b)^2-(c-d)^2],$$

ou en transformant les différences de carrés (posant $a+b+c+d=2p$),

$$\frac{4(b^2-d^2)(a^2-c^2)}{c^2d^2}$$
$$=(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d),$$

ou, plus simplement,

$$\frac{(b^2-d^2)(a^2-c^2)}{c^2d^2} = 4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Si S désigne la surface du quadrilatère ABCD, on sait que

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

On aura donc finalement

$$(b^2-d^2)(a^2-c^2)=2cd.S.$$

G. Delahaye.

Autres réponses de MM. A. Boutin, Mathieu et Malo. D'après les deux premiers, la condition nécessaire et suffisante est que *la somme des carrés de deux côtés consécutifs soit égale à la somme des carrés des deux autres.*

2828. (**1904**, 239) (E.-N. Barisien). — *Enveloppes de cercles.* — Les cercles décrits sur les abscisses des points d'une ellipse AB A′B′ comme diamètres sont tous tangents entre eux à Oy à l'origine. Ils n'ont donc pas d'enveloppe particulière.

Quant aux cercles décrits sur les ordonnées comme diamètres, ils ont pour équation générale

$$f(\alpha)=x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-\frac{by}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2}=0,$$

et il resterait à éliminer α entre l'équation $f(\alpha)=0$ et sa dérivée par rapport à α

$$f'(\alpha)=2\alpha-2x+\frac{b}{a}y\frac{\alpha}{\sqrt{a^2-\alpha^2}}=0.$$

Ces deux équations, développées, sont du quatrième degré. On

pourra achever l'élimination par la méthode dialytique, mais le résultat en sera très compliqué.

La courbe enveloppe ressemble à une néphroïde aplatie, bitangente à l'ellipse en B, B', et douée de deux rebroussements en A, A'.

La dérivée en α est l'équation de la droite IM de contact du cercle mobile ICM avec l'axe des x, son enveloppe rectiligne, en I, et avec son enveloppe curviligne, en M. Le point M a donc pour coordonnées

$$y = \frac{4ab(a^2-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{4a^2(a^2-\alpha^2)+b^2\alpha^2},$$

$$x = \alpha + \frac{2b^2\alpha(a^2-\alpha^2)}{4a^2(a^2-\alpha^2)+b^2\alpha^2}.$$

Ce sont les équations paramétriques de la courbe-enveloppe.

Elles donneraient aussi le coefficient angulaire de la tangente ou de la normale en fonction de α. C'est ainsi, par exemple, que l'on aura les limites de la courbe par l'équation $\frac{dx}{d\alpha} = 0$, bicarrée en α.

H. Brocard.

Autre réponse de M. E. Malo qui ajoute : L'enveloppe est une sextique unicursale unicirculaire.

2829. (**1904**, 239) (E.-N. Barisien). — *Propriétés de certains nombres.* — Les nombres dont la somme du carré et du cube est terminée par au moins deux zéros sont :

1° Tous ceux terminés par un zéro, à partir de 10, tels que 10, 20, 30, 40, 50, etc. à l'infini;

2° Tous ceux terminés par un 4 et dont le chiffre des dizaines est 2 ou 7, tels que 24, 74, 124, 174, 224, 274, etc.;

3° Tous ceux terminés par 5 et dont le chiffre des dizaines est impair, tels que 15, 35, 55, 75, 95, 115, 135, etc.;

4° Tous les nombres terminés par 99, tels que 99, 199, 299, 399, 499, 599, etc.

Il ne peut pas en exister d'autres.

A. Clause, A. Gérardin, Nazarevsky, Rius y Casas (Saragosse).

Autres réponses de MM. A. Boutin, H. Brocard, Plakhowo, G. Russo.

La question revient à résoudre la congruence

$$x^2(x+1) \equiv 0 \pmod{100}.$$

On trouve évidemment une première série de valeurs lorsque

$$x \equiv 0 \pmod{10}.$$

Une autre série de valeurs est également donnée par les solutions de la congruence

$$x+1 \equiv 0 \pmod{100}.$$

La congruence $x^2 \equiv 50 \pmod{100}$ est impossible.

La congruence $x+1 \equiv 50 \pmod{100}$ donne pour x des valeurs impaires, elle ne peut donc fournir de solutions.

Si $x^2 \equiv 25 \pmod{100}$, on a

$$x \equiv 5 \pmod{10},$$

et la congruence

$$x+1 \equiv 0 \pmod{4}$$

nous fournit alors les solutions

$$15, \quad 35, \quad 55, \quad 75, \quad 95, \quad \ldots,$$

soit, en général,

$$x = 20n + 15.$$

Si $x+1 \equiv \pm 25 \pmod{100}$, dans les deux cas x est pair, donc

$$x^2 \equiv 0 \pmod{4},$$

et nous avons alors les solutions

$$x = 24, \quad 74, \quad \ldots, \qquad \text{soit} \qquad 50n + 24.$$

Les solutions de la congruence donnée sont donc des formes

$$x = 10n, \qquad 100n - 1, \qquad 20n + 15 \qquad \text{et} \qquad 50n + 24.$$

Remarque. — Lorsque $x + 1 = z^2$, on a

$$x^2(x+1) = y^2.$$

En raison de la forme des nombres x, ce fait a souvent lieu.

G. Picou.

2830. (**1904**, 239) (C. Popovici). — *Écoulement des gaz.* — L'équation

$$dp = \varepsilon\, dv$$

est fausse. Le volume du gaz sorti augmente de dv, mais sa densité ne reste pas constante, et l'on a

$$dp = \varepsilon\, dv + (v - v_0)\, d\varepsilon = - v_0\, d\varepsilon.$$

Le poids du gaz sortant est égal au poids que perd le ballon.

Mesnager, *Colonel Néru.*

L'anomalie signalée repose sur une erreur au début.

On a

$$p = \varepsilon(v - v_0),$$

$$dp = \varepsilon\, dv + (v - v_0)\, d\varepsilon = - v_0\, d\varepsilon = - v_0\, \varepsilon \frac{d\pi}{\pi}.$$

Mais

$$\varepsilon = \frac{P_0 - p}{v_0}.$$

Donc

$$dp = -(P_0 - p)\frac{d\pi}{\pi} \qquad \left(\text{et non } - P_0 \frac{d\pi}{\pi}\right).$$

On en tire aisément

$$\frac{\pi}{\pi_0} = \frac{P_0 - p}{P_0},$$

et, en posant $dp = \lambda\pi\, dt$, il vient

$$\frac{dp}{\pi_0 \lambda\, dt} = \frac{P_0 - p}{P_0},$$

$$p = P_0\left(1 - e^{-\frac{\pi_0}{P_0}\lambda t}\right)$$

ou

$$\pi = \pi_0 e^{-\frac{\pi_0}{P_0}\lambda t}.$$

$$v = v_0 e^{\frac{\pi_0}{P_0}\lambda t}.$$

Toute contradiction a disparu. J. Bosler.

Réponse analogue de M. C. Popovici.

AVIS.

Nous croyons devoir appeler l'attention de nos lecteurs sur l'*édition française de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées* rédigée et publiée, d'après l'*édition allemande,* sous la direction de M. Jules Molk. Le 1er fascicule du Volume I du Tome I vient de paraître (Paris, Gauthier-Villars; et Leipzig, B.-G. Teubner, 10 août 1904). L'Ouvrage complet comprendra six Tomes. On y trouvera de nombreux renseignements historiques et bibliographiques sur toutes les parties des Mathématiques.

LA RÉDACTION.

QUESTIONS.

693. [V9] (1895, 418) Dans l'*Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*, par J. HOUËL (Paris, Gauthier-Villars, 1867), p. 67, on trouve la Note suivante :

« Lagrange avait reconnu l'indépendance entre les formules de la Trigonométrie sphérique et l'axiome II (ou postulat 5 d'Euclide). Il considérait d'ailleurs toutes les autres tentatives de démonstration comme insuffisantes. C'est ainsi qu'il s'exprimait dans ses conversations avec M. Biot (*Communiqué par M. Lefort*). »

Existe-t-il, dans les *Œuvres* imprimées de Lagrange, quelque passage qui confirme cette assertion de Houël?

P. MANSION (Gand).

694. **[$M^2 2d$]** (1895, 418) On lit (*A. E. N.*, 2ᵉ série, t. VII, 1878, p. 284) la phrase suivante relative aux transformations par rayons vecteurs réciproques, où

$$ds^2 = \frac{1}{h^2}(dX^2 + dY^2 + dZ^2)$$

avec

$$h = aX + bY + cZ \qquad \text{et} \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 0 :$$

« M. Cremona, croyons-nous, a le premier appelé l'attention sur ce cas spécial de l'inversion. »

Le renseignement donné sous forme dubitative par M. Darboux est-il exact? Sinon, qui a traité le premier ce cas, et dans quel Recueil? L. LÉVY.

695. **[A3g]** (1895, 418) Dans des recherches sur la théorie des caisses de retraites, j'ai été amené au théorème suivant :

« Soit

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1} = 0$$

une équation où $1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > 0$; appelons, de plus, α_1 la plus petite et α_2 la plus grande des fractions $\frac{a_1}{1}$, $\frac{a_2}{a_1}$, ..., $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$; alors, les modules de toutes les racines de l'équation sont compris entre α_1 et α_2. »

Ce théorème est-il indiqué dans quelque Traité sur la théorie des équations? G. ENESTRÖM (Stockholm).

2848. **[V9]** Existe-t-il, en français ou en d'autres langues, des Ouvrages analogues à celui de Maupin : *Questions d'Algèbre.* P. RENARD.

2849. **[V9]** Quels sont les titres des Ouvrages où Wronski a traité des lois du hasard et du calcul des probabilités? Dans quel ordre faut-il lire ces ouvrages pour se faire une idée de ses théories à ce sujet? P. RENARD.

2850. [C2j] Je désire connaître les trois intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^2 (C\sin^2\theta + D\cos^2\theta)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta}{(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^2 (C\sin^2\theta + D\cos^2\theta)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\, d\theta}{(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^2 (C\sin^2\theta + D\cos^2\theta)}.$$

E.-N. Barisien.

2851. [O7b] On demande une construction géométrique de la route qu'un rayon de lumière doit suivre pour arriver d'un point donné dans l'air à un point donné dans l'eau. La surface de l'eau est plane.

N. Quint (La Haye).

2852. [R, V1a] 1° Existe-t-il, en France ou en Allemagne, un seul établissement officiel où l'on enseigne la Mécanique *sans faire usage de la notion de force?*

2° Existe-t-il des établissements officiels où l'on enseigne la Mécanique en commençant par *la Dynamique,* pour finir, par déduction, par la Statique?

Saurel (Bruxelles).

2853. [D2f] Soient y, $\varphi(x)$, ..., $\varphi_{n-1}(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$ $2n$ fonctions liées entre elles par les relations suivantes :

$$y = \varphi(x) \int \frac{dx}{f_1(x)},$$

$$f_1(x) = \varphi_1(x) \int \frac{dx}{f_2(x)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$f_{n-1}(x) = \varphi_{n-1}(x) \int \frac{dx}{f_n(x)}.$$

On a, en conséquence,

$$y = \varphi(x)\int\frac{dx}{\varphi_1(x)\int\frac{dx}{\varphi_2(x)\ldots\varphi_{n-1}(x)\int\frac{dx}{f_n(x)}}}.$$

Si, lorsque n tend vers l'infini, le second membre tend vers une limite déterminée et finie, on pourra écrire, suivant une habitude générale,

$$(1)\qquad y = \varphi(x)\int\frac{dx}{\varphi_1(x)\int\frac{dx}{\varphi_2(x)\ldots}}$$

Supposons, par exemple,

$$\varphi(x) = 1, \qquad \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \ldots = x;$$

on aura

$$y = \int\frac{dx}{x\int\frac{dx}{x\int\frac{dx}{\ldots}}},$$

et, par suite,

$$y = \int\frac{dx}{xy} \qquad \text{ou} \qquad y\,dy = \frac{dx}{x};$$

donc

$$y = \sqrt{\log(x^2)}.$$

Soient, au contraire, les mêmes fonctions y, $\varphi(x)$, ..., $f_n(x)$ liées entre elles par des relations de la forme suivante :

$$y = \frac{\varphi(x)}{\frac{df_1(x)}{dx}}, \quad f_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\frac{df_2(x)}{dx}}, \quad \ldots, \quad f_{n-1}(x) = \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\frac{df_n(x)}{dx}}.$$

On en tire, par un passage à la limite,

$$(2)\qquad y = \frac{\varphi(x)}{\frac{d}{dx}\left\{\frac{\varphi_1(x)}{\frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi_2(x)}{\frac{d}{dx}\ldots}\right]}\right\}}.$$

Cela posé, je désire savoir si des expressions analytiques des formes (1), (2) ont été déjà rencontrées et appliquées; en particulier si l'on a déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces expressions aient des significations déterminées. Il n'est pas même nécessaire de remarquer l'analogie qu'elles offrent avec les fractions continues algébriques. G. LORIA (Gênes).

2854. **[D4a]** M. Borel, dans son Mémoire des *Acta math.*, t. XX, p. 366, Note (¹), 1896, énonce au sujet des plus grandes valeurs positives A_r et B_r de la partie réelle de $P(z)$ et $-P(z)$ pour $|z| = r$, où $P(z)$ est une fonction entière, ce théorème :

Notre démonstration, légèrement modifiée, prouverait qu'il n'est pas possible que l'inégalité $B_r > A_r^{1+\varepsilon}$, ε *positif fixe quelconque, soit vérifiée dans une série d'intervalles* $[r_1 < r < r_2]$ *tels que l'étendue totale de ceux de ces intervalles qui sont compris entre* 0 *et* R *reste, lorsque* R *croît, constamment supérieure à* kR, k *étant un nombre positif quelconque.*

A-t-il été publié quelque part une démonstration détaillée de ce théorème? Sinon, peut-on en donner une?

Sigma.

2855. **[V1a]** Il serait intéressant de former une collection des erreurs commises par les mathématiciens renommés (propriétés nettement inexactes, démonstrations fausses, erreurs de calculs, etc.) ou de leurs avis contradictoires. Voici quelques indications de ce genre :

1° *Erreurs.* — Ampère (à 13 ans), sur la quadrature du cercle, d'après Arago (ARAGO, *Œuvres,* éloge d'Ampère).

Abel, action de la Lune (J. BERTRAND, *Éloges académiques,* 1902, p. 317; Paris, Hachette).

Lamé (*C. R.*, Vol. XXIV, 1847, p. 310, et *J. M.*, Vol. XII, 1re série, p. 137 et 172), et Cauchy (*C. R.*,

Vol. XXIV, 1847, p. 517, 633, 661; Vol. XXV, p. 579, 1029), sur le dernier théorème de Fermat.

Chasles et d'autres (HALPHEN, *Notice sur ses travaux*, 1885, p. 6 et suiv.; Paris, Gauthier-Villars), sur les systèmes de coniques.

Legendre (*Théorie des nombres*, t. II, édition de 1830, p. 76, erreur rectifiée par A. DUPRÉ, *Examen d'une proposition de Legendre*, 1859 (Paris, Mallet-Bachelier), théorème relatif à la progression arithmétique (*Géométrie*, 1812, 9e édition, Note II, p. 280; Paris, Firmin-Didot), démonstration du *postulatum* d'Euclide.

Laplace (*Œuvres*, t. V, 1882, p. 507; Paris, Gauthier-Villars), calculs astronomiques.

2° *Avis contradictoires*. — Laplace, d'Alembert, Carnot, Duhamel, etc. (DUHAMEL, *Méthodes dans les Sciences de raisonnement*, t. II, 2e édition, 1878, p. 161; Paris, Gauthier-Villars), au sujet des quantités négatives.

Legendre et Duhamel (DUHAMEL, *loc. cit.*, t. II, p. 323), définition de la ligne droite.

Bertrand, Condorcet, Poisson, Laplace (BERTRAND, *Calcul des probabilités*, 1888, p. 319; Paris, Gauthier-Villars), applications juridiques du calcul des probabilités.

Lagrange et les mathématiciens actuels (DARBOUX, *B. D.*, t. IV, 1873, p. 158, et PICARD, *Analyse*, t. III, 1896, p. 50; Paris, Gauthier-Villars).

Je serais reconnaissant aux correspondants qui voudraient bien m'indiquer, pour les mathématiciens *décédés* seulement, d'autres cas analogues *bien nets* (en quelques lignes autant que possible), en faisant observer, pour les erreurs (1), si la rectification était ou non facile. E. MAILLET.

---

(1) Il doit y en avoir de Gauss et Binet : je ne les retrouve plus.

RÉPONSES.

517. (**1895**, 131; **1902**, 137) (L. Certo). — Dans quel travail, et à quelle époque, Leslie Ellis s'est-il occupé du problème de l'aiguille? Je ne puis mieux faire que de conseiller une recherche dans l'Ouvrage intitulé :

R. Leslie Ellis, *Mathematical and other writings,* edited by W. Walton, with Memoir of Harvey Goodwin (late Bishop of Carlisle). Portrait. In-8°. Macmillan and Bowes, Cambridge, 1863.

L'étude indiquée doit s'y trouver. H. Brocard.

561. (**1895**, 164; **1903**, 121) (R. Liouville). — *Au sujet de la surface* $xyz = a^3$. — Je signalerai deux études antérieures à 1895.

M. Roberts. — Note sur quelques applications de la théorie des surfaces (*N. A.*, 1855, p. 268-271). L'auteur y désigne la surface du nom d'*hyperboloïde cubique*

Floquet. — Sur les propriétés de la surface $xyz = l^3$ (*C. R.*, t. CV, 1887, p. 854-856).

Note. — Le point $x = y = z = a$ est un ombilic, et le rayon de la sphère osculatrice est $a\sqrt{3}$. H. Brocard.

591. (**1895**, 202; **1903**, 249) (G. Luzón). — *Calcul graphique des probabilités* (**1904**, 75). — Je vois à la fin du *Traité de calcul des probabilités* de M. H. Laurent, dans la liste des principaux Ouvrages ou Mémoires publiés sur le Calcul des probabilités, un Mémoire de Poudra et Hossard : *Question de probabilité résolue par la Géométrie* (in-8°; Paris, 1819) qui semble répondre à la question de M. Luzón. N. Plakhowo.

658. (**1895**, 317; **1904**, 210) (W.-W. Beman). — Je *crois* que c'est Antoine Arnault qui, le premier, a employé, en Géométrie, la locution *il faut et il suffit.* Elle se trouve dans le XIIe Livre de ses *Nouveaux éléments de Géométrie* de 1667, Ouvrage presque oublié, à tort, pendant de longues années et pour ainsi dire découvert de

nouveau par M. KARL BOPP (*Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, t. XIV, p. 187-338. Leipzig, 1902; *voir*, pour la locution en question, p. 291).

MORITZ CANTOR (Heidelberg).

1623. (**1899**, 200) (G. ESPANET). — *Division graphique de la lemniscate.* — La division de la lemniscate, suivant les mêmes proportions que le cercle, a été, comme on le sait, découverte par Fagnano; mais il pourra être intéressant d'en rapporter ici le témoignage, d'après un article des *Mémoires*, etc. de Trévoux, d'août 1753, pages 1747-1765.

Rendant compte de l'Ouvrage : *Produzioni matematiche del conte Julio Carlo di Fagnano, marchese de Toschi e di Sant Onorio, etc.* (Pesaro, MDCCL), le rédacteur s'exprime ainsi au sujet de la *courbe feuillée* (désignée plus tard du nom de *lemniscate*) :

« Il n'y a dans cette courbe aucun arc auquel on n'en puisse trouver, dans elle-même, quelque autre égal, quoique dissemblable.

» Une autre propriété, également particulière à cette courbe, puisqu'on ne connaît aucune autre courbe algébrique rectifiée qui puisse se l'approprier, c'est que son quart peut se diviser algébriquement en 2, 3 et 5 parties égales, ou plutôt en autant de parties qu'il y a de nombres dans ces trois formules 2×2^m, 3×2^m, 5×2^m. L'exposant m signifie un nombre quelconque entier et positif. On ne peut lire tout ce que M. le marquis de Saint-Honorio a écrit sur cette courbe, depuis la page 343 jusqu'à la 369ᵉ, sans sentir la justice du droit qu'il s'arroge en l'appelant *sa courbe, la mia curva.* Nous croyons qu'il a ignoré les droits que le Père Castel a sur elle et qu'il a si bien établis contre M. Mac Laurin. »

H. BROCARD.

1882. (**1900**, 196) (E.-B. ESCOTT). — *Équations indéterminées cubiques* (**1901**, 183; **1902**, 16, 155; **1903**, 82). — Une solution partielle est donnée par la formule (**1902**, 164)

$$\begin{aligned}[(M+N)\psi \pm \omega\varphi^2]^3 &+ [-(M+N)\varphi \mp \omega\psi^2]^3 \\ &= (-M\psi \pm \omega\varphi^2)^3 + (M\varphi \pm \omega\psi^2)^3 \\ &= (-N\psi \pm \omega\varphi^2)^3 + (N\varphi \mp \omega\psi^2)^3,\end{aligned}$$

où

$$M^2 + MN + N^2 = 3\omega^2\varphi\psi.$$

A. WEREBRUSOW.

2179. (**1901**, 224) (E.-B. Escott). — *Tables de solutions d'équations cubiques* (**1902**, 51, 64; **1904**, 31, 96). — La formule d'Euler ou de Binet est un cas particulier de la mienne (**1902**, 164) pour

$$\varphi = a^2 + ab + b^2, \qquad \psi = c^2, \qquad \omega = 1,$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{MN}) &= c^2(a + 2a,\ a - b) \\ &= c^2(2a + b,\ -a - 2b) = c^2(2a + b,\ -a + b).\end{aligned}$$

On obtient aussi la formule (1) (**1898**, 253) pour

$$\varphi = s^2, \qquad \psi = r^2, \qquad \omega = 1,$$

$$\mathrm{M} = 2sr, \qquad \mathrm{N} = -sr.$$

La seconde formule (**1898**, 253) est une des formules (**1904**, 31).

A. Werebrusow.

2243. (**1901**, 309) (V. Aubry). — *Roulettes gauches* (**1902**, 242; **1904**, 98, 194). — Je me permettrai de rappeler que la question des *roulettes gauches* non sphériques, et autres que les épicycloïdes, ont été étudiées dans l'article cité (**1902**, 242) de M. H. Laurent (*S. M.,* t. II. 1873-1874, p. 84-93). L'auteur observe que la roulette relative à des courbes dans l'espace est généralement indéterminée; deux courbes données ont une infinité de roulettes; en effet, le mouvement de la roulante n'est pas défini quand on se contente de dire qu'elle roule sans glisser sur la courbe gauche fixe prise pour base, il faut encore donner à chaque instant l'angle des plans osculateurs des deux courbes, ou toute autre notion équivalente; on pourrait, par exemple, assujettir la roulante à s'appuyer sur une courbe ou sur une surface directrice; dans la présente Notice, M. H. Laurent a préféré se donner l'angle des plans osculateurs à cause de sa liaison intime avec les affections des courbes que l'on étudie.

H. Brocard.

2306. (**1902**, 89) (H. Vogt). — Dans le *Formulaire de Mathématiques* (§ 35), M. G. Peano observe que la notation $\underline{|m}$ pour

$$1.2.3\ldots m$$

est adoptée dans les Ouvrages anglais. Je n'en ai pas d'assez anciens pour pouvoir remonter avec certitude à l'origine de cette notation. Je la rencontre, par exemple, dans l'Ouvrage de J. Casey : *A treatise on plane Trigonometry*. Dublin, 1888.

H. Brocard.

2370. (**1902**, 145) (A. GRÉVY). — *Théorie et emploi du cerf-volant* (**1902**, 325; **1903**, 28). — La question posée par la Rédaction (**1903**, 28-29) me paraît complètement résolue par la lecture de l'Ouvrage intitulé : *Les cerfs-volants,* par J. LECORNU. Paris, Nony, 1902.

Voir aussi les réponses **1429** (**1899**, 4; **1900**, 167). H. BROCARD.

2372. (**1902**, 145) (N.-J. HATZIDAKIS). — *Restes du système vigésimal dans plusieurs langues* (**1903**, 29, 164; **1904**, 150). — Cette question a été présentée sous une autre forme et traitée dans les quatre Volumes de l'*Intermédiaire de l'A. F. A. S.,* 1896 à 1899, à l'occasion de la substitution de *soixante-dix,* etc. à *septante,* etc. (question **32**).

Dans les différentes réponses, on a cité successivement le vieux français jusqu'au XVIII[e] siècle, et même le français moderne, les langues du Pamir, l'anglais, le basque (ou euskarien), le néo-calédonien, les langues d'oc, plusieurs peuples de l'Afrique (Oubanghi et régions du Tchad, etc.), Vaugelas et R. Baron (*E. M.,* 1899, p. 101-105). H. BROCARD.

2414. (**1902**, 227) (PAULMIER). — *Lignes d'égale teinte* (**1903**, 133). — Peut-être conviendrait-il d'étudier les Mémoires que voici, qui semblent se rapporter à la présente question :

F. KAMMERER. — Die Licht-Intensitäts Curven auf Krummen Flächen. Wien, 1862, 2 planches.

F. MATZEK. — Construction der Curven bestimmter Beleuchtungs-Intensität zu Rotationsflächen mit Benutzung berührender Kugelflächen (s. d.).

R. HOPPE. — Surfaces également illuminées, 1867.

H. BROCARD.

2415. (**1902**, 227) (PAULMIER). — *Équation*

$$x^3 = (y + x + 1)(y - x - 1)$$

(**1903**, 63, 168). — Pour x pair, y étant toujours impair, le diviseur commun des facteurs de x^3 sera 2.

1° Ainsi

$$y + x + 1 = 4n^3, \qquad y - x - 1 = 2v^3,$$

$$1 = 2n^3 - 2nv - v^3, \qquad n\sqrt[3]{2} = v + \theta \qquad (\theta > 2),$$

$$1 = (3\theta - \sqrt[3]{4})(v^2 + \theta v),$$

ce qui est impossible.

2° De même pour le cas

$$y + x + 1 = 2n^2, \qquad y - x - 1 = 4v^2.$$

A. Werebrusow.

2555. (**1903**, 72) (V. Aubry). — *Vibrations et lignes nodales d'un anneau* (**1904**, 52). — Pour les récents travaux relatifs à cette question, *voir* aux *P. L. M. S.* les études suivantes :

A.-E.-H. Love. — On the vibrations of an elastic circular ring, t. XXIV, 1892-1893, p. 118-120.

W.-D. Niven. — The harmonics of a ring, t. XXIV, 1892-1893, p. 372-386.

H.-S. Carslaw. — The fluted vibrations of a circular vortex ring with a hollow core, t. XXVIII, 1896-1897, p. 97-119.

H. Brocard.

2591. (**1903**, 148) (R.-C. Archibald). — Une notice bibliographique (*E. M.*, 1904, p. 323-324), me paraît devoir être donnée comme première indication. H. Brocard.

2615. (**1903**, 177) (E.-B. Escott). — *Constante d'Euler en fraction continue.* — Cette recherche a sans doute été essayée par E. Catalan, mais il ne paraît pas que lui ni d'autres y aient réussi. Je n'en ai trouvé aucune trace dans les études qu'il a publiées sur la constante d'Euler [*voir* rép. **2404** (**1904**, 194)]. H. Brocard.

2663. (**1903**, 255) (G. de Longchamps). — *Nombre* π (**1903**, 325; **1904**, 62, 119). — L'ingénieuse solution approximative de M. P.-F. Teilhet paraît correspondre surtout à des approximations successives de π, plutôt qu'au problème de la rectification de la circonférence.

Dans la pratique on emploie souvent la valeur approchée $\pi = 3,14$, mnémoniquement connue des praticiens les plus modestes; la formule de M. Teilhet :

$$\pi = \sqrt{\overline{3,14}^2 + \overline{0,10}^2} = 3,1415919,$$

leur permettrait de retrouver cinq décimales exactes et ne serait pas inutile aux praticiens dont l'instruction est plus étendue et pour lesquels la valeur mnémonique est 3,1416.

On aurait encore

$$\pi = \sqrt{\overline{3,14}^2 + \overline{0,10}^2 + \overline{0,00021}^2} = 3,14159265.5$$

avec huit décimales exactes. V. WILLIOT.

2674. (**1903**, 274) (E.-B. ESCOTT). — *Identité des premiers termes de deux polynomes* (**1904**, 121). — La question **2674** est la même que la question **2692**, variée seulement dans la forme : elle admet donc la même solution. E. MALO.

2683. (**1903**, 277) (N. QUINT). — A titre de simple indication bibliographique, la construction du pentagone régulier rapportée (*M.*, 1897, p. 194) d'après Cayley est sans doute du type de celle de von Staudt (*Cr.*, t. **24**, 1842), modifiée par Schrœter (*Cr.*, t. **75**, 1872) appliquée à l'inscription du polynome régulier de 17 côtés.

Le principe de ce procédé paraît dû à Steiner, qui l'a exposé dans son étude intitulée : *Die geometrische Konstruktionen mittelst der gerade Linie und eines festen Kreises*, 1833.

Voir aussi : F. KLEIN, *Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire* (rédact. J. Griess). Paris, Nony, 1896. La construction du polygone régulier de 17 côtés. H. BROCARD.

Grâce aux renseignements de M. Brocard, je puis dire que le tracé du pentagone est dû à von Staudt. En effet, dans le *Journal de Crelle* (t. **24**, 1842, p. 251), il donne une construction sans démonstration du polygone régulier de 17 côtés et y ajoute une construction du même type pour le pentagone, qui n'est autre que le tracé de *Mathesis* (1897, p. 194). La démonstration de cette construction a été donnée par Schrœter dans le même Journal (t. LXXV, 1873, p. 13). N. QUINT.

2695. (**1903**, 300) (*Artigensis*). — *Théorème de Pascal* (**1904**, 174). — Consulter encore : THOMAS WEDDLE, *Theorems in space anologous to those of Pascal and Brianchon in a plane*, 1849.

T. HAYASHI (Tokio).

2724. (**1904**, 33) (P.-F. TEILHET). — *Décomposition de tout nombre en un nombre donné de puissances $n^{\text{ièmes}}$.* — Une formule analogue à celle énoncée par M. Teilhet se trouve dans les *Opera*

posthuma d'Euler. On voit tout de suite que le nombre $2^n - 1$ est la somme d'au moins $2^n - 1$ puissances $n^{\text{ièmes}}$ (chacune égale à l'unité). De même le nombre

$$2^n \mathrm{E}\left(\frac{3^n}{2^n}\right) - 1$$

est la somme d'au moins

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{E}\left(\frac{3^n}{2^n}\right) + 2^n - 2$$

puissances $n^{\text{ièmes}}$ $\left[\text{dont } \mathrm{E}\left(\frac{3^n}{2^n}\right) - 1 \text{ égales à } 2^n\text{, et les restantes } 2^n - 1\right.$ $\left.\text{égales à l'unité}\right]$.

Pour $n = 2, 3, 4$, la formule (A) donne les valeurs 4, 9, 19, données par Waring.

Pour les cubes, *voir* Jacobi, *Ges. Werke*, t. VI, p. 322 (*Cr.*, t. **42**, 1851, p. 41), Il donne la décomposition en cubes de tous les nombres moindres que 12000. Il est curieux de remarquer que *deux* nombres seulement, savoir 23 et 239, sont la somme de *neuf* cubes au moins. La Table, calculée par Dahse, donne aussi d'autres résultats intéressants. G. Vacca (Gênes).

Je crois utile de rappeler ici les résultats suivants : Liouville a démontré que tout nombre entier est la somme arithmétique d'un nombre limité $\leqq 53$ de bicarrés d'entiers positifs (Le Besgue, *Exerc. d'Analyse numérique*, Paris, 1859, p. 112); de mon côté, j'ai établi que tout nombre entier supérieur à une certaine limite finie est la somme (à un nombre limité d'unités près) d'un nombre limité $\leqq 12$ de cubes d'entiers positifs (*A. F.*, Mém. du Congrès de Bordeaux, 1895, p. 242) et aussi d'un nombre limité $\leqq 192$ de puissances $5^{\text{ièmes}}$ d'entiers positifs (*J. M.*, 1896, p. 363). 17 cubes positifs au plus suffisent en général pour former, par addition, tous les nombres entiers, 12 pour former tous les multiples de 6. E. Maillet.

2761. (**1904**, 91) (*Carevyge*). — (**1904**, 206). — La question de savoir si une construction peut s'effectuer à la règle seule a été abordée par M. F. Klein qui a conclu à la possibilité pour toutes les expressions algébriques dont la forme est rationnelle.

D'après une remarque de Poncelet et de Steiner, l'adjonction d'un cercle fixe de centre donné permet de construire, à l'aide de la règle, toutes les expressions dépendant de radicaux carrés.

Ces observations auront leur utilité dans une étude qui a été proposée à diverses reprises, soit ici, soit dans l'enseignement.

Voir F. KLEIN, *Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire* (réd. J. Griess). Paris, Nony, 1896. H. BROCARD.

2764. (**1904**, 93) (E. MAILLET). — (**1904**, 224). — *Voir* aussi : V. WILLIOT, *Sur une généralisation de la formule d'interpolation de Lagrange* (d'après une Lettre de C. Hermite à Borchardt, *Cr.*, t. **84**, p. 70), *B. D.*, 1890, Ire Partie, p. 218-224.

H. BROCARD.

On trouve la formule demandée dans le *Traité d'Analyse* de M. H. Laurent (t. III, p. 8) :

$$f(x) = \sum \frac{F(x)}{(\alpha-1)!}\left(\frac{d^{\alpha-1}}{dz^{\alpha-1}}\frac{\theta(z)}{x-z}\right)_{z=\alpha},$$

où

$$F(x) = (x-a)^{\alpha}(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots,$$

$$\theta_i(x) = \frac{(x-a_i)^{\alpha_i}f(x)}{F(x)}.$$

Cette formule, dans le cas où des a sont de la forme $p+q\sqrt{-1}$ et $p-q\sqrt{-1}$, peut s'écrire

$$f(x) = \sum \frac{F(x)}{(\alpha-1)!}\frac{d^{\alpha+1}}{da^{\alpha-1}}\frac{\theta(a)}{x-a} + \sum \frac{2}{(\alpha-1)!}\frac{d^{\alpha-1}}{dp^{\alpha-1}}\frac{(x-p)\varphi(p,q)-q\psi(p,q)}{(x-p)^2+q^2},$$

et l'on a

$$\theta(p+q\sqrt{-1}) = \varphi(p,q)+\sqrt{-1}\,\psi(p,q).$$

N. B. — Ces formules sont commodes pour l'intégration et la décomposition des fractions rationnelles. *Anonyme.*

2765. (**1904**, 94) (E.-N. BARISIEN). — *Courbe unicursale. — Lieu du point de rencontre d'une tangente à l'ellipse avec les normales à cette courbe menées par les extrémités du diamètre parallèle à la tangente* (**1904**, 225). — L'équation indiquée par M. *Ler* (**1904**, 225) doit contenir un facteur étranger, car la courbe n'est ni du quatrième ordre ni du huitième, mais bien du sixième. Il suffit, pour s'en rendre compte, de faire le dénombrement des points du lieu rejetés à l'infini, ce à quoi l'on parvient par des considé-

rations géométriques aisées. Or, l'on trouve quatre points réels situés deux par deux sur les axes, et deux points imaginaires confondus avec les points à l'infini de l'ellipse.

Du reste les équations mêmes considérées par M. *Ler* l'établissent, car l'on en déduit immédiatement les valeurs

$$x = -a\sin\varphi - \frac{ab}{c^2}\frac{b}{\cos\varphi},$$

$$y = \quad b\cos\varphi + \frac{ab}{c^2}\frac{a}{\sin\varphi},$$

qui deviennent, en posant $\tang\frac{1}{2}\varphi = \theta$,

$$x = -a\frac{2\theta}{1+\theta^2} - \frac{ab}{c^2}b\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2},$$

$$y = \quad b\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} + \frac{ab}{c^2}a\frac{1+\theta^2}{2\theta},$$

c'est-à-dire, en ramenant au même dénominateur,

$$-\frac{c^2x}{a} = \frac{2[b^2(1+\theta^2)^2 + 2c^2\theta(1-\theta^2)]\theta}{2(\theta-\theta^3)},$$

$$\frac{c^2y}{b} = \frac{[a^2(1+\theta^2)^2 + 2c^2\theta(1-\theta^2)](1-\theta^2)}{2(\theta-\theta^3)}.$$

Il s'agit donc d'une unicursale dont l'ordre est marqué par le plus haut degré qui soit atteint par le paramètre variable θ dans les polynomes formant le dénominateur ou le numérateur des expressions des coordonnées : or, ce degré est le sixième dans le numérateur de y. Toutefois, pour satisfaire complètement à l'énoncé, il est nécessaire de faire entrer en ligne de compte une deuxième sextique, qu'on obtient en changeant simplement le signe des premiers termes dans les expressions de x et y en fonction de φ. Le lieu, dans son ensemble, est donc du *douzième* ordre, mais décomposable.

E. Malo.

Je trouve, en coordonnées cartésiennes, l'équation suivante du sixième degré :

$$a^2b^2[ab(x^2+y^2)+c^2xy]^2$$
$$= [(a^2-b^2)xy + abc^2]^2(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)$$

que je n'ai pu réduire au quatrième degré.

A. Tafelmacher (Santiago de Chile).

En traitant la même question j'avais trouvé une équation du sixième degré

$$c^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+1\right)-x^4-y^4$$
$$-\frac{2x^2y^2}{a^2b^2}(a^4+b^4-a^2b^2)$$
$$-2c^2\frac{xy}{ab}\left(y^2\frac{a^2}{b^2}+x^2\frac{b^2}{a^2}-a^2-b^2\right)-c^4=0.$$

MATHIEU.

2768. (**1904**, 94) (E.-N. BARISIEN). — *Lieu géométrique* (**1904**, 225). — Dans un Traité intitulé : *Sobre triángulos inscritos en un triángulo dado,* et dont la Ire Partie vient de paraître ici dans la *Revista de Matemáticas,* j'ai démontré qu'à une série de triangles semblables inscrits dans un triangle donné et disposés d'une manière définie correspond un centre de position qu'il est facile de déterminer. Or, on conclut que des points homologues quelconques des triangles inscrits se trouvent sur des lignes droites. Donc, il en est de même des centres des triangles équilatéraux en question. En particulier, le triangle donné étant aussi équilatéral, la ligne droite se réduit au centre même du triangle donné, centre qui coïncide avec les centres de tous les triangles inscrits et avec le centre de position.

On trouve des détails dans le Traité indiqué ci-dessus que j'ai l'honneur de mettre à la disposition des lecteurs qui m'en feront la demande. A. TAFELMACHER (Santiago de Chile).

2771. (**1904**, 113)(N. QUINT). — (**1904**, 229). — Consulter : KORSELT, *Ueber das Problem der Winkelhalbierenden,* dans *Z. S.,* Bd. XLII, 1897, et *Z. H.,* Bd. XXVIII, 1897.

J. DELITALA, *Construire un triangle connaissant une bissectrice de chacun des trois angles,* dans *M.,* 3e série, t. II, 1902.

T. HAYASHI, le même sujet, dans *Tokyo Butsuri Gakkō Zasshi,* n° 92, 1898 (en japonais). T. HAYASHI (Tokio).

2775. (**1904**, 114) (PAULMIER). — *Équation indéterminée.* — *Remarques.* — Observons que l'équation étant

$$x^{n-1}-1=2xy+2^{n-1}y^{n+1},$$

x doit être impair.

On en tire encore

$$y^2 = \frac{x(x^{n-2} - 2y) - 1}{2^{n-1} y^{n-1}},$$

et l'on en conclut que n doit aussi être impair.

On devra donc traiter exclusivement les équations

$$2xy + 1 = x^2 - 4y^4, \qquad x^4 - 16y^6, \qquad x^6 - 64y^8, \qquad \ldots,$$

pour lesquelles il n'existe pas de formules de résolution, passé le quatrième degré.

On voit, en outre, que, dans les mêmes hypothèses,

$$x(x^{n-2} - 2y) - 1$$

doit être un carré.

H. Brocard.

Peut-on attribuer à x, y et n des valeurs positives entières vérifiant l'équation

$$(x^{n-1} - 2^{n-1} y^{n+1})^2 = (2xy + 1)^2 ?$$

En supposant $n = 1$, il vient

$$(1 - y^2)^2 = (2xy + 1)^2;$$

en extrayant la racine carrée, on a

$$1 - y^2 = 2xy + 1 \qquad \text{ou} \qquad -y^2 = 2xy,$$
$$2xy + y^2 = 0, \qquad y(y + 2x) = 0,$$

d'où $y = 0$, et x arbitraire.

N. Plakhowo.

2793. (**1904**, 138) (V. Aubry). — *Sur les quantités complexes et leur représentation.* — Les questions qu'agite l'énoncé 2793 sont encore trop obscures et trop controversables pour que toute réponse qui y sera faite ne contienne pas une part très large d'appréciation personnelle. Cela devait être dit dès en commençant.

Maintenant, comme exemple d'un problème concernant des quantités réelles (A) et dont la solution, lorsqu'elle est imaginaire de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, donne, suivant la représentation géométrique ordinaire des quantités complexes (B), la solution d'un problème plus général, on peut citer la recherche des points doubles d'une involution de base rectiligne, définie par deux couples quelconques.

Ces points doubles cessent d'être réels quand les deux couples ont une partie commune, et l'on construit alors à leur lieu et place les points orthoptiques de l'involution envisagée; mais ces points, dont l'existence des uns exclut celle des autres, possèdent cependant une commune propriété qui peut leur servir de définition générale; elle résulte de l'énoncé suivant :

Étant donnés deux couples de points en ligne droite, AB *et* CD, *trouver deux points* X *et* Y *tels que l'on ait simultanément*

$$\frac{XA}{XB} : \frac{YA}{YB} = -1,$$

et

$$\frac{XC}{XD} : \frac{YC}{YD} = -1.$$

Cet énoncé s'applique, en effet, à l'un et l'autre cas.

Si je ne me trompe, personne aujourd'hui ne conteste que la dépendance établie entre les points d'un plan et les quantités complexes (B) ne soit davantage qu'un rapprochement heureux et que l'élément géométrique ne constitue une représentation concrète véritablement adéquate de l'élément analytique. On s'est seulement, depuis quelques années, appliqué à éliminer la figuration géométrique des démonstrations aboutissant finalement à un résultat analytique, alors que précédemment on n'hésitait pas à l'employer couramment comme un intermédiaire instructif et commode.

Mais le même consentement unanime est loin d'exister en ce qui concerne la connexion des points de l'espace avec certaines entités analytiques; et, si la connaissance de la théorie des quaternions s'est grandement répandue, elle ne semble pas encore près de s'imposer. Plusieurs, en effet, la jugent extrêmement ingénieuse, mais purement artificielle; tandis que dans le plan, l'assimilation au vecteur dirigé a fait en quelque sorte dans le domaine sensoriel la quantité imaginaire (et inexpliquée) $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; tout au contraire, le quaternion a été forgé de toutes pièces pour représenter, en bloc, dans des calculs opérés selon des règles spéciales, un vecteur dirigé de l'espace.

Il faut toutefois remarquer que, si l'on n'a jamais directement rencontré comme résultat d'un calcul ni un quaternion, ni une quantité plus complexe que l'imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, c'est que celle-ci, jusqu'à

présent, suffit à tout. On attribue à d'Alembert cette proposition : *Toute fonction de quantité imaginaire de la forme* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ *est une imaginaire de la même forme.* Pas plus que l'attribution, l'énonciation elle-même ne doit pas être faite de façon trop absolue (il suffit de réfléchir qu'elle implique au préalable une définition précise et complète de la fonction); mais, pour autant que toute question revient à la détermination d'une inconnue, on ne s'est jamais trouvé en présence d'une inconnue qui n'existât pas au moins imaginairement. Il est donc indispensable de présupposer un quaternion ou une quantité plus complexe que l'imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ pour l'obtenir au bout d'un calcul.

Il faut bien encore remarquer ceci : les quantités réelles ou linéaires (suivant un vocable préférable), c'est-à-dire celles que figurent les longueurs portées sur un axe dans un sens ou dans l'autre, conservent leur caractère propre et restreint vis-à-vis des quantités complexes, ou planes, $a + bi$: le second domaine contient bien le premier, mais l'axe, envisagé dans le plan ou hors du plan, ne jouit pas exactement des mêmes propriétés. Par exemple, les quantités réelles négatives, considérées comme un cas particulier des quantités imaginaires, admettent deux racines carrées; considérées en elles-mêmes, elles n'en admettent point. Cette distinction peut paraître factice et vétilleuse dans l'usage courant; mais elle a pourtant sa raison d'être, si, comme il est extrêmement probable, la véritable imaginaire de l'espace réunit en elle la double nature des quantités planes et des quantités linéaires, et accuse par suite, en définitive, le même caractère restreint que celles-ci. Le premier hyperespace est vraisemblablement biplanaire et il généraliserait l'espace ordinaire comme le plan contient l'axe; mais il échappe à toute acception sensorielle, et l'assimilation que l'on peut tenter d'en faire à l'espace ordinaire *réglé* ne va pas au delà de quelques analogies, sans autre portée.

La caractéristique de la méthode des quaternions est dans l'identification (on pourrait dire la *confusion*) qu'elle fait de la notion géométrique de longueur et de la notion analytique de module. Cette identification est une convention très naturelle et très admissible; mais il n'est pas certain que ce soit la convention la plus *convenable,* et assurément il n'est pas obligatoire d'admettre que l'*espace analytique* soit isotrope. En d'autres termes, l'analogie géométrique évidente de la sphère de l'espace avec le cercle du plan

n'emporte pas que la surface équimodulaire pour l'imaginaire spatiale soit la sphère, parce que le cercle est la courbe équimodulaire dans le plan. Il est possible que ce soit dans la surface de révolution du troisième ordre ayant pour équation cartésienne

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \text{const.}$$

que l'on rencontre, à ce point de vue, les analogies les plus substantielles.

Quoi qu'il en soit, on peut considérer comme extrêmement probable que la quantité complexe la plus générale est un assemblage de quantités qui, individuellement et intrinsèquement, n'offrent pas d'autres propriétés que les quantités linéaires (A) ou planes (B), mais hétérogènes et incombinables entre elles par tout procédé supposant multiplication, les produits étant identiquement nuls. A l'égard de cette quantité complexe générale, on est donc en présence de deux modes de calculs : l'un, rentrant entièrement dans les règles ordinaires, mais qui par cela même n'apprend rien ; l'autre, dont on peut tirer d'utiles conséquences, mais qui déroge à ces règles et exige des raisonnements où l'esprit court, à chaque instant, risque de se dérouter. C'est ainsi, par exemple, que la condition continuellement invoquée dans l'analyse des quantités réelles ou imaginaires : *Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que le module de l'un de ces facteurs soit nul,* cesse pour les quantités plus complexes d'être aucunement nécessaire et n'est pas non plus suffisante.

Quilibet.

2811 et 2812. (**1904**, 188 et 189) (Issaly). — *Sur les pseudo- ou hypercourbes.* — 1° Rappelons d'abord la formule de Bernoulli

$$(1)\quad y = \int \varphi(x)dx = C + x\varphi(x) - \frac{x^2}{1.2}\varphi'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}\varphi''(x) - \ldots.$$

Par un changement convenable d'axes on pourra, avant tout, annuler la constante C. Cette simplification une fois faite, soit $x = a$ l'abscisse de l'un quelconque des points *géométriques* de la pseudocourbe proposée : $dy = \varphi(x)dx$. En désignant par b l'ordonnée correspondante, on aura

$$(2)\qquad b = a\varphi(a) - \frac{a^2}{1.2}\varphi'(a) + \frac{a^3}{1.2.3}\varphi''(a) - \ldots;$$

d'où l'on voit que, généralement, les points de notre lieu ne sont pas *analytiques*, dans le sens naturel que nous avons attaché à ce mot.

2° Lorsque, en particulier, a est racine de l'équation $\varphi'(x) = 0$, il vient

$$\varphi'(a) = 0$$

et, par suite, le second terme de l'expression précédente de b disparaît.

Quant à savoir s'il y a alors inflexion ou non, la substitution de

$$x = a \pm h$$

dans la formule (1) permettra toujours (entre autres procédés) de le vérifier.

ISSALY.

2815. (**1904**, 211) (C. POPOVICI). — Question traitée par TERQUEM : *Considérations sur le triangle rectiligne d'après* EULER (*N. A.*, t. I, 1842, p. 79, etc.; *voir* les *Mém. de Pétersb.*, t. XI, 1765).

En voici le résumé, en modifiant un peu les notations, et sous réserve de certaines corrections typographiques non vérifiées. Les données sont :

O centre du cercle circonscrit;
H orthocentre;
I centre du cercle inscrit.

Ajoutons-y le barycentre G, situé sur OH à la distance $OG = \frac{1}{3} OH$.

Soient $GI = e$, $OI = f$, $OG = g$; a, b, c les côtés; r, R les rayons des cercles inscrit et circonscrit, enfin

$$a + b + c = p, \qquad ab + ac + bc = q, \qquad abc = t.$$

On a (*loc. cit.*, p. 84) les relations

$$6e^2 + 3g^2 - 2f^2 = (R - 2r)^2 = \frac{f^4}{R^2},$$

d'où

$$R^2 = \frac{f^4}{6e^2 + 3g^2 - 2f^2};$$

$$3(f^2 - g^2 - 2e^2) = r(R - 2r) = \frac{rf^2}{R} = \frac{rRf^2}{R^2},$$

d'où

$$2Rr = \frac{3R^2(f^2 - g^2 - 2e^2)}{f^2} = \frac{3f^2(f^2 - g^2 - 2e^2)}{6e^2 + 3g^2 - 2f^2};$$

et

$$r^2 = \frac{9}{4}\frac{(f^2-g^2-2e^2)^2}{6e^2+3g^2-2f^2},$$

$$p^2 = \frac{f^4}{6e^2+3g^2-2f^2} - 12f^2 - 15g^2 + 6e^2.$$

Or,

$$t = 2Rrp,$$

et

$$q = r^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{2t}{p}.$$

Donc p, q, t sont connus, et a, b, c sont les racines de l'équation

$$x^3 - px^2 + qx - t = 0.$$

Note. — Pour la solution de la présente question et aussi de plusieurs variantes, *voir :*

E. Catalan. — Quelques formules relatives aux triangles rectilignes (*M. A. B.*, t. XLIV, 1890, 26 pages).

C. Thiry. — Distances des points remarquables du triangle (*B. A. B.*, 3e série, t. XXI, 1891, p. 471-481).

Euler s'est proposé aussi de construire un triangle, connaissant les points I, G, H. *Voir* E. Lemoine, *A. N.*, 1870, p. 311-316.

H. Brocard.

Sait-on résoudre un triangle dont on connaît l'orthocentre, le barycentre et le centre du cercle inscrit?

De la connaissance de l'orthocentre H et du barycentre G on déduit celle du centre O du cercle circonscrit et du centre Ω du cercle de Feuerbach. Ce dernier cercle étant tangent au cercle inscrit, la distance des centres $\overline{\Omega I}$ donne la valeur de la différence $\frac{R}{2} - r$: par le théorème d'Euler, on a d'autre part

$$2R = \frac{\overline{OI}^2}{\Omega I};$$

ainsi l'on peut tracer les cercles inscrit et circonscrit. Les côtés du triangle cherché sont trois des tangentes communes au cercle inscrit et à la conique ayant pour foyers les points O et H et pour grand axe (ou axe transverse) le rayon R. Or la quatrième tangente commune, qui se présente à part, peut bien être construite linéairement; mais le groupe des trois autres tangentes, qui ont une rela-

tion entièrement symétrique aux éléments donnés, dépend par cela même d'une équation cubique que l'on doit considérer comme irréductible. Le problème n'est pas susceptible, sous son acception la plus générale, d'une solution par le moyen de la règle et du compas.

E.-A. Majol.

Autres réponses de MM. FARJON, P. BARBARIN et WEINMEISTER que nous publierons ultérieurement si la place le permet. LA RÉDACTION.

2827. (**1904**, 239) (E.-N. BARISIEN). — *Lieu des centres des cercles tangents à une conique donnée et qui passent par un point fixe.* — La plus simple façon de traiter la question paraît être de rapporter la conique à ses axes et de définir le cercle variable comme ayant son centre (α, β) sur la normale au point (x, y) de la conique.

Les équations du problème seront donc

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = l^2 + m^2 - 2l\alpha - 2m\beta,$$

$$(3) \qquad a^2\alpha y - b^2\beta x = c^2xy.$$

Il resterait à éliminer x et y entre ces trois équations du second degré, ou, après substitution de $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, x entre deux équations du quatrième degré.

Lieu des centres des cercles tangents à une conique donnée et à une droite fixe. — Les équations (1) et (3) restant les mêmes, l'équation (2) sera remplacée par

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (A\alpha + B\beta + C)^2.$$

La difficulté subsiste pour l'élimination de x et de y.

Note. — Les cas particuliers de ces deux problèmes ont été depuis longtemps donnés comme exercices mathématiques. C'est ainsi, entre autres, que le lieu des centres des cercles tangents à une parabole et passant par le foyer a été proposé au Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1865 (*N. A.*, 1865, p. 425; solutions, 1866, p. 21-27, P. MOESSARD; et p. 27-31, BARBIER et Ed. LUCAS).

Cette courbe a d'ailleurs été étudiée plus anciennement (*N. A.*, 1862, quest. 636; solutions, 1863, p. 97-100, NOBLOT et QUANTIN; p. 100-104, TRACE et PITET; *N. A.*, 1842, quest. 44; solutions, 1844,

p. 365-370, H. FAURE, et par le marquis DE L'HOPITAL). C'est une spirale sinusoïde, catacaustique d'une parabole pour des rayons perpendiculaires à l'axe (*N. A.*, 1876, p. 99).

On obtient aisément son équation en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{p}{2 \sin^3\left(30 + \frac{\omega}{3}\right)}$$

(*N. A.*, 1844, *loc. cit.*).

La même courbe, supposée roulant sur une droite fixe, a donné le sujet d'une question du Concours académique de Grenoble en 1878. Voir *N. C.*, 1878, quest. 408; *P. M. S.*, 1891, quest. 26; LAISANT, *Problèmes*, t. IV, quest. 1161. H. BROCARD.

Il s'agit, dans les deux cas, de courbes du sixième ordre. En effet, si, dans la première hypothèse, on cherche le nombre des points du lieu situés sur une droite menée arbitrairement par le point fixe, on voit que ce nombre est le même que celui des coniques menées par quatre points donnés tangentiellement à une conique donnée, c'est-à-dire *six* (les points donnés sont ici les points cycliques et deux points coïncidant avec le point fixe de l'énoncé suivant une direction perpendiculaire à la droite considérée).

Il en est de même, dans la seconde hypothèse, si l'on cherche le nombre des points du lieu situés sur une perpendiculaire quelconque à la droite donnée.

L'analyse conduit immédiatement à la même conclusion que le raisonnement géométrique, au moins pour le premier des énoncés compris sous le n° 2827. Effectivement la condition de contact de deux coniques S et S' est

$$4\Theta^3\Delta' + 4\Theta'^3\Delta - 18\Delta\Delta'\Theta\Theta' - \Theta^2\Theta'^2 + 27\Delta^2\Delta'^2 = 0,$$

Δ, Θ, Θ', Δ' étant les invariants du système. Or, si l'on fait

$$S' = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y,$$

Δ' et Θ' sont des fonctions quadratiques, Θ une fonction linéaire de α, β, et il est clair que la condition de contact monte au sixième degré relativement à ces paramètres.

Pour le second énoncé on a des calculs plus compliqués; aussi m'en tiendrai-je à l'indication donnée plus haut. E. MALO.

TABLE DES QUESTIONS ET RÉPONSES.

Chacune des questions publiées dans le Tome XI porte le numéro d'ordre, avec lequel elle a été publiée. Les autres nombres de la Table indiquent les pages du Volume.

Nous avons cru utile de continuer à signaler les Réponses ou Notes en portefeuille (indiquées dans les Tables antérieures par la lettre R). L'indication des solutions reçues est toujours mentionnée au fur et à mesure dans les *Avis divers* annexés aux numéros mensuels de l'*Intermédiaire* [troisième page de la couverture [1]].

Questions posées. Tome I (1894).	Pages.	Réponses. Tome XI. Pages.
59.	23	73.
266.	148	74.
367.	226	74.

Tome II (1895).	Pages.	Tome XI. Pages.
517.	131	287.
524.	134	95.
546.	150	95.
561.	164	287.
563.	164	74, 215.
564.	164	11.
582.	181	191.
591.	202	75, 287.
594.	202	75.
595.	203	11.
605.	205	192.
641.	314	12.
652.	317	287.
680.	387	14.
687.	401	193.

Tome III (1896).	Pages.	Tome XI. Pages.
801.	80	215.
826.	102	75.
870.	174	14.
904.	200	76.
949.	273	76.

[1] La Rédaction tient à jour une Table générale manuscrite qui a servi pour la préparation de la Table des questions et réponses.

Questions posées. Tome IV (1897).	Pages.	Réponses. Tome XI. Pages.
954.	2	14.
955.	2	16.
1011.	50	16.
1030.	75	77.
1031.	75	78.
1050.	98	17.
1117.	173	79, 143.
1173.	265	79.

Tome V (1898).	Pages.	Tome XI. Pages.
1194.	3	79.
1296.	125	143.
1337.	194	144.
1401.	266	17.

Tome VI (1899).	Pages.	Tome XI. Pages.
1459.	32	18.
1470.	52	18.
1514.	149	18.
1547.	149	144.
1613.	197	80.
1632.	219	18.
1641.	221	215.
1658.	243	145.
1677.	265	19.

Tome VII (1900).	Pages.	Tome XI. Pages.
1716.	5	241.
1775.	81	80.
1822.	125	241.
1882.	196	288.
1890.	237	96.
1892.	238	24.
1947.	333	96.
1988.	405	216.

Tome VIII (1901).	Pages.	Tome XI. Pages.
2024.	37	24.
2027.	37	80.
2029.	38	25.
2114.	158	80, 148.
2127.	186	216.
2128.	186	216.
2153.	191	241.
2179.	224	31, 96, 289.
2181.	249	149.
2182.	249	97.
2183.	249	97.
2205.	254	217.
2222.	276	43, 98.
2228.	278	44.
2243.	309	98, 194, 289.

Tome IX (1902).	Pages.	Tome XI. Pages.
2251.	1	31, 81, 99, 149.
2253.	2	81.
2256.	3	100.
2266.	6	81.
2274.	8	31, 81, 99, 149.
2282.	34	45.
2301.	67	46.
2306.	89	289.

Questions posées. Tome IX (1902). Pages.		Réponses. Tome XI. Pages.
2315.	91	32.
2338.	114	242.
2347.	117	219.
2348.	117	32, 100.
2370.	145	290.
2372.	145	150, 290.
2373.	146	151.
2381.	172	19, 49.
2391.	176	49, 152.
2394.	203	82.
2404.	205	194.
2411.	226	83.
2414.	227	290.
2415.	227	290.
2418.	228	195.
2427.	258	50.
2428.	258	50.
2439.	260	195.
2454.	266	50.
2464.	292	83.
2483.	316	50, 195.
2484.	316	195.
2485.	317	50, 195.

Tome X (1903). Pages.		Tome XI. Pages.
2507.	11	100.
2512.	34	152.
2521.	37	50, 153.
2525.	40	196.
2535.	65	101.
2542.	68	51.
2546.	69	51.
2551.	71	84.
2552.	71	51, 153.
2554.	72	101.
2555.	72	52, 291.
2558.	97	53, 101.
2559.	97	154.
2563.	99	196.
2570.	102	54.
2571.	102	156, 242.
2576.	122	158.
2577.	124	167.
2579.	126	84.
2582.	128	54, 85.
2584.	147	199.
2591.	148	291.
2595.	149	219.
2602.	152	101, 220.
2615.	177	291.
2618.	178	199.
2621.	179	80, 85, 171.
2624.	181	86.
2632.	204	220.
2644.	227	54.
2646.	227	102.
2647.	228	54.
2652.	251	56, 171.
2654.	251	56.
2655.	251	57.
2659.	254	58, 171.
2660.	254	58.
2662.	255	60.
2663.	255	62, 119, 291.
2664.	256	63.
2665.	256	120, 200.
2666.	257	120, 200.
2667.	257	103.
2671.	273	64.
2674.	274	120, 292.
2675.	274	88.
2679.	276	121.
2682.	277	243.
2683.	277	292
2685.	279	220.
2687.	280	88.
2688.	280	88.
2689.	298	121, 221.
2690.	299	171.
2691.	299	244.
2692.	300	124, 201.
2694.	300	104.
2695.	300	174, 292.
2697.	302	104.
2698.	303	104.

Questions posées. Tome XI (1904).	Pages.	Réponses. Tome XI. Pages.
2791.	137	
2892.	138	
2793.	138	297.
2794.	139	254.
2795.	141	255.
2796.	142	256.
2797.	142	
2798.	162	
2799.	162	
2800.	162	272.
2801.	163	272.
2802.	163	
2803.	164	
2804.	164	
2805.	164	
2806.	165	
2807.	165	
2808.	166	
2809.	188	
2810.	188	
2811.	188	300.
2812.	189	300.
2813.	189	
2814.	211	
2815.	211	301.
2816.	212	
2817.	212	
2818.	213	R.
2819.	213	274.
2820.	213	274.
2821.	214	
2822.	214	
2823.	237	
2824.	237	
2825.	238	
2826.	238	
2827.	239	303.
2828.	239	277.
2829.	239	278.
2830.	239	280.
2831.	257	R.
2832.	257	R.
2833.	257	
2834.	258	
2835.	258	
2836.	258	
2837.	259	
2838.	259	
2839.	259	
2840.	260	R.
2841.	260	
2842.	260	
2843.	261	R.
2844.	261	
2845.	262	
2846.	262	
2847.	262	
2848.	282	
2849.	282	
2850.	283	
2851.	283	
2852.	283	
2853.	283	
2854.	285	
2855.	285	

Note. — Dans ce Tableau nous n'avons indiqué, lorsqu'il y a plusieurs réponses à une même question qui se suivent immédiatement, que la page où se trouve la première de ces réponses consécutives.

Rappel de questions non résolues antérieurement et reproduites au Tome XI (1904) ou rectifications.

Questions posées. Tome II (1895).	Pages.	Réimpression. Tome XI. Pages.
606.	205	161.
610.	206	161.
612.	281	185.
613.	281	185.
618.	283	186.
621.	284	186.
622.	284	187.
627.	285	187.
628.	285	187.
629.	286	187.
630.	286	209.
637.	314	209.
642.	315	209.
650.	316	209.
652.	316	210.
658.	317	210.
666.	318	210.
668.	319	210.
669.	319	210.
670.	320	233.
671.	320	233.
673.	385	234.
675.	386	234.
677.	386	235.
691.	417	235.
692.	417	236.
693.	418	281.
694.	418	282.
695.	418	282.

Tome X (1903).	Pages.	Tome XI. Pages.
2505.	7	1.

A l'exemple déjà suivi dans plusieurs journaux mathématiques, la Rédaction continue à reproduire les énoncés de questions demeurées sans réponse depuis la fondation de l'*Intermédiaire*.

TABLE DES QUESTIONS

CLASSÉES SUIVANT LES DIVISIONS DE L'INDEX DU RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La Table qui suit fait connaître le sujet général des différentes questions proposées.

Les nombres de cette Table sont les *numéros* des questions auxquelles se rapporte la division de l'Index du Répertoire susmentionné.

A1	2784, 2843,
A3	2740, 2807, 2840.
B1	2721.
B12	2788, 2793.
C1	2806, 2814.
C2	2704, 2850.
D1	2764.
D2	2716, 2729, 2732, 2739, 2853.
D4	2854.
D6	2712.
E1	2714.
E5	2817.
H1	2785.
H3	2792, 2839.
H8	2805.
H9	2728, 2752.
H12	2799.
I1	2780, 2834.
I2	2722, 2723, 2738, 2779, 2790.
I4	2744, 2745.
I9	2713, 2774.
I10	2720.
I17	2801.
I18	2724, 2725, 2746, 2803.
I19	2701, 2741, 2747, 2748, 2775, 2844, 2846.
I20	2829.
I25	2730, 2802, 2804, 2813, 2837.
J2	2762.
K1	2737, 2742, 2772, 2818.
K2	2705.
K4	2787.
K5	2768.
K8	2819, 2820.
K10	2776.
K11	2719, 2783, 2786.
K18	2832.
K20	2733, 2815.
K21	2761.
$L^1$5	2765.
$L^1$15	2827, 2828.
$L^1$16	2702, 2759, 2777, 2782, 2835, 2836.
$L^2$7	2833.
$L^2$21	2831.
$M^1$1	2821.
$M^1$5	2706, 2707, 2708, 2709, 2753, 2754, 2755, 2757, 2766, 2810.
$M^1$6	2710.
$M^2$2	2826.
$M^2$6	2763.
M^4	2798.

La lettre Σ désigne les sujets d'étude de recherches ou d'études pour lesquels une subdivision spéciale a été adoptée dans l'*Intermédiaire* (*voir* t. II, 1895, p. 177).

TABLE PAR NOMS D'AUTEURS.

Les noms inscrits sont exclusivement ceux des auteurs de questions ou de réponses.

L'*italique* désigne les pseudonymes.

Les chiffres ordinaires indiquent les numéros des pages. Les numéros sans astérisque se rapportent aux QUESTIONS POSÉES; avec astérisque, ils désignent le rappel des questions au moment de la publication des réponses; en **caractères gras**, ils indiquent les **réponses** annoncées dans le texte ou publiées; en caractères romains les pages du Supplément.

M. Brocard, à notre grand regret, a renoncé cette année à rédiger les Tables des matières et, à partir du 1er janvier 1905, à collaborer à la correction des épreuves du journal. Nous lui adressons ici une dernière fois nos remerciments.

Les Tables ont été rédigées cette année par M. E. Maillet et vérifiées par M. Brocard.

LA RÉDACTION.

ERRATA.

TOME III (1896).

Page 276, ligne 18, *au lieu de :* 34251, *lire :* 34231.

TOME IV (1897).

Page 160, ligne 12 en remontant, *au lieu de :*

$$\frac{126.127}{2}+1, \quad \textit{lire :} \quad \frac{126.127}{2}-1.$$

» 292, vis-à-vis de 1011, *au lieu de :* R, *lire :* 235.

TOME VI (1899).

Page 240, ligne 16 en remontant, *au lieu de :*

$$z(z+1), \quad \textit{lire :} \quad 4z(z+1).$$

TOME VII (1900).

Page 53, ligne 18, *au lieu de :* M. M., *lire :* Mathematical Magazine.

TOME IX (1902).

Page 345, première colonne du Tome IX, ligne 4, vis-à-vis de 153, *au lieu de :* 507, *lire :* 207.

TOME X (1903).

Page 183, ligne 16, *lire :* $10^{11}-1=2071723\times5363222357.9$.
» 189, ligne 4, *au lieu de :* 2, *lire :* x.
» 222, question 2558, ligne 2, avant : Voici, etc. *lire :* (**1903**, 198).
» 256, question 2665, ligne 8, *rayer :* un nombre premier ou.
» 257, ligne 7, *rayer :* 1° quand n est premier; 2°.

Page 266, ligne 1 en remontant, *au lieu de :* $\alpha + 1$, *lire :* $2\alpha + 1$.
» » ligne 2 en remontant, *au lieu de :* $-A$, *lire :* -1.
» 274, question 2674, lignes 2 et 3, *au lieu* de la virgule, *lire :* ....
» 275, ligne 4 en remontant, *au lieu de :* (2) et (4), *lire :* (3) et (4).
» 285, ligne 5, *au lieu de :* la même puissance, *lire :* une puissance paire.
» » ligne 8, entre 9 et 19, *ajouter :* 17; *supprimer :* 31.
» » ligne 2 en remontant, *au lieu de :* $y = 2 - 1$, *lire :* $y = z - 1$.
» 288, ligne 3 en remontant, *au lieu de :* m, *lire :* $2n$.
» 289, ligne 7, *au lieu de :* m, *lire :* $2n$.
» 290, ligne 2, *au lieu de :* $\nu_2 2n(2q+1)$, *lire :* $\nu_{2^{2n}(2q+1)}$.
» 311, ligne 6, *au lieu de :* $<$, *lire :* $>$.
» 341, après Werebrusow, *au lieu de :* 30, *lire :* 34.
» 342, ligne 11, *au lieu de :* Page 192, ligne 16 en remontant, *lire :* Page 240, ligne 16 en remontant.
» 343, Tome X, deuxième ligne, *au lieu de :* (**1902**, 249), *lire :* (**1902**, 229).

TOME XI (1904).

Page 3, ligne 15, *avant :* $B_1 B_2 B_3$, *lire :* ± 1; les lignes 16 et 17 sont *à remplacer par :* en prenant toujours

$$A_2 A_3 = A_2 B_1 + A_3 B_1;$$
$$A_3 A_1 = A_3 B_2 + A_1 B_2;$$
$$A_1 A_2 = A_1 B_3 + A_2 B_3.$$

» » ligne 3 en remontant, *ajouter :* en prenant toujours les angles

$$A_1 = \alpha'_1 + \alpha''_1, \qquad A_2 = \alpha'_2 + \alpha''_2, \qquad A_3 = \alpha'_3 + \alpha''_3.$$

» 63, ligne 10, *au lieu de :* Periodical, *lire :* recueil.
» 74, (question 266), *au lieu de :* J.-N. Cole, *lire :* F.-N. Cole.
» 99, ligne 2 en remontant, *au lieu de :*

$$(2a+1)^{2\alpha+1}, \qquad \textit{lire :} \qquad (2a+1)^{2a+1}.$$

» 103, ligne 6, *au lieu de :* Hinklet, *lire :* Hinkley.
» 107, ligne 12, *au lieu de :* M. Idsig, *lire :* M. Thiry.
» 145, ligne 5 en remontant, *au lieu de :* 245, *lire :* 243.
» 152, ligne 10, *au lieu de :* $\sqrt[3]{4}$, *lire :* $\sqrt[3]{2}$.
» 162, énoncé 2798, *au lieu de :* Cela posé, si l'un des points, *lire :* Cela posé, si le lieu des points.
» 167, ligne 5, *au lieu de :* $x + 1 = a^2$, *lire :* $x + y = a^2$.
» 195, dernière ligne, *effacer :* Si.
» 183, question 2747, troisième ligne en remontant, *au lieu de :* $2A^3$, *lire :* 2 et 3.
» 184, lignes 12 et 23, *au lieu de :* s, *lire :* 3.

Page 184, ligne 4 en remontant, *au lieu de :* A^3, *lire :* A^2.
» 244, ligne 6 en remontant, *au lieu de :* 1,461280, *lire :* 1,1461280.
» » ligne 4 en remontant, *au lieu de :* 214, *lire :* 219.
» 287, ligne 5 en remontant, *au lieu de :* 658, 317 et W.-W. Beman, *lire :* 652, 316 et *Humilis*.

Nous remercions ici ceux de nos correspondants qui ont bien voulu nous signaler des *errata*. LA RÉDACTION.

FIN DU TOME ONZIÈME.

24439 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL (12 NUMÉROS) :

Paris.................... 7 fr. | Dép. et Union postale... 8 fr. 50

Les douze numéros forment chaque année un Volume de 300 pages au moins.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET É. LEMOINE,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Examinateur à l'École Polytechnique,

Émile LEMOINE,
Ingénieur civil,
Ancien Élève de l'École Polytechnique,

Ed. MAILLET,
Docteur ès Sciences,
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

A. GRÉVY,
Docteur ès Sciences,
Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Professeur au Lycée Saint-Louis.

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique.

TOME XII. — 1905.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
55, Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

QUESTIONS (¹).

2856. **[O4hβ]** On sait définir le conoïde de Plücker comme lieu de droites ou d'ellipses. Comment le définir comme lieu de points?

MANNHEIM.

2857. **[P3]** A qui doit-on la transformation par inversion?

MANNHEIM.

2858. **[V1a]** Quel est le géomètre qui, le premier, a fait usage de la *notation abrégée* en Géométrie analytique?

MANNHEIM.

2859. **[I3b]** Soient p un nombre premier, a et b (où b n'est pas un carré parfait) deux entiers non divisibles par p. Quand aura lieu la congruence

$$(a+\sqrt{b})^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}?$$

NAZAREVSKY (Kharkov).

(¹) Pour gagner de la place nous supprimons cette année, comme nous l'avons déjà fait en 1896 et en 1903, la Liste des abréviations conventionnelles. Nos collaborateurs pourront la consulter dans les Tomes précédents ou dans l'*Index du Répertoire de bibliographie des Sciences mathématiques*. Ils pourront également se reporter aux observations indiquées en tête du Tome XI (1904), observations que nous ne reproduisons pas ici.

2860. **[L¹17d]** Connaît-on la solution de la question suivante très générale, qui est résolue dans quelques cas particuliers :

Dans quelles conditions doivent être placées deux ellipses pour que l'on puisse inscrire à l'une et circonscrire à l'autre une infinité de polygones de n côtés?

E.-N. Barisien.

2861. **[L¹1cα]** Existe-t-il pour les courbes planes de classe quelconque des théorèmes analogues à celui de Brianchon pour les coniques? T. Lemoyne.

2862. **[L¹14a]** On demande une démonstration purement géométrique de la propriété suivante :

Quand un triangle se déplace en restant inscrit à une conique et circonscrit à une parabole, son centre de gravité décrit une ligne droite. T. Lemoyne.

2863. [Σ] (**1903**, 7, 99; **1904**, 1, 113, 260).

PRIX ACADÉMIQUES.

Académie des Sciences de Paris.

Grand prix des Sciences mathématiques, pour 1906 (3000fr). — Perfectionner, en quelque point important, l'étude de la convergence des fractions continues algébriques (même sujet que précédemment).

Envoyer les Mémoires au Secrétariat avant le 1er janvier 1906.

Prix Bordin, pour 1907 (3000fr). — Reconnaître d'une manière générale si les coordonnées des points d'une surface algébrique peuvent s'exprimer en fonctions abéliennes de deux paramètres, de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde plus d'un système de valeurs des paramètres (aux périodes près).

Étudier en particulier le cas où l'équation de la surface serait de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

f étant un polynome, et donner des exemples explicites de telles surfaces ([1]).

Envoyer les Mémoires au Secrétariat avant le 1er janvier 1907.

Prix Vaillant, pour 1907 (4000fr). — Perfectionner en un point important le problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, c'est-à-dire le problème de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$$

avec les conditions que la fonction u et sa dérivée suivant la normale au contour de la plaque soient nulles. Examiner plus spécialement le cas d'un contour rectangulaire ([2]).

Envoyer les Mémoires au Secrétariat avant le 1er janvier 1907.

Prix Fourneyron, pour 1905, 1er juin (1000fr). — Étude théorique ou expérimentale des turbines à vapeur.

Prix Pierre Guzman, 1er juin 1905. — Progrès important en Astronomie.

Prix Damoiseau, 1er juin 1905 (2000fr). — Comètes (voir *I. M.*, **1903**, 7).

Prix Boileau, pour 1906 (1300fr). — Recherches sur les mouvements des fluides de nature à contribuer au progrès de l'Hydraulique.

([1]) Il pourra être utile de consulter la *Théorie des fonctions algébriques* de MM. E. Picard et G. Simart.

([2]) Il pourra être utile de consulter certains Mémoires de M. Hadamard et la réponse à 2728 (**1905**, 22).

Depuis 1902, l'Académie a supprimé la formalité qui rendait obligatoire l'anonymat pour certains concours, avec dépôt d'un pli cacheté contenant le nom de l'auteur. Cette formalité est devenue facultative.

Il y a quelques autres prix intéressant les Mathématiciens, mais comportant un programme moins précis (voir *C. R.*, t. CXXXIX, 19 décembre 1904).

A propos du *prix Gay* (*C. R.*, t. CXXXIX, p. 1079) signalons un important sujet d'étude indiqué par M. Hatt relatif à la détermination du niveau moyen de l'Océan, à Brest en particulier. Les éléments de cette étude se trouveraient dans les documents rassemblés depuis de longues années par l'Hydrographie française.

ACADÉMIE DES SCIENCES, INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES DE TOULOUSE (500fr).

Prix de Physique, pour 1906. — Étude thermique d'un gaz liquéfié; son application à la théorie des machines. (Envoyer les manuscrits avec devise, sans nom d'auteur, au Secrétariat de l'Académie, allée des Zéphirs, 10, ou à M. Roschach, Secrétaire perpétuel, rue des Récollets, 103; pour plus de détails voir *Mém. Acad. Sc. Toulouse,* 1904, p. 368-370.) E. MAILLET.

2864. [Σ] M. Borel, dans ses *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, Gauthier-Villars, 1900), a énoncé comme probable le résultat suivant :

Soit $F(z)$ une fonction entière à croissance régulière d'ordre p entier; soient $\varphi(z)$ et $\varphi_1(z)$ des fonctions entières d'ordre apparent inférieur à p; si l'on considère les zéros a_n de la fonction

$$\varphi(z) F(z) + \varphi_1(z)$$

l'ordre d'infinitude de $r_n = |a_n|$ est déterminé (autrement dit la distribution des zéros est régulière) sauf au plus pour une valeur particulière du rapport $\frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)}$.

Il ajoute :

« Si l'énoncé n'est pas exact sous cette forme, il n'est certainement pas besoin de le modifier beaucoup. »

Peut-on établir ce résultat ou un résultat analogue, ou donner des exemples en montrant l'inexactitude?

Remarque. — Je connais des catégories étendues de fonctions entières d'ordre p entier à croissance régulière et dont la distribution des zéros est irrégulière.

Exemple. — 1° $F = \Phi e^P$, où Φ est un produit canonique quelconque d'ordre p pair ayant toutes ses racines négatives, P un polynome de degré p à coefficients tous positifs; 2° $F = \Phi e^P$ où Φ est un produit canonique quelconque d'ordre $< p$, P un polynome quelconque de degré p.

E. Maillet.

2865. [V] Le problème d'Apollonius (cercle tangent à trois cercles donés) a été traité par tant de géomètres, parmi lesquels Descartes, Viète, Newton, Poncelet, etc., et résolu de façons si diverses, qu'il doit exister une monografie spéciale, historique de la question; on mêmes plusieurs.

Comme une tèle étude me serait fort utile et que je n'en conais pas, je serai heureus, si èle existe, qu'un lecteur veuille bien m'en doner la référence et si èle n'existe pas, de provoquer cète étude, intéressante pour un grand nombre de Géomètres.

E. Lemoine.

2866. [V] I. Dans un traité allemand sur la théorie des équations j'ai trouvé mentionnée une *méthode Cassella* pour la détermination des racines numériques d'une équation, mais sans aucune indication ou explication. Pourrait-on me donner des renseignements, et un résumé, sur cette méthode?

II. Je désirerais beaucoup avoir une bibliographie, aussi complète que possible, des écrits inédits du mathématicien italien *Giordano Riccati*.

A. Kristhoff (Rome).

2867. [X6] Dans quel recueil a paru la théorie du planimètre du capitaine Pritz? Si elle est simple, un correspondant ne voudrait-il pas la donner ici, en abrégé?

On sait que ce planimètre se compose d'une tige rectiligne deux fois recourbée à angle droit; l'une des extrémités A se termine par une pointe et l'autre B par une hachette dont le plan du tranchant passe par la pointe. L'aire d'une courbe est proportionnelle à la distance des positions initiale et finale de la hachette B, quand on fait parcourir à A un chemin partant du centre de gravité de l'aire pour y revenir par le même chemin, après avoir contourné l'aire à évaluer.

V. AUBRY.

2868. [V1] Quelqu'un a-t-il connaissance du moyen qu'Inaudi emploie pour trouver de tête, *instantanément sans calcul apparent,* le jour de la semaine auquel correspond une date quelconque de l'ère chrétienne?

Je ne désire pas connaître le secret, mais savoir seulement s'il a déjà été découvert. A. CLAUSE.

2869. [V1] Certaines fonctions définies d'abord pour n entier positif sont égales à l'unité quand $n = 0$. Quels exemples en a-t-on en dehors de

$$x^n, \quad n!, \quad K_n = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = a_n K_{n-1} + K_{n-2}$$

(théorie des fractions continues; *voir* LEJEUNE-DIRICHLET, *Zahlentheorie,* p. 47). Peut-on généraliser ces fonctions?

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

2870. [M¹5kα] Le théorème suivant est-il connu? Donner dans ce cas des renseignements bibliographiques.

Lorsqu'une corde d'une cubique circulaire à point double est vue de ce point sous un angle droit, le cercle décrit sur cette corde comme diamètre coupe la perpendiculaire abaissée du point double sur l'asymptote en un second point qui est fixe. T. LEMOYNE.

RÉPONSES

---

314. (**1894**, 179) (P.-F. Teilhet). — *Démonstration du dernier théorème de Fermat sur l'impossibilité de l'équation*

$$x^n + y^n = z^n$$

(**1895**, 117, 359). — I. H.-J.-S. Smith [*Report on the Theorie of Numbers*, Part. II, § 61 (*R. B. A.*, 1860, p. 148-152, ou *Collected Math. Papers*, Vol. I)] donne une intéressante histoire du théorème et des tentatives faites pour le démontrer, ainsi qu'un bref exposé de la démonstration de Kummer. — David Hilbert [*Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* (*D. V. M.*, t. IV, 1897, p. 517); *Theorie des Kreiskörpers* (*Encyk. der Math. Wiss.*, Band I, p. 713)] donne la solution par la méthode de Kummer et des indications bibliographiques. — D. Mirimanoff, *L'équation indéterminée $x^l + y^l + z^l = 0$ et le criterium de Kummer* (*Cr.*, t. **128**, 1904, p. 45-68). — E. Wendt, *Arith. Studien* (*Cr.*, t. 113, 1894, p. 335). — T.-R. Bendz, *Ofver diophantiska elevationen*

$$x^n + y^n = z^n$$

(Upsala, 1902). — Éd. Maillet (*A. F.*, 1897, p. 156-168). — M.-F. Landry, *Six mémoires sur la théorie des nombres* (Paris, Hachette, 1853-1856). — *Encyklopädie der Math. Wiss.*, Band I, p. 634 et Note 106. — D. Mirimanoff, *Sur l'équation*

$$x^{37} + y^{37} + z^{37} = 0$$

(*Cr.*, t. 3, 1893, p. 26-30). — G.-B. Mathews (*M. M.*, 2ᵉ série, t. XXIV, 1894, p. 97; t. XV, 1888, p. 68).

II. V.-A. Lebesgue (*J. M.*, t. V, 1840, p. 184, 276, 348; t. VIII, 1843, p. 49). — Lejeune-Dirichlet (*Cr.*, t. 3, 1828, p. 354, 368;

Werke, t. I, 1825, p. 1; *Cr.*, t. 9, 1832, p. 390; *Werke*, t. I, p. 21, 189). — G. LAMÉ (*S. E.*, t. VIII, 1843, p. 421; *J. M.*, t. V, 1840, p. 195; t. XII, 1847, p. 137, 172; *C. R.*, t. IX, 1839, p. 359; t. XXIV, 1847, p. 310, 569; t. LXI, 1865, p. 921, 961). — PETER BARLOW (*Theory of Numbers*, 1811, p. 160-169) donne une démonstration erronée. — E. KUMMER (*Cr.*, t. 17, 1837, p. 203 : t. 30, 1846, p. 107; t. 35, 1847, p. 319, 327; t. 40, 1850, p. 130; *J. M.*, t. XVI, 1851. p. 376; *A. B. A.*, 1857, p. 41; *Mo. A. B.*, 1846, p. 87; 1857, p. 275; 1847, p. 132, 140, 305). — E. DE JONQUIÈRES (*N. L. A.*, t. XXXVII, 1884, p. 146; *C. R.*, t. XCVIII, 1884, p. 863). — E. CATALAN (*N. C.*, t. IV, 1878, p. 352, 371; *B. A. B.*, 3ᵉ série, t. XII, 1886, p. 498). — Père PÉPIN (*J. M.*, 2ᵉ série, t. XV, 1870, p. 217; *C. R.*, t. LXXXII, 1876, p. 676, 743; t. XCI, 1880, p. 366; *N. L. A.*, t. XXXIV, 1881, p. 73). — A. CAUCHY (*C. R.*, t. IX, 1839, p. 359; t. XXIV, 1847, p. 316, 347, 469, 516, 578, 633, 661; *J. M.*, t. V, 1840, p. 211). — LEFÉBURE (*C. R.*, t. XC, 1880, p. 1406). — H.-F. TALBOT (*T. R. S. E.*, t. XXI, 1857, p. 403). — A. KORKINE (*C. R.*, t. XC, 1880, p. 303). — A. RIEKE (*Z.*, t. XXXIV, 1889, p. 238; t. XXXVI, 1891, p. 249; t. XXXVII, 1892, p. 57). — D. VARISCO (*G. B.*, t. XXVII, 1889, p. 371). — E. MAILLET (*A. M.*, t. XXIV, 1901, p. 247). — F. LINDEMANN (*S. A. M*, t. XXXI, 1901. p. 185, 495). — C.-F. KAUSLER (*A. P. N. A.*, t. XIII, 1820, p. 237, 245; t. XV, 1806, p. 146).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

[(Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

J'ajouterai la mention ci-dessous qu'on oublie presque toujours : A.-M. LEGENDRE, *Mém. Acad. Sc. Institut France*, t. VI, 1823, éd. Paris, 1827, p. 1. Cependant, dans ce Mémoire, dont la lecture est facile, Sophie Germain et Legendre obtiennent, *pour le cas où x, y, z sont réels et premiers à l'exposant n*, des résultats plus étendus que ceux trouvés plus tard par Kummer. Jusqu'ici la méthode de Sophie Germain, perfectionnée par Legendre, est la plus puissante et la plus simple pour ce cas.

Je crois que les renseignements ci-dessus ont d'autant plus d'intérêt que je viens d'avoir à examiner deux essais manuscrits de démonstration, partielle ou totale, du dernier théorème de Fermat, et que son histoire est très incomplète dans l'édition allemande de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (Leipzig, Teubner).

E. MAILLET.

315. (**1894**, 180) (A. Boutin). — *Étude de la fonction*

$$y = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} x \ldots$$

(**1895**, 172, 359; **1899**, 109). — *Voir :* H. Siebeck, *Die recurrenten Reihen vom Standpuncte der Zahlentheorie aus betrachtet* (*Cr.*, t. 33, 1846, p. 71); R.-F. Scott, *Determinants*, Chapitre XIII, § 4. Soit

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \text{avec} \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2;$$

nous avons

$$u_n = \frac{\left[(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right]}{2^{n+1}\sqrt{5}}.$$

Sylvester a obtenu ce nombre u_n sous la forme d'une série (*M. M.*, 2e série, t. VIII, 1879, p. 187) :

$$1 + (n-1) + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3} + \ldots.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

879. (**1896**, 176) (M.-R. de Montessus). — *Ouvrages sur les fractions continues algébriques périodiques* (**1897**, 40, 203). — Voici des références bibliographiques importantes :

Stolz, *Allgemeine Arithmetik*, Band II, p. 299. — T.-N. Thiele (*Zeuthen Tidsskrift*, 4e série, t. III, 1879, p. 70). — G. Landsberg (*Cr.*, t. 109, 1892, p. 231-237). — E. Netto (*Cr.*, t. 110, 1892, p. 349-352). — E. Bortolotti (*R. C. M. P.*, t. VI, 1892, p. 1-13; t. IX, 1895, p. 136-149). — A. Pringsheim (*S. A. M.*, 1900, p. 463-488).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

922. (**1896**, 245) (E. Remy). — *Variations d'acuité du son dans le brouillard* (**1897**, 107, 204). — Aux indications bibliographiques données (*loc. cit.*) il sera intéressant d'ajouter l'extrait suivant de la *Grande Encyclopédie* :

« L'influence de la brume sur la propagation des ondes sonores intéresse au plus haut point la navigation. Une commission anglaise, présidée par Tyndall et chargée d'étudier l'installation de signaux

sonores, a constaté que la brume ne s'oppose pas à la transmission du son et que sa propagation est accompagnée d'un écho marin que l'on attribue à sa réflexion sur les lames. Tout récemment, à la suite d'abordages désastreux occasionnés par la brume, M. Fizeau a attiré l'attention sur un effet d'inflexion des ondes sonores dû à la superposition de couches d'air dont la température décroît rapidement, ce qui se produit fréquemment par temps de brume. Le son se propagerait alors suivant une courbe concave par le haut et, par suite, deviendrait, à une certaine distance, insensible pour une personne placée au même niveau que la source sonore. »

Note. — Voir *C. R.*, t. CIV, 1887, p. 1347 : H. Fizeau, Sur certaines inflexions, dans la direction des sons, qui doivent parfois rendre inefficaces les signaux sonores en usage dans la navigation.

H. Brocard.

1213. (**1898**, 6) (M.-R. de Montessus). — ***Bibliographie de la fonction*** Γ (**1898**, 156, 234, 280). — Maurice Godefroy, *La fonction Gamma; théorie, histoire, bibliographie* (Paris, Gauthier-Villars, 1901); *Encyklopädie der Math. Wiss.*, Band II, p. 157-186.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

1299. (**1898**, 126) (F. Michel). — *Machines à calculer* (**1898**, 240; **1899**, 18, 252; **1900**, 133). — *Voir :* W. Dyck, *Katalog mathematischer Modelle, Apparate, und Instrumente*, p. 139-154; *Nachtrag*, p. 1-6 (München, 1892); *Encyklopädie der Math. Wiss.*, Band I, Heft 6, p. 938-1079 (Article *Numerisches Rechnen* par R. Mehmke). — R. Mehmke, *Ueber graphisches Rechnen und über Rechnenmaschinen, sowie über numerisches Rechnen* (publication annoncée par Teubner). Il y a une nouvelle machine appelée la *Millionnaire*, fabriquée par Hans W. Egli, Zurich (Suisse). Elle présente des avantages nouveaux et spéciaux.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

1477. (**1899**, 74) (Émile Borel). — *Sur certaines fonctions entières.* — D'après M. Mittag-Leffler (*Acta math.*, t. XXIX, p. 124), la fonction entière

$$E_\alpha(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)},$$

quand $2 > \alpha > 0$, est telle que son module tend vers o avec $\frac{1}{r}$ lorsque x croît indéfiniment dans un angle intérieur à l'angle φ avec

$$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Il dit à ce sujet :

« Par ce théorème se trouve tranchée une question importante soulevée il y a quelques années par M. Borel (*Interm. des Math.*, t. VI, n° 4, avril 1899) :

» *Peut-on trouver une fonction entière dont le module ne dépasse l'unité qu'à l'intérieur d'un angle aussi petit que l'on veut donné d'avance, ou, sinon, peut-on démontrer rigoureusement que cette question doit être résolue par la négative?*

» La question doit être résolue par l'affirmative, et l'on obtient, en $E_\alpha(x)$, la fonction désirée, en donnant seulement à α une valeur suffisamment petite. »

M. Mittag-Leffler donne ensuite d'autres exemples de fonctions entières jouissant de la même propriété.

On trouvera dans le même Mémoire, p. 143-144, des exemples de fonctions entières dus à MM. Helge von Koch, J. Malmquist, E. Lindelöf, qui ont des rapports avec la question **1477**. *Voir* encore Mittag-Leffler (*C. R.*, 2 mars et 12 octobre 1903).

De mon côté, j'ai montré (*J. E. P.*, 2e série, Cahier n° 8, 1903, p. 92) que si

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

est une fonction entière *quasi-algébrique,* c'est-à-dire une fonction où $|c_n|$ et $\left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right|$ décroissent suffisamment vite avec $\frac{1}{n}$, on peut toujours trouver une infinité de couronnes circulaires ayant pour centre l'origine et de rayon indéfiniment croissant en tout point desquelles le module de $f(z)$ croît au delà de toute limite quand on considère des rayons de plus en plus grands. E. MAILLET.

1628. (**1899**, 218) (*Gul*). — *Tétraèdres dans lesquels les arêtes et le volume soient des nombres entiers* (**1900**, 316; **1901**, 90). —

Voir : R. Hoppe. *Ueber rationale Dreikante und Tetraeder* (*A. Gr.*, t. LXI, 1877, p. 87-99).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

1658 (**1899**, 243) (G. de Rocquigny). — *L'Arithmétique au premier rang des Sciences* (**1904**, 145). — Voici ce que dit le célèbre jésuite Clavius dans son *Epitome arithmetica practicæ* (Moguntiæ, 1611) :

« Benevolo lectori : Cum omnis me Mathematicarum rerum cognitio delectat, tum veró ex Arithmeticæ tractatione incredibilem capis voluptatem; idès non solum ob eximiam quandam ejus dignitatem, sed etiam, quòd sine Arithmetica, ut ego quidem existimo, nulla scientia, ut Plato audet dicere, neque, ipsa hominum societas possit consistere. » G. Maupin.

1734. (**1900**, 9) (*Kn. France*). — J'ai démontré, dans mon *Cours de Trigonométrie* édité par Ad. Hoste, de Gand (Belgique), sans faire intervenir la troisième dimension de l'espace, que l'addition des angles est une opération commutative.

E. Barbette (Liége).

1788. (**1900**, 84) (C. Flye Sainte-Marie). — *Constructions par la règle et un compas d'ouverture invariable* (**1900**, 384; **1901**, 174). — *Voir* : W.-M. Kutta. *Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung* (*N. A. H.*, t. LXXI, 1897, p. 69-101).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2175. (**1901**, 223) (E.-B. Escott). — *Nombres à la fois triangulaires, carrés et hexagonaux.* — Il n'y a que la solution

$$x = y = z = 1.$$

En effet, pour qu'un nombre hexagonal $3z^2 - 3z + 1$ soit triangulaire, il faut que son octuple, augmenté de 1, soit un carré :

$$24z^2 - 24z = m^2 - 9. \quad (1)$$

Pour que ce même nombre hexagonal soit un carré, il faut que, diminué de 1, il soit l'octuple d'un nombre triangulaire

$$3z^2 - 3z = \frac{8n^2 + 8n}{2}$$

ou

(2) $$24z^2 - 24z = 32n^2 + 32n.$$

De (1) et de (2) on tire

$$32n^2 + 32n - m^2 + 9 = 0,$$

d'où

(3) $$n = \frac{-4 \pm \sqrt{2m^2 - 2}}{8}.$$

D'après (1), m est impair. Or si, dans la quantité sous le radical, on remplace m par la suite des nombres impairs, on aura la suite des nombres triangulaires multipliés par 16, c'est-à-dire 16.1, 16.3, 16.6, 16.10, etc.; $2m^2 - 2$ sera donc un carré quand sa valeur sera 16 fois un nombre triangulaire carré, c'est-à-dire 16.1, 16.6^2. 16.35^2, 16.204^2, etc., dont les racines forment la série 4, 24, 140, 816, etc. Les termes de cette dernière série sont liés, à partir du troisième, par la relation $t_n = 6t_{n-1} - t_{n-2}$. Il est facile de voir qu'à l'exception du premier, 4, ils seront tous des multiples de 8. Quand donc, dans (3), on les diminuera de 4, ils ne seront plus divisibles par 8, et n ne sera pas un nombre entier.

Pour $m = 3$, ou $2m^2 - 2 = 16$, on aura

$$n = 0, \qquad \text{d'où} \qquad z = 1,$$

et, par suite,

$$x = y = 1.$$

Ph. Jolivald.

2248. (**1901**, 310) (E. Maillet). — *Additions à l'Encyklopädie der mathem. Wissenschaften,* Band I (Théorie des nombres). — I. Le Père Pépin a donné des démonstrations de la loi de réciprocité quadratique qui complètent la démonstration de Legendre et la cinquième démonstration de Gauss. Voir *N. L. M.*, t. XVI, 1899, p. 229-276; *N. L. A.*, t. LI, 1897, p. 123-144; t. XLIII, 1890, p. 192; t. XXX, p. 40.

II. *Voir* rép. aux questions **2571** (**1903**, 224, 319; **1904**, 156, 242) : $x^2 - Ny^2 = -1$; **1522** : Fractions continues; **1271** (**1898**, 215; **1899**, 16, 252) : Fractions continues périodiques; **1299** (**1898**, 240; **1899**, 18, 252; **1900**, 133; **1905**, 14) : Machines à calculer; **1213** (**1898**, 156, 234, 280; **1905**, 14) : Fonction gamma; **314** (**1895**, 117, 359; **1905**, 11) : Impossibilité de l'équation $x^n + y^n = z^n$; **122** (**1894**, 140, 255) et **2737** (**1904**, 136) : Géométrie du triangle; **153** (**1895**, 141, 338; **1902**, 207), **2052** (**1901**, 268) et **2663** (**1903**, 325; **1904**, 62, 119, 291) : Construc-

tion approximative de π; **1072** (**1897**, 287; **1898**, 107, 276; **1900**, 54, 201) : Équation de Pell, $x^2 - Ny^2 = 1$.

III. *Bibliographie des racines primitives* (*Encyk.*, Bd. I, p. 562-563). — Tables de racines primitives : REUSCHLE, *Math. Abhandlung* (Stuttgart, 1856) jusqu'à 1000. — CRELLE (*Cr.*, t. 9), KULIK (*Cr.*, t. 45, p. 55) jusqu'à 1009. — TSCHEBYSCHEFF, *Theorie der Congruenzen*, jusqu'à 200. — E. CAHEN, *Théorie des nombres*, jusqu'à 200. — E. DESMAREST, *Traité de l'analyse indéterminée*, jusqu'à 10000.

IV. *Tables des nombres dont* 10 *est racine primitive.* — REUSCHLE, *Math. Abhandlung* (Stuttgart, 1856) jusqu'à 15000 (il y a des erreurs). — WM. SHANKS (*M. M.*, t. II, 1873, p. 41-43; t. III, 1874, p. 52-55; *P. R. S. L.*, t. XXII, 1873-74, p. 200-210, 381, 384; t. XXIII, 1874-75, p. 260; t. XXIV, 1875-76, p. 392). — (Tables publiées jusqu'à 30000, de 30000 à 60000 conservées par la Société en manuscrit.) — G. SALMON (*M. M.*, t. II, 1873, p. 49). — E. DESMAREST, *Traité de l'analyse indéterminée* (1852) jusqu'à 10000 (il y a des erreurs). — C.-E. BICKMORE (*N. A.*, 3e série, t. XV, p. 222-227); facteur de $10^n - 1$ jusqu'à $n = 100$. — W.-P. WORKMAN (*M. M.*, t. XXXI, 1901). — HEINRICH BORK, *Periodische Dezimalbrüche* (Progr., Berlin, 1895) jusqu'à 100000. — H. HERTZER (*A. Gr.*, t. II, 1902), jusqu'à 111250.

V. *Bibliographie générale des racines primitives.* — M. FROLOV, *Sur les racines primitives* (*S. M.*, t. XXI, 1893, p. 113-128). — L. POINSOT, *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres* (*J. M.*, 1re série, t. X, 1845, p. 73). — V.-A. LE BESGUE (*C. R.*, t. LXIV, 1867, p. 1268-1269; t. XXXIX, 1854, p. 1069; t. LXIII, 1866, p. 1100; t. LXX, 1870, p. 1243). — L. POINSOT, *Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres* (*J. E. P.*, XIe Cahier, 1820, p. 345). — M.-F. LANDRY, *Troisième Mémoire sur la théorie des nombres* (1854). — A.-R. FORSYTH (*M. M.*, 2e série, t. XIII, 1887, p. 169-192). — J. PERROTT (*B. D.*, 2e série, t. XVII, 1893, p. 66; t. XVIII, 1894, p. 64).

VI. *Équation de Pell* (*Encyk. der math. Wiss.*, Bd. I, p. 599). — *Voir* mes réponses à **1072** et **2571** (*I. M.*). — H. KONEN, *Geschichte der Gleichung* $t^2 - Du^2 = 1$ (Leipzig, S. Hirzel, 1901). — ARNDT (*Cr.*, t. 31, 1846, p. 343-358). — W. SCHMIDT, *Ueber die Auflösung der Gleichung* $t^2 - Du^2 = \pm 4$ (*Z. S.*, t. XIX, 1874, p. 92-94). —

G. SPECKMANN (*A. Gr.*, 2ᵉ série, t. XIII, 1894, p. 327-330). — G. PROTTINI (*G. B.*, t. XXXIII, 1895, p. 371-378).

VII. *Nombres parfaits* (*Encykl. der math. W.*, t. I, p. 578). — KLUGEL (*Mathematisches Wörterbuch*, t. V, 1831, p. 887-889) donne la bibliographie du sujet avant le XIXᵉ siècle. — G.-W. KRAFFT (*A. P. C.*, t. VII, 1740, p. 7-14). — C.-N. DE WINSHEIM (*Nov. Comm. Acad. Sc.* (Saint-Pétersbourg, t. II, 1751, p. 68-99). — E. LUCAS, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise* (*B. Bon.*, t. X, 1877, p. 278-287). — LIONNET (*N. A.*, 2ᵉ série, t. XVIII, 1879, p. 306). — H. NOVARÈSE (*J. S. M.*, t. VIII, 1886, p. 11-16). — J. BEZDICEK (*Cr.*, t. 25, 1896, p. 129, 209). — T. PÉPIN (*N. L. M.*, t. XIII, 1898, p. 345-420). — STUDNICKA (*S. G. P.*, 1899).

VIII. *Nombres amiables* (*Encykl.*, t. I, p. 578). — KLÜGEL (*Mathematisches Wörterbuch*, t. I, 1803, p. 246-252; t. V, 1831, p. 55) donne la bibliographie du sujet avant le XIXᵉ siècle. — G.-W. KRAFFT (*Nov. Comm. Acad. Petrop.*, t. II, 1751, p. 100-118). — L. EULER (*Acta Erud.*, 1747). — TERQUEM (*N. A.*, t. III, 1844, p. 218, 552). — J. BEZDICEK (*Cr.*, t. 25, 1896, p. 129, 209). — A. CUNNINGHAM (*P. L. M. S.*, 1901).

Dans la traduction italienne de la *Mathematik* de BALTZER, deuxième Partie, par Cremona, on trouve les deux nombres amiables 1184 et 1210 non indiqués par Euler, et découverts par Paganini.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

2380 (**1902**, 171) (KORTEWEG, LA RÉDACTION). — *Courbe de von Tschirnhaus.* — Cette courbe paraît être une généralisation du limaçon de Pascal, proposée comme défi aux géomètres par von Tschirnhaus, suivant l'usage très répandu de son temps. Si l'on rapporte le limaçon à son point double pour origine et à l'axe de symétrie pour axe des y, son équation a la forme

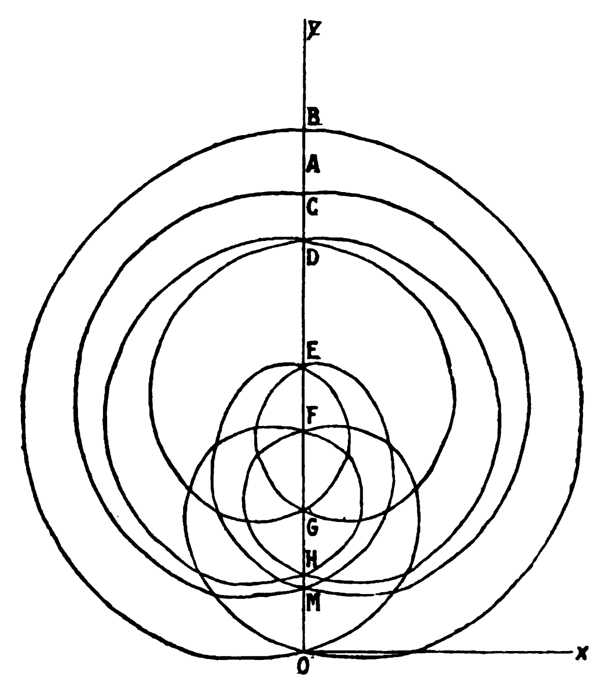
$$[x^2+y(y-a)]^2-R^2(x^2+y^2)=0.$$

Soit le cercle de diamètre $OA=a$. La puissance P d'un point M de la courbe vis-à-vis de ce cercle est en valeur absolue égale au produit $R\times MO$.

Von Tschirnhaus a été probablement hanté par l'idée de former une courbe du même genre en adjoignant au cercle OA plusieurs autres cercles. Dans la figure qui accompagne sa Lettre, prenons pour

axe des y la ligne des points doubles, en mettant l'origine O au point double inférieur. Soient B et C les sommets des boucles simples extrêmes, A milieu de BC et successivement D, E, F, G, H, M les autres points doubles dans l'ordre descendant. Faisons

$$OA = a, \quad AB = R, \quad OD = d, \quad OE = e,$$
$$OF = f, \quad OG = g, \quad OH = h, \quad OM = m.$$



L'équation du seizième degré

$$\left\{\begin{aligned} &[x^2 + y(y-a)]^2\,[x^2+(y-f)(y-h)]^2 \\ &\quad\times[x^2+(y-d)(y-g)]^2\,[x^2+(y-e)(y-m)]^2 \\ &-R^2(x^2+y^2)\,[x^2+(y-f)^2]\,[x^2+(y-h)^2] \\ &\quad\times[x^2+(y-d)^2]\,[x^2+(y-g)^2] \\ &\qquad\qquad\times[x^2+(y-e)^2]\,[x^2+(y-m)^2]=0 \end{aligned}\right.$$

représente une courbe dont le mouvement est bien BOFHDGEMC comme sur la courbe de von Tschirnhaus, et qui admet aussi les points doubles O, D, E, F, G, H, M. Soient les cercles de dia-

mètres OA, FH, DG, EM, P_1, P_2, P_3, P_4 les puissances d'un point S de la courbe par rapport à eux ; on a, en valeur absolue,

$$P_1.P_2.P_3.P_4 = R.SO.SF.SH.SD.SG.SE.SM.$$

P. BARBARIN.

2381. (**1902**, 172) (E. FRANCKEN) (1677, **1899**, 265). — *Déformation d'une pièce circulaire* (**1903**, 114 ; **1904**, 19, 49). — La réponse de M. Mesnager à la question **2381** se rattache à un Mémoire plus développé du même auteur intitulé : *Note sur l'approximation des formules de flexion des arcs,* publié dans les *Annales des Ponts et Chaussées,* 1903, 4e trimestre, p. 164-201, et relatant à la fois des études théoriques et expérimentales sur les bandages et les cerceaux métalliques. E. MAILLET.

2420. (**1902**, 229) (N.-J. HATZIDAKIS). — En attendant une réponse à cette question, nous signalerons son analogie avec la question **2712** (**1904**, 66) résolue (**1904**, 222).

On pourra sans doute y puiser quelques indications pour l'étude et la solution de la question **2420**. LA RÉDACTION.

2585. (**1903**, 147) (E.-N. BARISIEN). — *Construire un triangle connaissant les pieds de ses symédianes.* — La solution de cette question ne peut, en général, être construite à l'aide de la règle et du compas seuls. Soit ABC un triangle équilatéral, (C) la circonférence qui lui est circonscrite, *abc* le triangle équilatéral dont les sommets sont les milieux des côtés BC, CA, AB : les axes rectangulaires yy', xx' se coupent en O et le centre ω commun à ABC, *abc*, (C) se trouve, pour fixer les idées, sur l'axe Ox' des x négatifs et son abscisse est $-\lambda$.

Si je cherche à former une figure homologique à ABC, *abc*, (C) (l'axe d'homologie étant yy' et le centre d'homologie se trouvant sur xx' du côté des x négatifs), de manière que le transformé $a'b'c'$ de *abc* soit semblable au triangle donné dont les sommets sont les pieds des symédianes du triangle cherché et que la conique (C′) transformée de (C) soit une circonférence, alors le triangle A′B′C′ transformé de ABC sera semblable au triangle cherché.

L'équation qui détermine λ pour que toutes ces conditions soient réalisées est du *douzième degré.*

Les calculs sont trop longs et présentent trop peu d'intérêt pour trouver place ici. G. ESPANET.

(Shih-Chia-Chuang, Pei-Chih-Li, Chine).

2708. (**1904**, 4) (T. LEMOYNE). — *Propriété de la strophoïde droite.* — J'ignore si la propriété énoncée est nouvelle, mais elle est le résultat de la transformation par rayons vecteurs réciproques ou par inversion, appliquée à la propriété connue :

L'orthocentre de tout triangle inscrit à l'hyperbole équilatère est sur la courbe.

Ici, il est vrai, il s'agit d'un triangle particulier, ayant un de ses sommets en un sommet de l'hyperbole équilatère pris pour pôle d'inversion.

La strophoïde droite étant l'inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à un de ses sommets, beaucoup de propriétés de ces deux courbes pourront se transformer simplement par inversion.

H. BROCARD.

2709. (**1904**, 4) (T. LEMOYNE). — *Propriété des cubiques circulaires* (**1904**, 174). — Même observation que pour l'énoncé **2708**. La strophoïde oblique est la transformée par inversion d'une hyperbole équilatère par rapport à un de ses points. H. BROCARD.

2728. (**1904**, 37) (*C. Effe*). — *Intégration de l'équation*

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + 2\frac{d^4 z}{dx^2\, dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} = a,$$

a désignant une constante [*comp.* **2863** (**1905**, 6-7)]. — L'équation précédente peut être écrite

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right) z = a;$$

par conséquent, en posant, suivant l'usage,

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2},$$

on a

$$\Delta_2 \Delta_2 z = a,$$

et l'intégration de cette équation peut être ramenée, comme on sait bien, à celle de la suivante

$$\Delta_2 \Delta_2 z = 0.$$

Cette équation, qui a une foule d'applications, surtout dans la théorie de l'élasticité, a été étudiée (avec différentes conditions aux limites)

d'abord par M. E. Mathieu et ensuite par de nombreux géomètres italiens. *Voir* notamment :

Levi-Civita, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2\Delta_2 u = 0$ (*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. XXXIII, 1898).

Almansi, *Integrazione delle doppia equazione di Laplace* (*Atti della R. Accademia dei Lincei*, 5ᵉ série, vol. IX, 1900).

Marcolongo, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici* (Milano, Hœpli, 1904).

Dans ce Livre, très intéressant, on trouvera bien des indications bibliographiques sur l'équation $\Delta_2\Delta_2 = 0$.

T. Boggio (Turin).

Voir encore : A. Flamant, *Résistance des matériaux*, p. 547. Paris, Baudry, 1886.

E. Maillet.

2740. (**1904**, 66) (E.-B. Escott). — (**1904**, 180). — Depuis la publication de ma réponse (**1904**, 180), j'ai retrouvé différentes indications bibliographiques qui permettent de remonter à Ossian Bonnet, à Terquem et à Euler. Effectivement, dans une Note sur les racines imaginaires des équations algébriques (*N. A.*, 1845, p. 236-237), Bonnet s'exprime ainsi :

« On sait depuis longtemps que, lorsque les coefficients A, B, C de trois termes consécutifs Ax^n, Bx^{n-1}, Cx^{n-2} d'une équation vérifient la condition $AC \gtreqless B^2$, l'équation a au moins deux racines imaginaires; mais on n'a pas remarqué, je crois, qu'il suffisait que l'on eût $AC \gtreqless \frac{1}{2}B^2$. »

Suit la démonstration.

Terquem observe (p. 237) que le théorème d'Euler (*Mém. Acad. Petropol.*, t. XIII, p. 105) rappelé (*N. A.*, 1843, p. 257) donne

$$AC > \frac{n-1}{n} B^2$$

pour caractère de l'existence d'imaginaires; or n est au moins égal à 2; donc, etc.

Le germe de cette proposition se trouve dans un théorème de de Gua (*loc. cit.*, p. 256).

H. Brocard.

2814. (**1904**, 211) (C. Popovici). — Il conviendrait de vérifier si le document ci-après désigné, dont je ne connais que le titre, se rapporte à l'objet de la question :

Ph. Gilbert, *De l'emploi des imaginaires dans la recherche des différentielles d'ordre quelconque*. Bruxelles, 1872.

Pour le calcul des dérivées à indice quelconque, *voir :*

J. Liouville (*J. E. P.*, XXIe Cahier, 1832; XXIVe Cahier, 1835; *Cr.*, t. 13, 1835; *J. M.*, t. XX, 1855).
A. Letnikof (*S. M. M.*, t. III, 1868; t. VI, 1873).
A. Rutgers (*A. N.*, t. VII, 1872).
P. Nekrassof (*S. M. M.*, t. XIV, 1888 et 1889).
A. Genocchi; G. Halphen, etc.

De très utiles indications se trouvent dans une étude de M. N.-J. Sonine, publiée au *Math. Sbornik* (t. VI, 1872, 1873, Moscou) sur la différentiation avec un indice quelconque (38 pages). L'auteur y rappelle les travaux de Liouville, 1832; Kelland, S. Roberts, Grunwald, 1867; Tardy, 1858; Genocchi, Holmgren, Letnikof, etc.

H. Brocard.

Voir *I. M.*, **1453** (**1899**, 30) et *Encyk. der Math. Wissensch.*, t. II, p. 116-119.

E.-B. Escott (Ann Arbor).

2832. (**1904**, 257) (H. Brocard). — *Sphère tangente à trois droites.* — Pour une position de la sphère, les plans tangents passant par ces droites se rencontrent au pôle P du plan des contacts.

Le plan des contacts coupe la sphère suivant un cercle C qui s'appuie sur les trois droites et suivant lequel un cône de révolution est circonscrit à la sphère; son sommet est en P; il est donc tangent à chacune des droites, et inversement. Donc :

Le lieu de P peut être défini comme le lieu des sommets des cônes de révolution, à axes variables, tangents aux trois droites; les trois points de contact étant, pour chaque cône, sur un même parallèle.

La droite qui joint P au centre S de la sphère est perpendiculaire au plan des contacts (le plan polaire de P) au centre O de C; on a donc

$$SO \times SP = R^2,$$

R rayon de la sphère.

V. Aubry.

QUESTIONS.

2871. [**Q4a**] On considère dans le plan deux axes rectangulaires, et les points de coordonnées entières, $x = 0, 1, \ldots, m-1$, $y = 0, 1, \ldots, n-1$. On joint par groupes de trois, de toutes les manières possibles, ces mn points; on forme ainsi des triangles au nombre de :

$$\frac{mn(mn-1)(mn-2)}{6} = p + a + r + o,$$

p est le nombre des triangles aplatis (trois points en ligne droite), a le nombre des triangles acutangles, r, o, celui des triangles rectangles et obtusangles. Je désirerais l'expression de p, a, r, o, en fonction de m et n?

Même question pour l'espace : x, y, z coordonnées rectangulaires, x variant de 0 à $m-1$, y de 0 à $n-1$, z de 0 à $l-1$; on a mnl points qui, pris de toutes les manières possibles trois à trois, forment des triangles en nombre :

$$\frac{lmn(lmn-1)(lmn-2)}{6} = p + a + r + o.$$

p, a, r, o ayant même signification que ci-dessus, je désirerais leur expression en fonction de l, m, n?

A. Boutin.

2872. [**P2bα**] Je désirerais avoir l'équation, en coordonnées cartésiennes, de la courbe polaire réciproque du cercle circonscrit à un triangle, la courbe directrice étant : 1° le cercle inscrit; 2° le cercle des neuf points.

Cette question a-t-elle déjà été traitée?

Émile Weber (Liége).

2873. [Q4c] A la page 199 du Livre *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* (4e édit.), par Bachet, revu par M. Labosne, dans la solution du Problème X :

Inscrire les cent premiers nombres sur différents cartons, de manière que, connaissant les cartons où se trouve un nombre, on puisse deviner ce nombre immédiatement;

le dernier paragraphe dit :

On pourrait faire un jeu semblable avec les puissances de 3, *mais il serait un peu moins simple.*

Je demande comment se fait ce dernier jeu semblable avec les puissances de 3, quels numéros aura chaque carton, par quel moyen on parvient à deviner le nombre.

En d'autres termes, je demande l'exposé complet et la solution raisonnée de ce jeu.

LAZZARO FILUS (Alexandrie).

2874. [X4b] Existe-t-il une méthode graphique *générale* pour la résolution de *n* équations du premier degré à *n* inconnues? L. DUJARDIN.

2875. [M'5k] A-t-on déjà remarqué les deux propriétés suivantes d'une cubique acnodale tangente en son point conjugué aux droites isotropes?

1° *La corde de contact* AB *des tangentes issues d'un point* M *de cette courbe est vue du point conjugué* O *sous un angle droit.*

2° *La corde* AB *coupe la cubique en un troisième point* C *tel que* CM *est vue de* O *sous un angle droit.*

La seconde propriété, qui se déduit très facilement de la première, donne un moyen simple de mener la tangente en un point quelconque d'une telle cubique lorsque cette courbe est tracée. T. LEMOYNE.

2876. **[M'5k]** La propriété suivante du *folium* double droit est probablement connue. Pourrait-on me dire quel en est l'auteur?

Toute corde vue du point de rebroussement d'un folium *double sous un angle droit est parallèle à la tangente en ce point qui n'est pas la tangente de rebroussement.*

T. Lemoyne.

2877. **[I19c]** En attribuant au nombre entier positif p des valeurs successives variant de n à (n^2-1), l'expression

$$(x+1)^n + x^p$$

pourra-t-elle être une puissance $n^{\text{ième}}$ exacte?

Paulmier.

2878. **[V]** A la mort de Herbert Spencer, plusieurs journaux ont signalé que ce grand penseur avait recommandé avec insistance à la nation anglaise de ne jamais adopter le système métrique des Poids et Mesures.

On désirerait connaître les arguments invoqués par Spencer et les lieux où ils sont développés.

Edm. Francken (Liége).

2879. **[K21b]** Je retrouve dans mes Notes, mais j'ai oublié de marquer la référence, le procédé rapide suivant pour la *division approchée d'un arc en n parties égales*.

Soit AB l'arc donné ($AB \leqq 180°$). On trace le diamètre AA'; de A et de A' comme centres on décrit deux circonférences de rayon AA' : soit I l'intersection de ces deux circonférences dans la région opposée à l'arc AB. Soit K l'intersection de la droite IB et du diamètre AA'. On divise le segment de droite AK en n segments égaux AP, PQ, QR, ..., TK. Les droites IP, IQ, IR, ..., IT, prolongées, partageront l'arc AB en n parties sensiblement égales entre elles.

Comment justifie-t-on cette solution graphique approchée? Peut-on évaluer le degré d'approximation atteint?

J'aimerais avoir des références bibliographiques sur cette question, et même de brèves indications de solutions graphiques analogues meilleures, s'il y en a. *Belga.*

2880. [Σ] Je crois utile de signaler un certain nombre de sujets d'études relatifs à la théorie des substitutions et à ses applications géométriques, sujets dont on trouvera le détail dans mon Mémoire : *Sur les équations de la Géométrie* (*Ann Fac. Sc. Toulouse*, 1904, p. 347-349).

Exemple : Continuation de la détermination de la classe des substitutions d'ordre 2 des groupes connus; applications géométriques; continuation de l'étude des groupes transitifs entre les combinaisons de ν lettres, etc. [comp. *I. M.*, question 1837 (**1900**, 157)]. E. Maillet.

2881. [**H3c**] Sait-on ramener à des quadratures l'intégration de l'équation différentielle

$$2yy' + ay^n = F(x) \qquad (a = \text{const.}),$$

principalement dans les cas particuliers où $n = 1$ ou 3; $F(x)$ est quelconque, $n \neq 2$. Peut-on spécifier pour $F(x)$ des conditions nécessaires et suffisantes permettant de répondre affirmativement? E. Maillet.

2882. [**L'15f**] Je désire avoir la solution de la question suivante :

Trouver le lieu du centre des ellipses de grandeur constante qui passent par deux points fixes.

E.-N. Barisien.

2883. [Σ] A-t-on déjà étudié les deux points qui divisent la distance des centres de deux cercles en segments proportionnels à la $p^{\text{ième}}$ puissance des rayons.

L'intérêt de ces points est que, pour $p = 1$, ils deviennent les centres de similitude des deux cercles.

E.-N. Barisien.

RÉPONSES.

191. (**1894**, 97) (A. Lemaire, A. Thorin, *Saurelles*). — *Tables de diviseurs premiers* (**1895**, 40, 219). — *Voir* ma réponse aux questions **1208** (**1905**, 34) et **2667** (**1905**, 45).

E.-B. Escott (Ann Arbor).

591. (**1895**, 202; **1903**, 249) (G. Luzón). — *Calcul graphique des probabilités* (**1904**, 75; **1904**, 287). — Je signale le Livre récent : *Sur l'application des procédés graphiques aux calculs d'assurances* de M. Poussin (Dulac, 8, rue Lamartine) qui contient l'application du calcul graphique (abaque) au Calcul des probabilités viagères et donne l'abaque hexagonal du théorème de Bernoulli avec transparent à vernier.

Barriol.

606. (**1895**, 205; **1904**, 161). — *Jeu d'échecs.* — *Voir* réponse à la question **560** (**1903**, 231).

E.-B. Escott (Ann Arbor).

677. (**1895**, 386; **1904**, 235). — *Nombre des tétraèdres non superposables construisibles avec six segments donnés* $a_1, a_2, \ldots, a_6$. — Pour voir si plusieurs tétraèdres sont superposables ou non, l'on peut suivre la voie ci-dessous :

Prenons un quelconque des six segments, par exemple a_α, et mettons les tétraèdres de façon que le côté a_α soit pour tous vertical, et que les tétraèdres se trouvent, par rapport à lui, tous du côté opposé à l'observateur.

Considérons ensuite un autre des côtés, soit a_β; il peut se trouver par rapport à a_α en trois positions : il peut être adjacent et se trouver à droite ou à gauche (quand nous disposons a_α de façon que le sommet commun soit le sommet supérieur), ou il peut être opposé. Nous classons ainsi tous les tétraèdres construits avec les six segments donnés en trois classes par rapport à a_α et a_β.

Pour que deux tétraèdres soient superposables il faut qu'ils appartiennent à la même classe, et qu'ils aient tous les autres éléments disposés de la même façon par rapport à a_α et a_β, si pourtant ils n'appartiennent pas à la troisième classe.

Observons maintenant combien de tétraèdres non superposables nous pouvons construire avec les six segments donnés : dans la première classe il y en a un nombre égal à celui des permutations de quatre éléments, c'est-à-dire $4!$, dans la seconde classe un égal nombre ; dans la troisième seulement $\frac{4!}{2}$, parce que les $4!$ tétraèdres de cette classe que l'on peut construire en permutant de toutes les façons les 4 segments restants sont deux à deux superposables en retournant a_α.

Au total nous avons

$$4! + 4! + \frac{4!}{2} = \frac{5}{2}4! = 60$$

tétraèdres non superposables que l'on peut construire au maximum.

Il peuvent tous être construits si

$$a_6 < a_1 + a_2,$$

en supposant

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6.$$

En appelant *symétriques* deux tétraèdres qui ont toutes les faces formées de mêmes côtés mais disposés en ordre inverse, nos 60 tétraèdres sont deux à deux symétriques, et précisément chacun de la première classe est symétrique à un de la deuxième, et ceux de la troisième sont deux à deux symétriques.

Si l'on peut construire un tétraèdre, l'on peut toujours en construire aussi le symétrique. Il s'ensuit que leur nombre sera toujours pair.

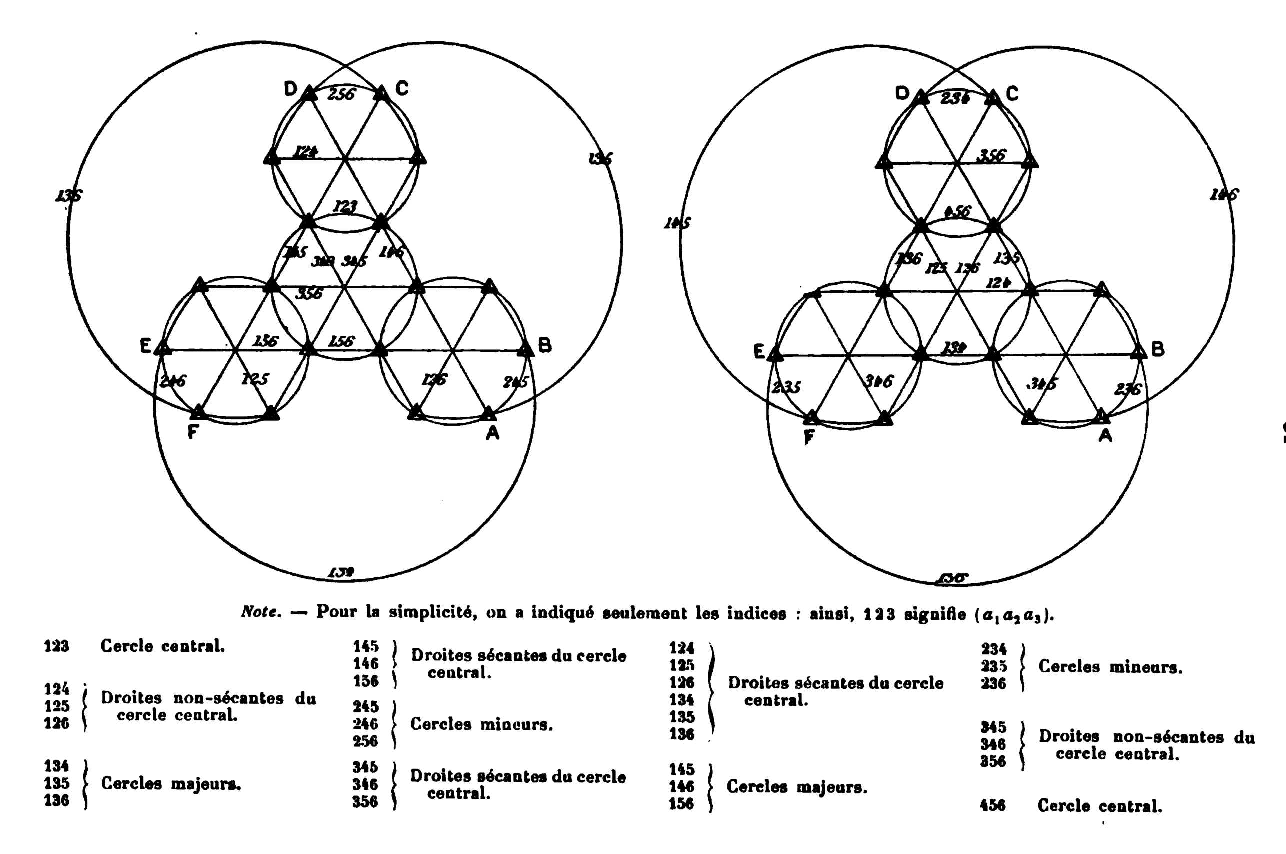
Si

$$a_6 > a_1 + a_2,$$

le nombre des tétraèdres possibles est moindre que 60 : en effet, l'on ne pourra pas construire les tétraèdres qui ont la face $(a_1 a_2 a_6)$.

Combien de tétraèdres pourrons-nous construire alors?

Il faudrait pour cela considérer tous les cas particuliers des relations de grandeur des six segments donnés : mais ces cas sont très nombreux, plus de 300.



Note. — Pour la simplicité, on a indiqué seulement les indices : ainsi, 123 signifie $(a_1 a_2 a_3)$.

123 Cercle central.

124, 125, 126 : Droites non-sécantes du cercle central.

134, 135, 136 : Cercles majeurs.

145, 146, 156 : Droites sécantes du cercle central.

245, 246, 256 : Cercles mineurs.

345, 346, 356 : Droites sécantes du cercle central.

124, 125, 126, 134, 135, 136 : Droites sécantes du cercle central.

145, 146, 156 : Cercles majeurs.

234, 235, 236 : Cercles mineurs.

345, 346, 356 : Droites non-sécantes du cercle central.

456 Cercle central.

Je veux donner une méthode pour résoudre dans chaque cas particulier le problème graphiquement.

Combien des 60 tétraèdres, que l'on peut construire si

$$a_6 < a_1 + a_2,$$

ou des 30, si nous ne considérons pas les symétriques, ont la face

$$(a_\alpha a_\beta a_\gamma)?$$

On voit facilement qu'il y en a douze (six si nous ne considérons pas les symétriques).

Dans la figure ci-jointe sont signalées 20 lignes qui correspondent aux 20 faces différentes que l'on peut former avec les six segments donnés sans tenir compte de l'ordre des côtés dans la face : chacune de ces lignes est indiquée avec trois lettres, qui représentent trois des segments donnés.

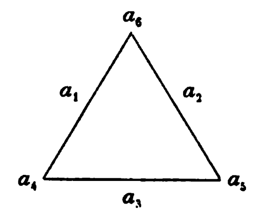
Chacune de ces lignes rencontre un certain nombre des autres en six points qui correspondent à un égal nombre de tétraèdres qui ont cette face. Par chacun de ces points de rencontre passent naturellement 4 lignes.

La figure ne pouvant pas être tracée dans un seul ensemble a été divisée en deux parties. Six tétraèdres signalés avec les lettres A, B, C, D, E, F sont répétés dans les deux parties de la figure.

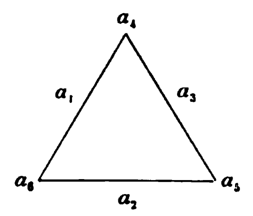
On a ainsi en tout 30 tétraèdres, en comptant A, B, ..., F une seule fois, autant que l'on peut en construire si $a_6 < a_1 + a_2$, sans considérer les symétriques. L'on peut facilement trouver toutes les faces de chaque tétraèdre ainsi signalé en considérant les quatre lignes qui passent par lui. Pour représenter graphiquement un tétraèdre on peut prendre un triangle et poser auprès de chaque côté son indication et près des sommets l'indication du segment qui en part. Ainsi pour représenter le tétraèdre

$$(a_1 a_2 a_3)(a_2 a_5 a_6)(a_1 a_4 a_6)(a_3 a_4 a_5),$$

on pourra faire usage du symbole



Le tétraèdre symétrique sera alors



Avec la figure dont nous avons parlé nous avons dans chaque cas particulier le nombre des tétraèdres construisibles avec les segments particuliers donnés. En effet, considérons combien des 20 triangles $(a_\alpha a_\beta a_\gamma)$ sont impossibles, en observant combien de ces inégalités sont satisfaites :

$$a_6 \geqq a_1 + a_2, \quad a_6 \geqq a_1 + a_3, \quad a_6 \geqq a_2 + a_3,$$
$$a_5 \geqq a_1 + a_2, \quad a_5 \geqq a_1 + a_3, \quad a_5 \geqq a_2 + a_3,$$
$$a_4 \geqq a_1 + a_2, \quad a_4 \geqq a_1 + a_3, \quad a_4 \geqq a_2 + a_3,$$
$$a_3 \geqq a_1 + a_2;$$

$$a_6 \geqq a_1 + a_4, \quad a_6 \geqq a_2 + a_4, \quad a_6 \geqq a_3 + a_4, \quad a_6 \geqq a_1 + a_5,$$
$$a_5 \geqq a_1 + a_4, \quad a_5 \geqq a_2 + a_4, \quad a_5 \geqq a_3 + a_4, \quad a_6 \geqq a_2 + a_5,$$
$$a_6 \geqq a_3 + a_5,$$
$$a_6 \geqq a_4 + a_5.$$

Les inégalités satisfaites correspondent à des faces qui ne peuvent pas exister dans les tétraèdres.

Pour voir le nombre des tétraèdres construisibles, il faut alors suivre dans la figure les lignes correspondantes à ces faces et signaler tous les tétraèdres par où elles passent.

Soit n le nombre des tétraèdres ainsi signalés dans les deux parties de la figure en considérant une seule fois les A, B, ..., F, si même ils ont été signalés dans les deux moitiés de la figure.

Alors le nombre des tétraèdres non superposables que l'on peut construire au maximum est

$$2(30 - n),$$

en considérant aussi les symétriques.

Par exemple, soient

$$a_1 = 10, \quad a_2 = 12, \quad a_3 = 14,$$
$$a_4 = 16, \quad a_5 = 24, \quad a_6 = 25.$$

Les triangles

$$(a_1 a_2 a_6),\quad (a_1 a_2 a_5),\quad (a_1 a_3 a_6),\quad (a_1 a_3 a_5)$$

sont impossibles.

Dans ce cas on doit signaler 20 tétraèdres, et le nombre de ceux construisibles est de

$$2(30 - 20) = 20,$$

deux à deux symétriques. F. DE HELGUERO (Rome).

691. (**1895**, 417; **1904**, 235) (BRICARD). — *Résidus quadratiques.* — Ces théorèmes sont énoncés dans la *Niedere Zahlentheorie* de M. BACHMANN, page 302 et suivantes. N. PLAKHOWO (Russie).

962. (**1897**, 3) (*Bettebar*). — *Bibliographie de la division de l'angle en n parties égales* (**1898**, 95). — Plusieurs des réponses aux questions **2168** (**1901**, 304; **1904**, IX, XIII) et **2733** (**1994**, 135) répondent aussi à cette question.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

1208. (**1898**, 5) (G. DE ROCQUIGNY). — *Tables de diviseurs premiers* (**1898**, 144; **1900**, 132). — *Voir* ma réponse aux questions **191** (**1905**, 29) et **2667** (**1905**, 45). E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

1271. (**1898**, 80) (*Martin*). — *Bibliographie des fractions continues périodiques* (**1898**, 215; **1899**, 16, 252). — La bibliographie du sujet est étendue. Je ne vais indiquer que les écrits les plus importants relatifs aux fractions continues périodiques :

J.-L. LAGRANGE, *Traité de la résolution des Équations numériques de tous les degrés* (1826), Chap. VI, art. I et II, p. 47-73 (*Œuvres*, t. VIII, p. 73-101); *Additions au Mémoire sur la résolution des équations numériques*, § II (*Œuvres*, t. II, p. 593-622, ou *Mém. de l'Acad. de Berlin*, t. XXIV, 1770). — M.-A. STERN (*Cr.*, t. 11, 1834, p. 326; t. 53, 1857, p. 1-102; *A. G. G.*, t. XII, 1864). — A.-J. MÖBIUS (*Werke*, t. IV, p. 506, 526). — C. RAMUS (*Cr.*, t. 20, 1840, p. 13). — ARENDT (*Cr.*, t. 31, 1841, p. 343). — G. BIANCHI (*Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze*, residente in Modena, t. XXIII, 1846, p. 219. — SEELING (*A. Gr.*, t. XLIX, 1868, p. 4-44; t. L, 1869, p. 232. —

M. Charnes (*B. D.*, t. XII, 1877, p. 41). — P. Appell (*A. Gr.*, t. LXII, 1878, p. 183). — K.-E. Hoffmann (*A. Gr.*, t. LXII, 1878, p. 310; t. LXIV, p. 1; t. LXIX, p. 205). — S. Roberts (*P. L. M. S.*, t. X, 1879, p. 29). — Hermes (*A. Gr.*, t. LXIII, 1879, p. 438). — H.-J.-S. Smith, *De fractionibus quibusdam continuis* (*C. M.*, 1881, ou *Mathematical Papers*, Vol. II, p. 287). — H.-J.-S. Smith, *Report on the theory of numbers*, Part III, art. 96 and 123 (*R. B. A.*, 1861, p. 313 ou *Mathematical Papers*, Vol. I). — C.-F. Kausler (*A. P. M.*, t. II, 1810, p. 95-123). — James Ivory (*T. R. S. E.*, t. V, 1823, Part III, p. 20). — J.-A. Serret (*J. M.*, t. XII, 1847, p. 518). — A. Göpel (*Cr.*, t. 45, 1853, p. 1). — C.-G.-J. Jacobi (*Cr.*, t. 35, 1847, p. 313, ou *J. M.*, t. XV, 1850, p. 357). — V.-A. Lebesgue (*Bull. Ferussac*, t. XV, 1831, p. 156). — H. Siebeck (*Cr.*, t. 33, 1846, p. 68). — E. Catalan (*N. A.*, t. XIX, 1849, p. 154). — E. Kahl (*A. Gr.*, t. XIX, 1852, p. 158). — L. Œttinger (*Cr*, t. 49, 1855, p. 66, 95). — S. Günther (*Z. S.*, t. XXII, 1877, p. 30; *A. Gr.*, t. LV, 1873, p. 392); *Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form* (Erlangen, 1873). — C. Hermite (*B. D.*, t. XX, 1885, p. 11). — T. Muir (*P. R. S. E.*, t. XII, 1885, p. 389, 578; t. XVII, 1889, p. 14). — E. de Jonquières (*C. R.*, t. XCVI, 1883, p. 558, 694, 832, 1020, 1129, 1210, 1297, 1351, 1420, 1490, 1571, 1721). — P. Mansion (*M.*, t. VI, 1886, p. 80). — J.-J. Sylvester (*M. M.*, 2e série, t. XIX, 1889, p. 63). — A. Hurwitz (*A. M.*, t. XII, 1889, p. 367). — W.-P. Ermakoff [*Kiew Zeitschrift für Phys. und Math.* (en russe), t. II, 1887, p. 61]. — D.-F. Selivanow [*Mosk. Math. Sammlung* (en russe), t. XV, 1891, p. 635]. — B. Krause (*Z. H.*, t. XX, 1889, p. 88). — W. Veltmann (*Z. S.*, t. XXXII, 1887, p. 210). — E. Bortolotti (*R. C. M. P.*, t. IX, 1895, p. 136). — G. Musso (*N. A.*, 3e série, t. XIV, 1894, p. 70; *G. B.*, t. XXXIII, 1894, p. 1). — L. Crelier (*C. R.*, t. CXXVIII. 1899, p. 229; *Arch. sc. phys.*, 4e série, t. VI, 1898, p. 366; *E. M.*, t. III, 1901, p. 339). — D.-N. Lehmer (*A. of M.*, 2e série, t. II, 1901, p. 146). — G. Galucci (*P. M. R.*, 2e série, t. IV, 1901, p. 90). — P. Cattaneo (*P. M. R.*, 2e série, t. II, 1900, p. 217). — E. Ducci (*P. M. R.*, t. XIV, 1899, p. 249). — D. Fellini (*P. M. R.*, t. XIV, 1899, p. 143).

Voir encore : *Encyklopädie der Math. Wiss.*, Bd. I, p. 130, 599. — E. Wölffing, *Mathematischer Bücherschatz* (Leipzig, 1903).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

1286. (**1898**, 123) (EDM. FRANCKEN). — *Bibliographie de la théorie du billard* (**1900**, 133). — *Voir* réponse à la question **2736** (**1904**, 42, 179; **1905**, 46). E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

1522. (**1899**, 128) (MEHMED EMINE). — *Étude comparative des fractions continues additives et subtractives.* — Références bibliographiques :

M.-A. STERN, *Ueber die Eigenschaften der periodischen negativen Kettenbrüche, welche die Quadratwursel aus einer ganzen positiven Zahl darstellen* (*A. G. G.*, t. XII, 1864-1866). — J.-L. LAGRANGE, *Additions à l'Algèbre d'Euler,* Chap. VIII, § 87. — A.-F. MOEBIUS (*Cr.*, t. 6, 1830, p. 215 ou *Werke*, t. IV. p. 503). — B. MINNIGERODE, *Ueber eine neue Methode die Pell'sche Gleichung aufzulösen* (*N. G. G.*, 1873, p. 619). — A. HURWITZ, *Ueber eine besondere Art der Kettenbruchentwickelung reeller Grössen* (*A. M.*, t. XII, p. 367). E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

1523. (**1899**, 129) (MEHMED EMINE). — *Théorème de fractions continues.* — La proposition est inexacte. Exemple pour

$$N = 4909.$$

Désignant les quotients complets par $\frac{A_n + \sqrt{N}}{D_n}$, je trouve que, parmi les D, le nombre 60 se présente 8 fois; le nombre 84, 6 fois; plusieurs autres 4 fois. Parmi les A le nombre 67 se présente 12 fois, le nombre 53, 10 fois; d'autres 8, 6, 4 ou 3 fois.

Peut-être l'auteur veut-il dire qu'il ne peut y avoir plus de deux dénominateurs consécutifs égaux. La seule exception, c'est quand $N = a^2 + 1$. On n'a pas plus de deux valeurs *consécutives* A égales, excepté quand N est d'une des deux formes

$$a^2k^2 + 2k \quad \text{ou} \quad a^2k^2 + k.$$

On le voit aisément par les relations

$$A_r = a_{r-1}D_{r-1} - A_{r-1}, \qquad D_r = a_{r-1}(A_{r-1} - A_r) + D_{r-2}$$

(*voir* LEGENDRE, *Théorie des nombres,* t. I, p. 51 et 83).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

1836. (**1900**, 157) (Cyp. Stephanos). — *Propriété des nombres.* — Il pourra être utile de consulter mon Mémoire du *J. M.*, 1904, p. 275-362, intitulé : *Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants,* t. VIII, p. 357-362. E. Maillet.

1986. (**1900**, 404 et 442) (Bricard, E. Maillet). — *Nombres transcendants et fractions continues.* — Il pourra être utile de consulter mon Mémoire du *J. M.*, 1904, p. 275-362, intitulé : *Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants,* t. VIII, p. 357-362.
E. Maillet.

2088. (**1901**, 131) (E. Maillet). — *Systèmes de numération.* — *Voir* mon Mémoire de *J. M.*, 1904, p. 275 et 362, intitulé : *Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants;* en particulier, § VIII, p. 357-362. E. Maillet.

2168. (**1901**, 221) (E.-B. Escott). — *Trisection de l'angle* (**1901**, 304; **1904**, IX mai, XIII juin). — Un correspondant m'a envoyé récemment, pour examen, un essai de solution (9 pages manuscrites et plusieurs épures) du problème de la trisection de l'angle par la règle et le compas. Je crois utile de rappeler à ce propos que cette solution est impossible. On trouvera par exemple une démonstration de ce résultat dans F. Klein, *Leçons sur certaines questions de Géométrie élém.* (réd. Griess), p. 23-25. Paris, Nony, 1896.
E. Maillet.

2208. (**1901**, 255) (J.-J. Duràn-Loriga). — *Sur les restes ou résidus quadratiques* (**1902**, 59, 168). — Je crois devoir signaler aux lecteurs de l'*Intermédiaire* le joli travail de M. M. Lerch : *Sur quelques applications des sommes de Gauss* (*A. D. M.*, t. XI, p. 79) qui donne une réponse à ma question **2208**.
J.-J. Duràn-Loriga (La Corogne).

2253. (**1902**, 2) (Carl Störmer). — *Nombres de la forme* $1+x^2$ *contenant des diviseurs premiers* $> 10^7$ (**1902**, 186; **1904**, 81). — D'après la Table donnée par C.-E. Bickmore (*N. A.*, 1896, p. 222),

$$10^{12}+1 = 73 \times 137 \times 99990001,$$
$$10^{14}+1 = 29 \times 101 \times 281 \times 121499449,$$
$$10^{18}+1 = 111 \times 9901 \times 999999000001,$$
$$10^{30}+1 = 61 \times 101 \times 3541 \times 9901 \times 27961 \times 4188901 \times 39526741.$$

Voici une méthode générale pour trouver tous les nombres de la forme $1+x^2$ qui sont divisibles par un nombre premier donné. Chaque facteur de $1+x^2$ est la somme de deux carrés. Mettons le nombre donné sous la forme a^2+b^2. Nous aurons

$$1+x^2=(a^2+b^2)(k^2+l^2)=(ak+bl)^2+(al-bk)^2,$$

puisque

$$(1) \qquad al-bk=\pm 1.$$

Si $\frac{a}{b}$ est mis sous forme de fraction continue et si $\frac{c}{d}$ est la réduite qui précède immédiatement $\frac{a}{b}$, on a

$$(2) \qquad ad-bc=\pm 1,$$

et la solution générale de (1) est

$$k=c+am, \qquad l=d+bm,$$

m étant entier.

Exemple. — M. Landry a montré que 15790321 est premier [*voir* réponse à la question (**1902**, 186)] :

$$15790321=3855^2+964^2=a^2+b^2;$$

on a les réduites

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{4}{1}, \quad \frac{3855}{964};$$

alors

$$k=3855m+4, \qquad l=964m+1,$$

$$(3855^2+964^2)[(3855m+4)^2+(964m+1)^2]$$
$$=(15790321m+16384)^2+1.$$

Si $m=0$, on a le premier exemple donné par M. Fauquembergue; si $m=-1$,

$$15790321\times 15757570=15773937^2+1.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2339. (**1902**, 114) (E. Maillet). — *Fonctions entières $f(z)$ telles que $f(1)$ soit rationnel.* — *Consulter* mon Mémoire du *J. M.*, 1904, p. 275-362, intitulé : *Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants;* en particulier, p. 301 et 317-318. E. Maillet.

2402. (**1902**, 205) (PETROVITCH). — *Formule d'Abel.* — Réponse de M. Plakhowo communiquée à M. Petrovitch.

LA RÉDACTION.

2464. (**1902**, 292) et **2465** (**1902**, 293) (*Rudis*). — *Fractions continues* (**1904**, 83). — *Voir* mon Mémoire du *J. M.*, 1904, p. 275-362, intitulé : *Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants,* § VIII, p. 357-362.

E. MAILLET.

2484. (**1902**, 317) (P.-F. TEILHET). — *Solutions de l'équation*

$$x^2+1=(y^2+1)(z^2+1)$$

(**1904**, 195). — La solution de cette question n'est pas donnée explicitement dans ma précédente réponse. La voici :

On a

$$(y^2+1)(z^2+1)=(yz\pm 1)^2+(y\mp z)^2;$$

l'équation peut donc être satisfaite en posant $z=y-1$. Si y^2+1 et z^2+1 sont tous deux des nombres premiers, c'est la seule solution.

La méthode suivante donnera d'autres solutions quand ces deux nombres ne sont pas tous deux premiers.

Étant donné le nombre a^2+1 on peut trouver un autre nombre de la forme p^2+q^2 qui, multiplié par a^2+1, donne un nombre de la forme x^2+1. Par la méthode indiquée précédemment (**1904**, 195), on voit que ce nombre est

$$(am+1)^2+m^2,$$

et l'on a

$$(a^2+1)[(am+1)^2+m^2]=(a^2m+a+m)^2+1.$$

Posons $(am+1)^2+m^2=z^2+1$. En simplifiant, on a

$$m[(a^2+1)m+2a]=z^2.$$

Soit δ un commun diviseur de m et $2a$, positif ou négatif; on peut avoir

$$m=\delta\alpha^2, \qquad (a^2+1)m+2a=\delta\beta^2,$$

ou, éliminant m,

$$\beta^2-(a^2+1)\alpha^2=\frac{2a}{\delta}.$$

Si (β_1, α_1) est une solution de cette équation, on peut déduire une infinité de solutions de la relation

$$\pm\beta = p\beta_1 \pm (a^2+1)q\alpha_1, \qquad \pm\alpha = q\beta_1 \pm p\alpha_1,$$

où (p, q) est une solution de l'équation de Fermat

$$p^2 - (a^2+1)q^2 = \pm 1.$$

Exemple. — Si $a = 2$,

$$\beta^2 - 5\alpha^2 = \pm 4:$$

β.	α.	m.	z.	x.	Solutions.
1	1	1	1	3	$3^2+1=(2^2+1)(1^2+1)$
3	1	-1	3	7	$7^2+1=(2^2+1)(3^2+1)$
7	3	9	21	47	$47^2+1=(2^2+1)(21^2+1)$
11	5	-25	55	123	$123^2+1=(2^2+1)(55^2+1)$
4	2	-4	8	18	$18^2+1=(2^2+1)(8^2+1)$
18	8	64	144	322	$322^2+1=(2^2+1)(144^2+1)$

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2509. (**1903**, 12) (E. Lemoine). — *Année attique* (**1903**, 175). — Il est actuellement impossible d'établir une correspondance effective entre le calendrier attique et le calendrier julien ou le grégorien.

Théoriquement, le calendrier attique était soumis aux deux conditions suivantes : 1° le jour des Athéniens commençant au soir, chaque mois aurait dû commencer au premier soir où une nouvelle Lune devenait visible (néoménie vraie); 2° l'année aurait dû commencer à la première néoménie vraie après le solstice d'été.

En pratique, au VIe et au Ve siècles avant notre ère, les Athéniens faisaient alternativement les mois pleins (de 30 jours) et caves (de 29). Lorsque le désaccord avec la Lune s'accentuait, ils y remédiaient en intercalant des jours supplémentaires, très probablement sans règles fixes. Il est probable que cette intercalation se faisait en transformant en mois cave un mois plein; mais nous ignorons même si régulièrement tel mois attique devait être plein ou cave. Quant à l'accord avec le Soleil, les Athéniens paraissent avoir suivi une période de huit ans (octaétéride) d'après laquelle ils intercalaient un mois (entre le sixième et le septième de leur année) chaque

troisième, sixième et huitième année de cette période. Quand le désaccord apparaissait, ils supprimaient une intercalation, cela également sans règles fixes.

En 432, Méton proposa sa période de dix-neuf ans; mais on ignore comment il répartissait, dans cette période, soit les mois intercalaires, soit les jours intercalaires. On ne sait pas davantage si ou quand les Athéniens adoptèrent réellement le cycle de Méton au lieu de l'octaétéride, ni comment ils se comportèrent pour leur calendrier après la réforme de Callippe, en 336.

Dès lors, il y a en général pour toute date du calendrier attique une incertitude d'un mois lunaire (ignorance sur le degré de concordance avec le Soleil), plus une incertitude de quelques jours (ignorance sur le degré d'accord avec la Lune). Pour trois ou quatre dates seulement de ce calendrier attique, il y a une correspondance exactement établie avec le calendrier julien (d'après des éclipses et des témoignages fournis par Ptolémée). De plus, d'après certaines inscriptions relatives à des calculs d'intérêt ou à la durée des prytanies (1), on peut déterminer si certaines années ont été effectivement intercalaires, et parfois de combien de jours exactement telle année a été composée. Mais les données ainsi réunies sont tout à fait insuffisantes pour établir une concordance rigoureuse, même pour une courte période.

Il faut ajouter qu'un grand nombre de dates, pour les temps d'Alexandre et de ses successeurs, quoique données en style attique par les auteurs anciens, sont en réalité des dates du calendrier macédonien, qui était lunisolaire comme celui des Athéniens, mais dans lequel les intercalations se faisaient autrement, en sorte que tel mois macédonien peut, suivant les années, correspondre à tel mois attique, au précédent ou au suivant. Les auteurs qui nous ont transmis les dates en question, ayant suivi des correspondances fixes, mais différentes entre les mois attiques et les mois macédoniens, ont ajouté de nouvelles certitudes chronologiques à celles qu'offrait par lui-même le calendrier attique.

Enfin, les Byzantins, à partir du XIIIe siècle, se sont avisés de reprendre les noms des mois attiques, dont ils ne savaient même plus

---

(1) L'année était divisée en dix prytanies, dont la durée était, autant que possible, égalisée; pendant chacune d'elles, les magistrats, appelés prytanes, étaient tirés d'une tribu déterminée.

sûrement l'ordre. Mais alors ces noms de mois attiques désignent simplement des mois romains (par exemple, hécatombéon, premier mois attique = janvier), et cela d'après des systèmes différents suivant les différents auteurs. Des dates de ce genre se retrouvent jusque dans les souscriptions de manuscrits du XVI[e] siècle.

En résumé, il n'y a actuellement rien à faire pour l'établissement d'une correspondance générale et exacte entre le calendrier attique et le calendrier julien. Toute tentative dans ce sens ne ferait qu'augmenter la confusion comme il arrive toutes les fois qu'on pose comme certain ou suffisamment approché ce qui est tout à fait incertain.

Paul Tannery.

Tous les éléments nécessaires pour transformer une date donnée par les historiens grecs dans une exprimée par notre procédé ordinaire sont exposés très clairement dans la III[e] Section du *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie* de L. Ideler (2[e] éd., t. I, p. 227-392, Breslau, 1883). Je me borne à en extraire le passage suivant :

« 1° Pour trouver l'année de l'ère vulgaire avec l'été duquel commence une année olympique donnée, on diminue d'une unité le nombre des olympiades, on multiplie le reste par 4, on ajoute au produit le nombre de l'année considérée et l'on retranche la somme, si elle est $\leqq 776$, de 777 ; le reste est l'année correspondante *avant* Jésus-Christ. Mais si cette somme > 776, on la diminue de 776 et l'on arrive à l'année que l'on cherche *après* Jésus-Christ.

» 2° Pour trouver l'année olympique qui commence pendant une année donnée avant Jésus-Christ (naturellement > 776) on retranche ce nombre de 777 et l'on divise le reste par 4. Le quotient, augmenté de 1, donne l'olympiade cherchée et le reste l'année courante; lorsque ce reste est = 0 l'année courante est la quatrième de l'olympiade indiquée par le quotient.

» 3° Pour trouver l'année olympique qui commence dans une année donnée après Christ, on ajoute 776 et l'on continue comme auparavant. »

Quant aux Tables que M. Lemoine désire, et qui seraient certainement très utiles, je ne crois pas qu'on les ait construites, mais il serait bien facile de les dresser en appliquant les règles données par Ideler.

G. Loria (Gênes).

La réponse à cette question résultera du rapprochement de différents Ouvrages, parmi lesquels, surtout, le *Trésor de Chronologie* de Mas Latrie, le *Dictionnaire des Antiquités grecques et romaines,* de C. Daremberg et E. Saglio (aux mots *Calendarium* et *Chronographia*), et la *Grande Encyclopédie* (au mot *Olympiade*).

La combinaison de ces articles donnera les matériaux d'un résumé qui pourrait très utilement prendre place dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes.* Il suffirait sans doute d'appeler l'attention du Bureau à ce sujet.

Voici quelques indications plus spéciales à la question **2509**.

Le Tableau de concordance a été donné dans la *Grande Encyclopédie,* d'après les formules, très simples d'ailleurs, de M. S. Reinach.

1° *Date antérieure à J.-C.* — Soient n le nombre des olympiades, p le chiffre additionnel (1re, 2e, 3e, 4e année de la $n^{\text{ième}}$ olympiade). On aura

$$776-[(n-1)4+p-1].$$

2° *Date postérieure à J.-C.* — On aura

$$(n-1)4+p-776.$$

La concordance détaillée est indiquée par Mas Latrie, de la 195e olympiade, I (an 1 de J.-C.) à la 294e, IV (an 400).

La description des mois et de l'année du calendrier athénien est donnée avec de très grands développements dans le *Dictionnaire* susmentionné (*loc. cit.*). H. Brocard.

2512. (**1903**, 34) (A. Werebrusow). — *Limite de x et y quand x^3-y^2 est limité* (**1903**, 283, 316; **1904**, 152). — La solution des équations de la forme $x^2-a=y^3$ peut être indiquée sur un exemple.

Soit à trouver toutes les solutions de

$$(1)\qquad x^2-17=y^3.$$

Il n'y a qu'une classe de formes quadratiques proprement primitives de déterminant 17; par suite, chaque facteur premier impair de y doit être de la forme a^2-17b^2. On a, par la formule d'Euler

$$(2)\quad (k^2-17l^2)(m^2-17n^2)=(km\pm 17ln)^2-17(kn\pm lm)^2,$$

la relation

$$(3)\qquad (a^3+51ab^2)^2-17(3a^2b+17b^3)^2=(a^2-17b^2)^3.$$

Toutes les solutions de (1) peuvent être déduites de (3) par combinaison avec les équations de la forme

$$(4)\qquad x^2-17z^2=y^3$$

non contenues dans (3). Ce sont celles où $y^3=\pm 1,\ \pm 8,\ \pm 64$, à savoir :

$4^2-17.1^2=-1$,	$235^2-17.57^2=-8$,	$161^2-17.39^2=4^3$,
$33^2-17.8^2=1$,	$5^2-17.1^2=8$,	$433^2-17.105^2=+4^3$,
$3^2-17.1^2=-8$,	$29^2-17.7^2=8$,	$19^2-17.5^2=-4^3$,
$37^2-17.9^2=-8$,	$9^2-17.1^2=4^3$,	$53^2-17.13^2=-4^3$.

Par exemple, combinons (3) avec $3^2-17.1^2=-8$ par la formule (2), on aura

$$(5)\qquad \begin{cases}(3x^3-51x^2y+153xy^2-289y^3)^2\\ \quad -17(x^3-9x^2y+51xy^2-51y^3)^2=(34y^2-2x^2)^3.\end{cases}$$

Soit

$$(6)\qquad x^3-9x^2y+51xy^2-51y^3=\pm 1.$$

On peut trouver des valeurs de x et y satisfaisant à cette équation si l'on a une solution, en cherchant une valeur approchée de la racine de l'équation

$$(7)\qquad x^3-9x^2y+51xy^2-51y^3=0,$$

soit

$$\frac{x}{y}=1,230785478\ldots,$$

qui, développée en fraction continue. donne

$$\frac{x}{y}=(1,4,3,362,3.27,1,1.4,13.\ldots).$$

Les réduites de cette fraction continue qui précèdent immédiate-

ment un fort quotient comme 362 seront les valeurs les plus probables de $\frac{x}{y}$ à choisir comme solutions à essayer pour (6). Les réduites sont

$$\frac{1}{1},\quad \frac{5}{4},\quad \frac{16}{13},\quad \frac{5797}{4710},\quad \dots$$

Posant $x = 16$, $y = 13$ dans (5), on a l'équation

$$378661^2 - 17.1^2 = 5234^3,$$

donnée par M. Werebrusow.

On peut trouver les autres solutions de la même manière.

E.-B. Escott (Ann Arbor).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2663. (**1903**, 255) (G. de Longchamps). — *Nombre* π (**1903**, 325 : **1904**, 62, 119, 291). — Réponse de M. Plakhowo (Russie) communiquée à M. G. de Longchamps. M. Plakhowo indique, d'après M. Thornenko, les formules

$$\pi = 2 + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3} - 0{,}116\right)^2} = 3{,}141592650$$

(8 décimales exactes), et

$$\pi = \sqrt{9 + (\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 1)^2}$$

(erreur $\leqq 2 \times 10^{-5}$).

La Rédaction.

2667. (**1903**, 257) (V. Aubry). — *Tables de facteurs des nombres* (**1903**, 328 ; **1904**, 103). — *Voir* mes réponses aux questions **1208** (**1905**, 34) et **191** (**1905**, 29).

Dans l'article de M. Davis [*Les nombres premiers de* 100000001 à 100001699 (*J. M.*, 2e série, t. XI, 1866, p. 188-190)] il y a une liste des nombres premiers et des facteurs des nombres composés dans l'intervalle.

J.-P. Gram [*Rapport sur quelques calculs entrepris par M. Bertelsen et concernant les nombres premiers* (*A. M.*, t. XVII, 1893, p. 301-314)] donne une liste d'erreurs dans les Tables de facteurs de Burckhardt, Glaisher, Dase et Rosenberg.

Voici les nombres des erreurs dans chaque million :

Millions....	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Erreurs.....	1	23	15	1	2	0	0	40	59

E. B. ESCOTT (Ann Arbor).
[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

2682. (**1903**, 277) (*Nobel*). — (**1904**, 243). — *Voir* encore :

MALENGREAU, *Caractères de divisibilité par un nombre quelconque* (*M.*, 1901, p. 197), Bruxelles. — GINO LORIA, *Caractères de divisibilité par un nombre entier quelconque* (*M.*, 1902, p. 33). — N. PLAKHOWO, *Théorie de la divisibilité* (d'après Bougaïew) (*B. M. E.*, 15 mai 1899, p. 241). — E. LEBON, *Généralisation d'un théorème de divisibilité* (*B. M. E.*, 15 juillet 1901).

N. PLAKHOWO (Russie).

2736. (**1904**, 42) (G. GILLET). — *Bibliographie mathématique du jeu de billard* (**1904**, 179). — Cette question est identique à la question **1286** (**1898**, 123; **1900**, 133; **1905**, 36).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

2760. (**1904**, 90) (EDMOND BORDAGE). — Les quantités désignées par M. Bordage sous le nom de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (*voir* **1904**, 90) ne sont pas nécessairement toujours de plus en plus petites. Elles finissent bien par le devenir, mais, comme on peut démontrer qu'elles commencent d'abord par croître, il est intéressant de chercher à partir de quel rang elles cessent de croître pour diminuer toujours ensuite.

Dans ce but, en nous reportant aux deux figures employées par l'auteur dans sa question, nous poserons

$$\mathrm{AC} = a, \qquad \mathrm{AB} = b, \qquad \mathrm{AD} = x$$

et

$$\widehat{\mathrm{BAC}} = \mathrm{A}.$$

La quantité $\mathrm{H}h = \lambda_x$ a pour expression

$$\lambda_x = \text{arc tang}\left(\frac{\tan x}{\cos \mathrm{A}}\right) - \frac{ax}{b}$$

ou

$$\lambda_x = \frac{ax}{b} - \text{arc th}\left(\frac{\text{th}\, x}{\cos \mathrm{A}}\right),$$

suivant que l'on raisonne en Géométrie riemanienne ou en Géométrie lobatchefskienne.

Donc

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{(1 + \operatorname{tang}^2 x)\cos A}{\cos^2 A + \operatorname{tang}^2 x} - \frac{a}{b}$$

ou

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{a}{b} - \frac{(1 - \operatorname{th}^2 x)\cos A}{\cos A - \operatorname{th}^2 x}.$$

Dans les deux cas, $\frac{d\lambda}{dx}$ est positif pour $x = 0$, négatif pour $x = b$, et s'annule une seule fois dans l'intervalle pour

$$\operatorname{tang} x = \sqrt{\frac{(b - a\cos A)\cos A}{a - b\cos A}}$$

ou

$$\operatorname{th} x = \sqrt{\frac{(a\cos A - b)\cos A}{a - b\cos A}};$$

les valeurs de x données par ces deux formules sont toujours acceptables, puisqu'on sait que b est supérieur ou inférieur à $a\cos A$ suivant l'espèce de Géométrie.

Soit MN la perpendiculaire à AB qui correspond à l'une d'elles : les longueurs Hh, Ii, ... qui sont comprises entre le point A et la droite MN vont en croissant, tandis que toutes celles qui suivent sont décroissantes jusqu'à zéro. P. Barbarin.

2767. (**1904**, 94) (J. Jan). — *Cylindroïde* (**1904**, 207). — Extrait d'une Lettre de M. Haag :

« Peut-être vous serait-il intéressant de savoir à ce sujet que dans mon Cours de l'École Polytechnique (comme application de la théorie générale des surfaces), je consacre une leçon à l'étude spéciale du conoïde de Plücker. J'y donne des démonstrations géométriques très simples de plusieurs de ses propriétés, dont quelques-unes, je crois, nouvelles, telles que celles-ci :

» *Les lignes asymptotiques du conoïde se projettent suivant des lemniscates sur un plan perpendiculaire à son axe.*

» *Les asymptotes des indicatrices des surfaces parallèles aux points de ces surfaces situés sur une normale commune forment un conoïde de Plucker.* » P. Haag.

2820. (**1904**, 213) (E.-N. Barisien). — *Quadrilatère inscriptible* (**1904**, 274). — Le triangle PQR ayant pour sommets les trois dernières intersections des six droites de jonction de quatre points donnés A, B, C, D est autopolaire par rapport à toutes les coniques passant par les quatre points, et si l'une de ces coniques est un cercle, son centre coïncide avec l'orthocentre du triangle PQR : le cercle circonscrit à ce triangle et le cercle orthoptique du cercle $\widehat{ABCD}$ se coupent orthogonalement. Il est, par suite, impossible que le triangle PQR soit rectangle sans que le cercle $\widehat{ABCD}$ soit évanouissant (à moins de supposer l'un des sommets Q ou R rejeté à l'infini): encore les droites orthogonales $\overline{PQ}$ et $\overline{PR}$ sont-elles les positions limites des diagonales *intérieures* du quadrilatère évanouissant ABCD : le problème n'admet donc pas de solution.

Remarque. — J'appelle *quadrangle* la figure formée par quatre points, possédant six côtés ou droites de jonction des quatre points, et trois faux sommets (c'est la dénomination de Clebsch). C'est de cette figure que je m'occupe ici. E. Malo.

Autres réponses de MM. Hayashi (Tokio) et E. Weber (Liége) qui arrivent aux mêmes formules que M. H. Brocard. La Rédaction.

2831. (**1904**, 257) (H. Brocard). — *Hyperboloïde dont une des trois droites directrices est perpendiculaire aux deux autres.* — Passant au cône directeur rapporté à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad a > b,$$

on voit facilement que :

1° Si $c > a$, il n'a pas de génératrices réelles perpendiculaires à d'autres;

2° $b < c < a$, une partie limitée des génératrices est perpendiculaire à d'autres...;

3° $c < b$, toutes les génératrices sont perpendiculaires à d'autres.

Donc, quand la condition signalée est remplie, le plus grand axe (en valeur absolue) de l'hyperboloïde défini est un axe réel; les autres conséquences s'ensuivent. V. Aubry.

QUESTIONS.

2884. [Σ] M. G. Remoundos, à propos d'une Communication : *Sur quelques points de la théorie des nombres* (*C. R.*, 16 janvier 1905, p. 135), pose le problème suivant :

Est-il possible de généraliser le théorème de M. Lindemann (Sur l'impossibilité de $A_1 e^{\alpha_1} + \ldots + A_n e^{\alpha_n} = 0$, où $\alpha_1, \ldots, A_n$ sont des nombres algébriques) *de façon à obtenir une correspondance parfaite entre ce théorème et celui de M. Borel* (Sur l'impossibilité de

$$P_1(z) e^{H_1(z)} + \ldots + P_n(z) e^{H_n(z)} = 0,$$

où $P_1, \ldots, H_n$ sont des fonctions entières satisfaisant à des conditions convenables) *pris dans sa forme la plus générale?*

M. G. Remoundos ajoute qu'il en résulterait (probablement) un classement des nombres transcendants analogue à celui des fonctions entières (d'ordre >0 bien entendu).

En signalant ce vaste et difficile sujet d'études, je mentionnerai qu'une des premières choses à faire serait de résoudre la question **2718** (**1904**, 9) qui y rentre ou s'y rattache comme cas particulier et dont la solution, d'ailleurs, conduirait vraisemblablement, pour le lecteur au courant des travaux d'Hermite et de MM. Lindemann, Hilbert, etc., à une généralisation de ceux-ci [*comp.* encore **1960** (**1900**, 357)].

On trouvera d'autre part un certain nombre de sujets d'études susceptibles de généralisation et relatifs à la clas-

sification des nombres transcendants dans mon Mémoire du *J. M.*, 1904, p. 347 et 355, intitulé : *Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants.*

Exemples :

I. *Soit* $F(x)$ *une fonction entière appartenant à un certain ensemble* E *de fonctions entières* (défini p. 304) *et d'indice* $k \geqq 3$; $F(x)$ *a-t-il une racine algébrique ou qui soit un nombre transcendant d'indice* $k_1 \geqq 3$?

II. $F[F(x)]$ *est transcendant pour* x *rationnel;* $F[F(F)]$, ... *sont-ils transcendants?*

Voir encore p. 356-357. E. Maillet.

2885. [L^1 15a] On sait qu'étant donnée l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

l'aire de la podaire de l'ellipse par rapport au point (α, β) est

$$U = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2).$$

Je voudrais avoir, dans les mêmes conditions, l'aire de la podaire de l'hyperbole

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

E.-N. Barisien.

2886. [K5d] Je désire connaître le maximum suivant :

« Étant donné un triangle ABC, on joint un point M du cercle circonscrit à ce triangle à chacun des sommets.

» Les droites MA, MB, MC rencontrent les côtés BC, CA, AB respectivement en A′, B′, C′. Où doit être placé le point M pour que l'aire du triangle A′B′C′ soit maxima ou minima? » E.-N. Barisien.

2887. [K8b] Il paraît manifeste que, dans tout quadrilatère complet inscriptible, la longueur de la diagonale exté-

rieure est plus grande que la somme des deux diagonales intérieures.

J'en voudrais une démonstration géométrique rigoureuse.

Cette question m'a été suggérée par la réponse (**1902**, 180) de M. H. Brocard à ma question **2112**. *Crut.*

2888. [**R7**] On doit à Halphen ce résultat que, si l'accélération d'un point mobile ne dépend que des données de ce point, les trajectoires (en nombre cinq fois infini) du point mobile *ne peuvent être toutes des courbes planes que dans le cas de forces centrales ou parallèles.*

Je demande maintenant quelles doivent être les fonctions f_1, f_2, f_3 pour que les courbes planes

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ Af_1 + Bf_2 + Cf_3 &= 0 \end{aligned}$$

soient comprises (quelles que soient les constantes A, B, C, D) parmi les trajectoires d'un point mobile (x, y, z) dont l'accélération est donnée par les formules

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1(x, y, z),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f_2(x, y, z),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = f_3(x, y, z).$$

Cyp. Stéphanos (Athènes).

2889. [**B10**] On lit dans un Mémoire de E. Lucas de *N. C.*, 1878 :

« M. Genocchi a donné ce théorème :

» *Si* F. F_1 *désignent deux formes quadratiques contenant les carrés de* 2^n *variables et dont les coefficients sont les termes du développement du produit*

$$(1 + p_1)(1 + p_2)\ldots(1 + p_n),$$

le produit $\Phi = F.F_1$ *est une forme semblable.* »

Quelque correspondant connaîtrait-il l'expression de Φ mise sous cette forme et donnée par M. Genocchi?

[*Comp.* rép. à **1459** (**1900**, 21).] J. SADIER.

2890. [**P5** et Σ] Dans une Communication à l'Académie des Sciences de Paris du 13 mars 1905, intitulée : *Des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution,* M. G. Darboux dit :

« On n'a pu encore déterminer toutes les surfaces algébriques applicables sur le paraboloïde de révolution. La solution de ce problème dépend, comme on sait, de la recherche des courbes algébriques à torsion constante. Malgré les efforts d'un grand nombre de géomètres, cette question, aussi intéressante au point de vue analytique qu'au point de vue géométrique, n'a pu être encore entièrement résolue. »

E. MAILLET.

2891. [Σ] On trouvera ci-après (**1905**, 59), dans ma réponse à **2819**, l'indication de sujets d'études élémentaires relatifs à des quadrilatères remarquables.

G. DE LONGCHAMPS.

2892. [**S2e**α] Je désirerais quelques renseignements sur les résultats obtenus dans le récent concours d'aviation qui vient d'avoir lieu à Paris, en particulier sur la forme des trajectoires, le temps de chute des appareils, les conditions initiales, la forme schématique des aviateurs, etc. Ainsi, d'après M. Brillouin (*Comptes rendus,* 27 février 1905), « un même planeur lancé à diverses reprises a suivi tantôt une trajectoire presque rectiligne, tantôt une hélice de court rayon. » Y a-t-il eu d'autres trajectoires remarquables pour certaines machines volantes? *Matito.*

2893. [**V9** et **10**] Bibliographie des écrits mathématiques récents (depuis dix ans au plus) relatifs à l'aviation.

Matito.

RÉPONSES.

167. (**1894**, 92; **1899**, 167) (HURWITZ). — *Surfaces de Riemann et substitutions.* — On peut consulter à ce sujet un article de M. Netto [*Ueber die Zusammensetzung von Substitutionen aus den Transpositionen* (*M. A.*, t. LVI, p. 482)] dont on trouvera une analyse sommaire dans *J. B.*, t. XXXIII (pour 1902), Heft I, p. 143.

E. MAILLET.

658. (**1895**, 317; **1904**, 210) (W.-W. BEMAN). — *Sectio aurea.* — Ceux qui ont fait une étude spéciale sur la *sectio aurea,* comme Zeising, Pfeifer et Sonnenburg, ne semblent pas savoir qui a remplacé l'expression *sectio divina* par *sectio aurea.* Ce doit être après Keppler, qui a comparé non la *sectio divina,* mais le théorème de Pythagore, à une masse d'or. Sonnenburg (*Der goldne Schnitt,* Bonn, 1881) dit seulement que l'expression *sectio aurea* s'est introduite dans les livres élémentaires vers le milieu du XIX[e] siècle.

N. QUINT (La Haye).

1837. (**1900**, 157) (E. MAILLET). — *Groupes de substitutions.* — On pourra consulter à ce sujet mon Mémoire *Sur les équations de la Géométrie* (*Ann. Fac. Sc. Toulouse,* 1904), p. 299 et suiv.

E. MAILLET.

2571. (**1903**, 102) (*Rudis*). — *Solutions de l'équation*

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

(**1903**, 224, 319; **1904**, 156, 242). — Ma critique de la réponse de M. Werebrusow (**1904**, 156) est correcte. Je renvoie M. Werebrusow à LEJEUNE-DIRICHLET, *Zahlentheorie* (§ 46, p. 104) au sujet des propriétés du symbole de Jacobi $\left(\frac{m}{P}\right)$.

Dans la dernière réponse de M. Werebrusow (**1904**, 242), il y a

des erreurs :

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) = +1,$$

que a^2+b^2 soit premier ou un nombre composé impair;

$$\left(\frac{5}{221}\right) = \left(\frac{11}{221}\right) = +1 \quad \text{et non} \quad -1.$$

Il semble que M. Werebrusow admet comme exact que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$x^2 - Dy^2 = -1 \qquad (D = a^2+b^2)$$

ait une solution, est que a ou b soit un résidu quadratique de D. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante.

Exemple. — L'équation

$$x^2 - 2306y^2 = -1$$

n'a pas de solution; $2306 = 41^2 + 25^2$, et 41 et 25 sont tous deux résidus quadratiques de 2306, puisque

$$615^2 \equiv 41 \pmod{2306} \quad \text{et} \quad 5^2 \equiv 25 \pmod{2306},$$

ce qui ne serait pas d'accord avec le théorème de M. Werebrusow.

Sa dernière règle, que la solution est impossible quand $D = 2A$, $A = 8n + 5$, est le second théorème donné par Lejeune-Dirichlet (**1904**, 157).

Références bibliographiques additionnelles :

C. Richaud, *Sur l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$* (*J. M.*, 2e série, t. IX, 1864, p. 384; 2e série, t. X, 1865, p. 235; 2e série, t. XI, 1866, p. 145; *N. L. A.*, t. XIX, 1866, p. 177). — P. Seeling (*A. Gr.*, t. LII, 1871, p. 40). — F. Tano, *Sur quelques théorèmes de Dirichlet* (*Cr.*, t. 105, 1889, p. 160). E.-B. Escott (Ann Arbor).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

Sera-t-il permis à un ignorant (*Rudis*) de faire quelques réflexions au sujet des réponses provoquées par sa question n° **2371**, et notamment au sujet de celle due à M. Werebrusow (**1904**, 242)? Je tombe d'accord avec lui et avec M. Teilhet, dont la réponse simplement mentionnée (**1903**, 319), mais qui m'a été communiquée, n'est pas

substantiellement différente, que l'équation

$$x^2 - \Delta y^2 = -1$$

n'est possible en nombres entiers qu'à condition non seulement que Δ soit décomposable en deux carrés positifs, mais encore que parmi les racines de ces carrés l'une au moins soit résidu quadratique relativement au module Δ. Cette condition, en tant que *nécessaire*, n'était pas d'ailleurs inconnue de moi au moment où j'ai posé la question **2571**; mais, ce que j'ai lieu de croire, quoique cela ne me paraisse pas complètement établi par la réponse de M. Werebrusow, cette condition est-elle suffisante? Dire que a est résidu quadratique de $\Delta = (a^2 + b^2)$, c'est supposer l'égalité

$$a = w^2 - (a^2 + b^2)t,$$

et il faut d'abord établir que cela a lieu pour des valeurs de t qui sont des carrés parfaits v^2; en second lieu il faut montrer que l'entier $w + bv$ est un multiple de a. Or j'ai bien un commencement d'orientation pour la démonstration de ces deux points, mais rien de plus, et je ne vois pas que cette démonstration résulte de la réponse de M. Werebrusow.

Un autre endroit de cette réponse, demeuré un peu obscure pour moi, est celui où il est dit :

« Il est remarquable que cette proposition si simple restait inconnue jusqu'ici : l'équation $x^2 - \Delta y^2 = -1$ a des solutions si, au milieu de la moitié de la période des formes réduites, il y a une forme $(a, b, -a)$, c'est-à-dire

$$\Delta = a^2 + b^2,$$

où a est un résidu quadratique (mod Δ). »

M. *Besouclein*, dans sa réponse (**1903**, 224), renvoie à Serret (*Algèbre supérieure*, t. I, p. 84) et rappelle qu'il s'agit uniquement de vérifier que le développement de $\sqrt{\Delta}$ en fraction continue comporte une période *impaire;* d'autre part l'hypothèse même d'une période impaire implique directement qu'il y ait au milieu du groupe des équations, déduites de $z^2 - \Delta = 0$ suivant la méthode de Lagrange, une équation de la forme

$$az^2 - 2bz - a = 0,$$

où a, nécessairement, est un résidu quadratique de Δ. Ce qu'il peut y avoir de nouveau c'est exclusivement la réciproque :

Si l'on peut assigner une décomposition $\Delta = a^2 + b^2$ *dans laquelle le nombre a soit résidu quadratique de* Δ, *la période du développement de* $\sqrt{\Delta}$ *en fraction continue est impaire.*

A cet égard je répéterai que je n'en trouve pas la preuve péremptoire dans la réponse de M. Werebrusow.

Quelques remarques encore. Un énoncé équivalent à celui de M. *Besouclein* est le suivant :

L'équation $x^2 - \Delta y^2 = -1$ *admet des solutions entières si les développements en fraction continue de* $\sqrt{\Delta}$ *et de* $\sqrt{\frac{A}{C}}$, *où l'on suppose* $AC = \Delta$, $A > C$, *sont distincts; elle n'en admet pas si ces développements rentrent deux à deux l'un dans l'autre.*

Cette proposition, peut-être nouvelle, n'est pas sans intérêt; mais manifestement elle ne constitue qu'un criterium bien inférieur à l'autre, car elle comporte la comparaison de plusieurs développements, tandis qu'un seul intervient dans le criterium de Serret.

Si donc la condition

$$a \equiv X^2 \qquad (\text{mod}\; \overline{a^2 + b^2})$$

doit être regardée comme suffisante aussi bien que nécessaire, il y aurait encore lieu de comparer ce criterium à celui de Serret. Dans certains cas il aurait sûrement l'avantage. Ainsi, dans l'exemple de M. Werebrusow (**1903**, 224), $\Delta = 85$, la décomposition $\Delta = 9^2 + 2^2$ où 9 est un résidu quadratique *absolu,* si l'on peut dire, permet de conclure immédiatement. Mais en thèse générale la recherche des décompositions en deux carrés d'un module Δ et la détermination de ses résidus quadratiques est-elle plus facile que le calcul de la moitié du développement en fraction continue de $\sqrt{\Delta}$? Sur ce point, et sur d'autres encore, je souhaiterais quelques nouveaux éclaircissements.

Rudis.

2699. (**1903**, 303) (P.-F. Teilhet). — *Solution générale de l'équation indéterminée du troisième degré.* — Considérant l'équation comme celle d'une courbe, soit l'équation d'une tangente au point (x_0, y_0). Elle coupe la courbe en un second point rationnel.

De celui-ci on peut en déduire un troisième et ainsi de suite. Il n'y a exception que dans le cas où la tangente est parallèle à une asymptote, ou quand (x_0, y_0) est un point d'inflexion. Les solutions ne sont pas, en général, entières.

Si l'équation peut se réduire à la forme

$$(1) \qquad a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 + d = 0,$$

les solutions peuvent se trouver en résolvant l'équation en $\frac{x}{y}$ quand $d = 0$. Déterminons cette valeur de $\frac{x}{y}$ en fraction continue. On obtiendra les valeurs de x et y en formant les réduites de cette fraction continue. *Voir* ma réponse à **2512** (**1905**, 43).

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2779. (**1904**, 115) (H. Brocard). — *Solution des équations simultanées*

$$x = pa + r_a = qb + r_b = rc + r_c = \ldots$$

(**1904**, 247). — Ce problème est résolu dans la *Théorie des nombres*. *Voir*, par exemple, Mathews', *Theory of numbers*, p. 12, § 13. — Borel et Drach, *Théorie des nombres*, p. 12 et 19, etc.

Ce problème revient à résoudre les congruences simultanées

$$\begin{aligned} x &\equiv r_a \quad (\text{mod}\, a),\\ x &\equiv r_b \quad (\text{mod}\, b),\\ x &\equiv r_c \quad (\text{mod}\, c),\\ &\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

problème qu'on peut réduire à la solution des congruences

$$\begin{aligned} x &\equiv r_a \quad (\text{mod}\, \alpha),\\ x &\equiv r_b \quad (\text{mod}\, \beta),\\ x &\equiv r_c \quad (\text{mod}\, \gamma),\\ &\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où α, β, γ, ... sont premiers ou puissances de nombres premiers.

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2793. (**1904**, 138) (V. Aubry). — *Sur les quantités complexes et leur représentation* (**1904**, 297). — A propos de la Note de M. *Quilibet* de la page 297 (**2793**), il ne serait peut-être pas mauvais de dire qu'il existe quatre espèces de quantités imaginaires :

1° Les imaginaires clefs;

2° Les imaginaires géométriques;

3° Les imaginaires congruentielles;

4° Les substitutions linéaires.

Une même imaginaire pouvant d'ailleurs, comme $\sqrt{-1}$, appartenir à plusieurs de ces catégories.

I. Les clefs sont des symboles que l'on assujettit à des règles de calcul arbitraires, non contradictoires, et qui finalement disparaissent du calcul pour faire ressortir des égalités entre quantités ordinaires.

Exemple : 1° $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$,

$$a + bi = c + di,$$

donne

$$a = c, \qquad b = d;$$

2° Les quaternions;

3° Les clefs anastrophiques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de Cauchy telles que

$$\lambda_i\lambda_j = -\lambda_j\lambda_i, \qquad \lambda_i^2 = 0,$$

et qui permettent d'écrire

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \sum \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$
$$= (a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1n}\lambda_n)(a_{21}\lambda_1 + \ldots + a_{2n}\lambda_n)\ldots(a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nn}\lambda_n).$$

II. Les imaginaires géométriques, qui servent à représenter des êtres géométriques, et leurs transformées diverses.

Exemple : $\mathrm{P}e^{\theta\sqrt{-1}}$. — Les quaternions, et les imaginaires très intéressantes de Despeyrous peu connues, et plus commodes dans certains cas, que les quaternions, pour représenter les points de l'espace; Hermite faisait grand cas du travail de Despeyrous.

III. Les imaginaires congruentielles, dont la théorie est celle des égalités dans lesquelles on néglige soit des nombres, soit des fonctions d'une ou plusieurs variables.

Exemple: 1° $\sqrt{-1} = i$. — Toute équation entre quantités de la forme

$$a + b\sqrt{-1} = a + bi$$

étant une formule exacte à des multiples de $1 + i^2$ près

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m$$
$$= \text{rigoureusement } \cos m\varphi + i\sin m\varphi + \text{multiple de } i^2 + 1;$$

2° Les imaginaires de Galois;

3° Les corps finis

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n, \quad \text{où} \quad \xi_i = \frac{F(x)}{x - x_i}\frac{1}{F'(x_i)},$$

et où l'on en néglige les multiples de $F(x)$.

Les imaginaires sont aussi des clefs.

IV. Les substitutions linéaires sont soumises à un genre de calcul qui en font de véritables clefs; mais, si elles servent d'interprétation à presque toutes les espèces d'imaginaires en leur donnant un sens concret, les clefs anastrophiques de Cauchy leur échappent. Elles sont au fond l'interprétation la plus claire des systèmes linéaires de Laguerre. H. LAURENT.

2815. (**1904**, 211) (POPOVICI). — (**1904**, 301). — Les réponses manuscrites annoncées précédemment et de nouvelles réponses de MM. A. Boutin, Tafelmacher (Santiago), E. Weber (Liége) seront communiquées à l'auteur de la question dès qu'il aura bien voulu nous rappeler son adresse. LA RÉDACTION.

Ce problème ne peut pas se résoudre à l'aide de la règle et du compas. T. HAYASHI (Tokio, déc. 1904).

2819. (**1904**, 213) (E.-N. BARISIEN). — *Quadrilatères* (**1904**, 274). — Parmi les quadrilatères remarquables, j'ai, dans une question proposée dans le *Periodico di Matematica* (*Supplemento,* 1904, p. 125), appelé l'attention sur les propriétés de deux espèces de trapèzes que j'ai appelés (*loc. cit.*) *trapèze orthogonal de première espèce* et *trapèze orthogonal de seconde espèce*.

Dans celui-ci les diagonales sont supposées rectangulaires; dans l'autre les côtés ont des directions rectangulaires.

Dans le même Recueil, vers 1903 je crois, j'ai, dans une autre

question proposée également pour les concours qu'il offre mensuellement à ses lecteurs, demandé l'étude d'un parallélogramme remarquable que j'ai appelé *parallélogramme isogonal* et qui offre le caractère particulier suivant : *les angles de ses diagonales* sont égaux, respectivement, aux angles du parallélogramme. Le carré est un cas particulier de ce genre de parallélogrammes.

Si je rappelle ici ces quadrilatères remarquables, c'est que je crois leurs propriétés très nombreuses et que peut-être cette recherche élémentaire pourra intéresser quelques lecteurs de l'*Intermédiaire*. On trouvera d'ailleurs dans le Recueil cité quelques-unes de ces propriétés. G. DE LONGCHAMPS.

2827. (**1904**, 239) (E.-N. BARISIEN). — *Lieu des centres des cercles tangents à une conique donnée et qui passent par un point fixe* (**1904**, 303). — Autre réponse de M. S. MONTEIRO (Lisbonne), communiquée à M. Barisien. L'auteur étend la question au cas où les cercles sont tangents à deux coniques données.

LA RÉDACTION.

2828. (**1904**, 239) (E.-N. BARISIEN). — *Enveloppes de cercles* (**1904**, 277). — Autre réponse de M. S. MONTEIRO (Lisbonne), communiquée à M. Barisien.

L'auteur observe que l'enveloppe des cercles décrits sur les abscisses de l'ellipse existe, à condition de les tracer sur les lignes projetantes des points de l'ellipse sur l'axe des y. Elle est donc de même nature que l'enveloppe des cercles analogues décrits sur les ordonnées comme diamètres. LA RÉDACTION.

Si $x = m$, $y = n$ sont les coordonnées d'un point d'une ellipse, les cercles ayant pour diamètres les différentes ordonnées auront pour équation

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2mx - ny + m^2 = 0,$$

ces coordonnées étant liées par la relation

$$(2) \qquad b^2 m^2 + a^2 n^2 = a^2 b^2.$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe demandée, il faut éliminer les variables m, n entre les équations (1) et (2) et la relation prove-

nant des dérivées premières

$$(3) \qquad \frac{y}{2a^2n} = \frac{x-m}{b^2m}.$$

Or, portant la valeur de y dans l'équation (1), on trouve

$$\frac{(x-m)}{b^2m}\left(\frac{(b^4m^2+4a^4n^2)}{b^2m}(x-m)-2a^2n^2\right)=0,$$

soit

$$(4) \qquad \frac{x-m}{b^2m} = \frac{2a^2n^2}{b^4m^2+4a^4n^2} = \frac{y}{2a^2n}.$$

Remplaçant n par sa valeur tirée de (2) les relations (4) deviennent

$$\frac{x-m}{b^2m} = \frac{2b^2(a^2-m^2)}{b^4m^2+4a^2b^2(a^2-m^2)} = \frac{y}{2ab\sqrt{a^2-m^2}},$$

d'où deux équations

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} 4a^2m^4-8a^2xm^3 \\ \quad +[4a^2(x^2-a^2)+b^2y^2]\,m^2+8a^4xm-4a^4x^2=0, \end{array}\right.$$

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} (4a^2+b^2)m^3-(4a^2-b^2)xm^2 \\ \qquad\qquad -2a^2(2a^2+b^2)m+4a^4x=0, \end{array}\right.$$

entre lesquelles il reste à éliminer la variable m.

Multipliant (6) par x et soustrayant, on a

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} 4a^2m^3-(4a^2-b^2)xm^2 \\ \quad +[b^2(x^2+y^2)-4a^4]\,m+2a^2x(2a^2-b^2)=0. \end{array}\right.$$

Combinant les équations (6) et (7), on trouve une autre relation

$$(8) \qquad m^2-(x^2+y^2+2a^2)\,m+2a^2x=0.$$

Enfin, des équations (6) et (8) on tire

$$\begin{array}{l} (x^2+y^2-b^2)m^2-(2a^2+b^2)xm \\ \quad +(4a^2-b^2)x^2-(x^2+y^2+2a^2)(x^2+y^2-b^2)=0, \end{array}$$

$$(2a^2+b^2)m^2-(4a^2-b^2)xm+2a^2(x^2+y^2-b^2)=0.$$

En faisant

$$p=x^2+y^2-b^2, \qquad q=x^2+y^2+2a^2,$$
$$k=2a^2+b^2, \qquad l=4a^2-b^2,$$

ces équations donnent pour résultant

$$p\left[l^2x^4-(qlk^2+pql^2-2a^2k^2+6a^2pkl)x^2+p(kq+2a^2p)^2\right]=0;$$

on voit déjà qu'il est du sixième degré en x, y.

Remplaçant p, q, k, l par leurs valeurs et réduisant on obtient, pour le lieu cherché,

$$\begin{aligned}&(4a^2+b^2)^2(x^2+y^2)^3-(4a^2-b^2)^2(x^2+y^2)^2x^2\\&+(4a^2+b^2)(8a^4-4a^2b^2-b^4)(x^2+y^2)x^2\\&-2(4a^2-b^2)(12a^4+2a^2b^2+b^4)(x^2+y^2)x^2\\&+(4a^2-b^2)^2x^4+8a^4(2a^4-4a^2b^2-b^4)(x^2+y^2)\\&\qquad-8a^4(2a^4-10a^2b^2-b^4)x^2-16a^8b^2=0,\end{aligned}$$

équation satisfaite par $y=0$, et $x=\pm a$, $x=0$ et $y=\pm b$ et qu'on peut écrire sous la forme

$$16a^2b^2(x^2-a^2)^2+y^2\left\{\begin{aligned}&(4a^2+b^2)y^4\\&\quad+(4a^2+b^2)(8a^4-b^4-4a^2b^2)y^2\\&\quad+8a^4(2a^4-b^4-4a^2b^2)\\&\quad+(16a^4+b^4+40a^2b^2)x^4\\&\quad+2(16a^4+b^4+16a^2b^2)x^2y^2\\&\quad-4a^2(8a^4+5b^4+2a^2b^2)x^2\end{aligned}\right\}=0.$$

Quant aux cercles décrits sur les abscisses des différents points de l'ellipse, ils ont pour enveloppes les cercles qui ont pour diamètre les plus grandes abscisses ou les demi-axes. En effet, les cercles mobiles, décrits sur les abscisses $x=a\cos\varphi$, ont pour équation

$$x^2+y^2-ax\cos\varphi=0;$$

de plus, la dérivée $ax\sin\varphi$ étant nulle, la relation $1=\sin^2\varphi+\cos^2\varphi$ donne

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{ax}=1.$$

H. Lez.

I. *Cas des ordonnées.* — L'équation d'un pareil cercle est

$$x^2+y^2-2ax\cos\varphi-by\sin\varphi+a^2\cos^2\varphi=0.$$

Différentions par rapport à φ, il vient

$$2ax\sin\varphi-by\cos\varphi-2a^2\sin\varphi\cos\varphi=0.$$

Tirant x de cette dernière équation et portant dans la première, il vient, après réductions,

$$y = b \sin\varphi\left(1 - \frac{b^2\cos^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi + 4a^2\sin^2\varphi}\right);$$

on en déduit

$$x = a\cos\varphi\left(1 + \frac{2b^2\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi + 4a^2\sin^2\varphi}\right).$$

Ces deux équations représentent une courbe du sixième degré, tangente à l'ellipse à ses sommets et extérieure à cette courbe.

II. *Cas des abscisses.* — L'enveloppe a pour équations

$$y = b\sin\varphi\left(1 + \frac{2a^2\cos^2\varphi}{4b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\right),$$

$$x = a\cos\varphi\left(1 - \frac{a^2\sin^2\varphi}{4b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\right).$$

H. Mathieu (Saïgon).

2829. (**1904**, 239) (E.-N. Barisien). — *Propriétés de certains nombres* (**1904**, 278). — Nouvelles réponses de MM. E.-B. Escott (Ann Arbor, États-Unis), Mathieu (Saïgon), Werebrusow (Théodosia, Russie).

M. Brocard signale que certaines remarques faites à propos de la question **2829** s'étendent aux équations indéterminées

$$x^m + x^{m+1} = Ay.$$

La Rédaction.

2834. (**1904**, 258) (H. Brocard). — *Propriété relative aux systèmes de numération.* — Soit A le nombre donné, formé par un nombre fini de chiffres, et pourtant rationnel; soient, d'autre part, a, b, c, ..., h les autres chiffres donnés, pris de droite à gauche, nous donnant, dans un système quelconque, dont la base inconnue soit x, le nombre

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots + hx^n}{x^k},$$

où, d'une façon générale, k est entier réel quelconque, n est entier positif donné. La proposition énoncée équivaut à dire que l'équation

$$Ax^k = a + bx + cx^2 + \ldots + hx^n$$

a, au moins, une racine entière, positive, et plus grande que le plus élevé des chiffres $a, b, c, \ldots, h$; ce qui ne sera pas toujours exact, en thèse générale et en principe. (Si toutefois j'ai bien compris la portée de la question?) J. Rius y Casas (Saragosse).

2837. (**1904**, 259) (H. Brocard). — *Suite arithmétique.* — Pour faire voir que la suite est illimitée, il suffit de prouver que si le nombre N_k n'est pas carré, il en est de même du nombre

$$N_{k+1} = N_k + R_k,$$

en supposant

$$a_k^2 < N_k < (a_k + 1)^2 \qquad \text{et} \qquad R_k = N_k - a^2.$$

Or, R_k étant $< 2a_k + 1$, on a

$$N_{k+1} = a_k^2 + 2R_k < a_k^2 + 4a_k + 2 < (a_k + 2)^2;$$

donc N_{k+1} ne pourrait être carré que de $a_k + 1$; mais, en supposant

$$N_{k+1} = (a_k + 1)^2,$$

on aurait

$$a_k^2 + 2R_k = a_k^2 + 2a_k + 1;$$

d'où l'égalité absurde d'un nombre pair égal à un nombre impair.

A. Boutin, E. Malo, J. Rius y Casas (Saragosse).

2839. (**1904**, 259) (Ferber). — *Système d'équations différentielles.* — 1° Je pose $u = \rho \sin\theta$, $w = \rho\cos\theta$; le système proposé devient

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d(\rho\cos\theta)}{dt} = \quad g\cos\alpha - A\rho^2\cos\theta, \\[2mm] \dfrac{d(\rho\sin\theta)}{dt} = -g\sin\alpha - a\rho^2\sin\theta. \end{cases}$$

Je cherche une solution telle que $\rho = \rho_0 = \text{const.}$:

$$-\rho_0\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \quad g\cos\alpha - A\rho_0^2\cos\theta,$$

$$\rho_0\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = -g\sin\alpha - a\rho_0^2\sin\theta.$$

L'élimination de $\dfrac{d\theta}{dt}$ conduit à une équation en $\cos\theta$ et $\sin\theta$ qui

n'a qu'un nombre limité de solutions. On doit donc supposer

$$\theta = \theta_0 = \text{const.}$$

Alors

$$(2) \qquad g\cos\alpha - A\rho_0^2\cos\theta_0 = -g\sin\alpha - a\rho_0^2\sin\theta_0 = 0.$$

D'où

$$\tang\theta_0 = -\frac{A}{a}\tang\alpha,$$

$$\rho_0^2 = \frac{g\cos\alpha}{A\cos\theta_0} = -\frac{g\sin\alpha}{a\sin\theta_0}.$$

On pourrait essayer de vérifier par les procédés connus si cette solution est stable, en supposant que ρ soit une vitesse, et t le temps; on poserait $\rho = \rho_0 + \sigma$, $\theta = \theta_0 + \eta$; on substituerait dans (1) en tenant compte de (2) et négligeant les carrés et les produits 2 à 2 de σ, η, $\frac{d\sigma}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$; les signes de a et A pourraient avoir une influence sur le résultat.

2° M. Ferber m'a posé une question analogue à 2839 à propos du système

$$\frac{d(\rho\cos\theta)}{dt} = -\rho^2[a^2\sin\alpha\sin(\alpha+\theta) + b^2\cos\alpha\cos(\alpha+\theta)],$$

$$\frac{d(\rho\sin\theta)}{dt} = -g + \rho^2[a^2\sin\alpha\cos(\alpha+\theta) - b^2\cos\alpha\sin(\alpha+\theta)],$$

où a, b, α sont des constantes, g l'accélération de la pesanteur. On a une solution

$$\rho = \rho_0 = \text{const.}, \qquad \theta = \theta_0 = \text{const.},$$

avec

$$\tang\theta_0 = -\frac{b^2 + a^2\tang^2\alpha}{(a^2 - b^2)\tang\alpha},$$

$$\rho_0^2 = \frac{-g\sin(\alpha+\theta_0)}{b^2\cos\alpha} = \frac{g\cos(\alpha+\theta_0)}{a^2\sin\alpha} = -\frac{g\sin\theta_0}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}.$$

Quand b est petit par rapport à a, et α petit, j'ai vérifié que cette solution est stable en posant

$$\theta = \theta_0 + \eta, \qquad \rho = \rho_0 + \sigma,$$

et supposant négligeables les carrés et produits 2 à 2 de η, σ et leurs

dérivées premières; on trouve que η et σ sont de la forme

$$\eta = A' e^{\alpha_1 t} + B' e^{\alpha_2 t},$$
$$\sigma = A'' e^{\alpha_1 t} + B'' e^{\alpha_2 t},$$

α_1, α_2 étant négatifs, ou ayant leurs parties réelles négatives, ce qui assure la stabilité de la solution $\rho = \rho_0$, $\theta = \theta_0$.

Le second système d'équations différentielles peut donner lieu à d'autres remarques dont je reparlerai ultérieurement.

E. Maillet.

En appliquant la solution ci-dessus ρ_0, θ_0 du second système à mes expériences d'aviation, j'obtiens pour le coefficient k dans la formule $kSv^2 \sin\alpha$ exprimant en kilogrammes la résistance normale de l'air au mouvement d'un plan de surface S mètres carrés et de vitesse v mètres-seconde, α étant l'angle de v et du plan (le plan a 6m d'envergure pour 1m de profondeur) $k = 0,68$.

Ferber.

2840. (**1904**, 260) (E. Maillet). — *Équation algébrique.* — L'équation de la question **2840** peut être remplacée par la suivante, que l'on obtient en changeant x en $-x$,

$$x^n + \frac{n}{2!} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{4!} x^{n-2} + \ldots = 0;$$

son premier membre est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de

$$e^{zx} \frac{e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}}{z} \qquad \text{pour} \qquad z = 0,$$

donc il est égal, à un facteur constant près, à

$$\int e^{zx} \frac{(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}})}{2z^{n+1}} dz,$$

pris le long d'un cercle décrit de l'origine comme centre; donc on peut l'écrire

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{x(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta - n\theta\sqrt{-1})} \cos\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta,$$

toujours à un facteur constant près; donc enfin on a à considérer l'équation

$$V_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos\theta} \cos(\sin\theta - n\theta)\cos\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 0.$$

Or on a

$$V_{n\pm 1} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos\theta} [\cos(\sin\theta - n\theta)\cos\theta$$
$$- \sin(\sin\theta - n\theta)\sin\theta] \cos\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta;$$

donc, quand $V_n = 0$, V_{n+1} et V_{n-1} sont de signes contraires; les fonctions V_n forment une suite de Sturm; et comme, pour $-\infty$ et $+\infty$, il n'y a que des variations, $V_n(x) = 0$ a toutes ses racines réelles; donc $V_n(-x)$ aussi. C. Q. F. D.

Anonyme.

Ce qui suit n'est qu'une indication qu'il faudrait développer pour en tirer une démonstration rigoureuse : telle quelle, elle suffira peut-être à l'auteur de la question.

Posant

$$F_n(x) = x^n - \frac{n}{1}\frac{x^{n-1}}{2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x^{n-2}}{3.4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{x^{n-3}}{4.5.6} + \ldots,$$

on aperçoit immédiatement la relation

$$\frac{d\,F_{n-1}(x)}{dx} = n\,F_{n-1}(x),$$

qui montre que s'il était établi que toutes les racines du polynome $F_n(x)$ fussent réelles, n ayant une certaine valeur, la proposition serait vraie par cela même pour tous les polynomes F, d'ordre inférieur.

D'autre part on peut écrire

$$F_n(x) = x^n\left[1 - \frac{1}{1.2}\frac{1}{\left(\frac{x}{n}\right)} + \frac{1}{4!}\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(\frac{x}{n}\right)^2} - \frac{1}{6!}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{x}{n}\right)^3} + \ldots\right],$$

c'est-à-dire

$$F_n(x) = x^n\left(\cos\sqrt{\frac{n}{x}} + \varepsilon\right),$$

ε étant une quantité infiniment petite pour n infiniment grand. Cette expression asymptotique du polynome $F_n(x)$ montre que toutes ses racines sont réelles, sous condition de supposer n suffisamment grand, c'est-à-dire, *sans condition,* en vertu de la première remarque faite. E. MALO.

Divisons le premier membre de l'équation par $n!$ Elle devient

$$y_n = \sum_0^n \frac{\varepsilon^p}{(2p!)}\frac{x^{n-p}}{(n-p)!} = 0 \qquad (\varepsilon = -1).$$

On en déduit immédiatement la relation

$$y'_n = y_{n-1}.$$

Ce qui montre que, si $y_n = 0$ a ses racines réelles, on pourra les séparer à l'aide de celles de $y_{n-1} = 0$.

Considérons le développement suivant les puissances croissantes de t, de l'expression

$$V = \cos t . e^{t^2 x}.$$

On a

$$V = \sum_0^\infty y_n t^{2x}.$$

On en déduit

$$\cos t = V . e^{-t^2 x}.$$

Prenons la dérivée seconde par rapport à t; en représentant $e^{-t^2 x}$ par u

$$-\cos t = V''_t u + 2 V'_t u'_t + V u''.$$

Ajoutons avec la relation précédente, pour éliminer $\cos t$,

$$V''_t u + 2 V'_t u'_t + V(u + u'') = 0.$$

On a

$$u'_t = -2txu, \qquad u'' = -2xu + 4t^2x^2u.$$

D'où

$$V''_t - 2txV'_t + V(4t^2x^2 - 2x + 1) = 0.$$

Remplaçons V par son développement et annulons le coefficient de t^{2n}. On a la relation

$$(1) \quad (2n+1)(2n+2)y_{n+1} - (8nx + 2x - 1)y_n + 4x^2 y_{n-1} = 0,$$

qui donne l'équation différentielle

$$(2n+1)(2n+2)y_{n+1} - (8nx + 2x - 1)y'_{n+1} + 4x^2 y''_{n+1} = 0$$

ou

$$(2) \qquad 4x^2 y''_n - (8nx - 6x - 1)y'_n + 2n(2n-1)y_n = 0.$$

L'équation (1) montre que la suite

$$y_n, \quad y_{n-1}, \quad y_{n-2}, \quad \ldots, \quad y_1, \quad y_0 \qquad (y_0 = 1)$$

a les propriétés de la suite de Sturm.

Pour o elle présente n variations.

» ∞ » n permanences.

Donc l'équation $y_n = 0$ a ses n racines réelles et positives.

J. SADIER.

Autre réponse de M. E. MALO qui montre que les racines de y_n sont réelles et séparées par celles de y_{n-1}; M. E. MALO établit en même temps la réalité des racines de polynomes plus généraux. Sa réponse est trop étendue pour être insérée ici; il en sera reparlé. LA RÉDACTION.

2843. (1904, 261) (E.-B. ESCOTT). — *Fonction numérique.* — Soit

$$f(n, r) = n^r - n(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^r - \ldots.$$

On a

$$f(n, r) = \left(\frac{d^r(e^x-1)^n}{dx^r}\right)_{x=0} = \left(\frac{d^r[x^n \varphi(x)]}{dx^r}\right)_{x=0},$$

où

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{m!} + \ldots\right)^n,$$

et il suffit que l'on forme la dérivée d'ordre r du produit $x^n \varphi(x)$, au moyen de la formule de Leibniz, et qu'on pose ensuite $x = 0$, pour obtenir les égalités

$$f(n, r) = 0 \qquad (r < n),$$

$$f(n, n) = n!,$$

$$(1) \qquad f(n, n+i) = \binom{n+i}{i} n!\, \varphi^{(i)}(0).$$

Cette dernière égalité donne

$$f(n, n+1) = \binom{n+1}{1} \frac{n!\, n}{2},$$

$$f(n, n+2) = \binom{n+2}{2} n!\, n\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{12}\right),$$

....

La valeur de $\varphi^{(i)}(x)$, pour $x = 0$, qui entre dans la formule (1), peut être calculée de la manière suivante :

On a

$$\varphi(x) = \sum \frac{n!\, x^{\beta+2\gamma+3\delta+\ldots}}{\alpha!\, \beta!\, \gamma!\, \delta! \ldots},$$

où α, β, γ, ... représentent les solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = n;$$

et, par conséquent,

$$\varphi^{(i)}(0) = \sum\nolimits_1 \frac{n!\, i!}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots (2!)^{\beta} (3!)^{\gamma} \ldots},$$

où $\sum_1$ doit s'étendre aux solutions entières, positives et nulles, des équations

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots &= i, \\ \alpha + \beta + \gamma + \ldots &= n. \end{aligned}$$

F. Gomes Teixeira.

M. A. Boutin donne la formule

$$f(n, n+p) = \frac{(n+p)!}{(2p)!} n(an^{p-1} + bn^{p-2} + \ldots + k),$$

mais sans pouvoir spécifier, sauf pour $p \leqq 5$, les valeurs de a, b, ..., k.

M. E. Fabry adresse une réponse analogue. La Rédaction.

La question **2843** n'est qu'une variante des questions **2674** (**1903**, 274; **1904**, 121, 292) et **2692** (**1903**, 300; **1904**, 124, 201) elles-mêmes connexes à la question **1466** (**1899**, 51, 284; **1900**, 22, 280; **1901**, 164).

La solution dépend de l'identité facile à établir

$$\frac{n!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)} = \sum (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} \frac{1}{x-k},$$

qui montre que la fonction numérique $f(n, r)$ n'est autre que le coefficient de x^{-r-1} dans le développement suivant les puissances descendantes de x de la fraction rationnelle

$$\frac{n!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)},$$

et, comme ce développement commence par un terme en x^{-n-1}, on a

$$f(n, r) = 0$$

pour $r < n$. Pour $r = n$, il vient

$$f(n, n) = n!$$

puis, pour $r > n$, la valeur de $f(n, r)$ se déduit des valeurs, *supposées connues,* des coefficients du produit

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n) = x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}x^n + A_2 x^{n-1} - \ldots$$

Lagrange, dans son Mémoire de 1771 (*Œuvres,* t. III, p. 425) a montré comment ces valeurs peuvent être calculées de proche en proche.

Mais, ainsi que je l'ai mentionné dans ma réponse à la question **2692** (**1904**, 124), il y a lieu de considérer plus généralement la fonction

$$f(x, n, r) = x^r - \frac{n}{1}(x-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}(x-2)^r - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(x-3)^r + \ldots,$$

qui, pour n et r entiers, est nulle identiquement quel que soit x, si l'on a $r < n$, et qui se réduit à un polynome entier de degré $r - n$ en x

$$f(x,n,r) = \frac{r!}{(n-1)!}\left[\prod\nolimits_{n-1}^{n-1} \frac{x^{r-n}}{(r-n)!} - \prod\nolimits_{n-1}^{n} \frac{x^{r-n-1}}{(r-n-1)!} + \prod\nolimits_{n-1}^{n+1} \frac{x^{r-n-2}}{(r-n-2)!} - \ldots\right],$$

lorsque r est plus grand que n; les premiers des coefficients $\prod$ ont les valeurs suivantes :

$$\prod\nolimits_{n-1}^{n-1} = 1.2.3\ldots(n-1),$$

$$\prod\nolimits_{n-1}^{n} = n!\,\frac{n+1}{2},$$

$$\prod\nolimits_{n-1}^{n+1} = (n+1)!\,\frac{(n+2)(3n+1)}{24},$$

$$\prod\nolimits_{n-1}^{n+2} = (n+2)!\,\frac{n(n+1)(n+3)}{48},$$

$$\prod\nolimits_{n-1}^{n+3} = (n+3)!\,\frac{(n+4)(15n^3+30n^2+5n-2)}{5760},$$

$$\prod\nolimits_{n-1}^{n+4} = (n+4)!\,\frac{n(n+1)(n+5)(3n^2+7n-2)}{11520}.$$

On voit que le coefficient $\prod_{n-1}^{n+i}$ est formellement divisible par la factorielle $(n+i)!$ et que si i est un nombre pair il admet encore un facteur $n(n+1)$; mais l'expression entièrement explicite des nombres $\prod_{n-1}^{n+i}$ semble ne pouvoir être donnée qu'au moyen des fonctions $f(x, n, r)$ elles-mêmes. E. Malo.

2851. (**1904**, 283) (N. Quint). — *Problème de réfraction.* — *Voir* ma question **1039** (**1897**, 78) et la réponse de M. Maillard (**1897**, 188). J.-J. Durán-Loriga (La Corogne).

2854. (**1904**, 285) (*Sigma*). — *Fonctions entières.* — La proposition de M. Borel, dont la démonstration ne demande, en effet, qu'une légère modification des méthodes employées dans le Mémoire des *Acta Math.*, a été établie *in extenso* par M. Albert Kraft dans sa Thèse (*Inauguraldissertation*) : *Ueber ganze transcendente Funktionen von unendlicher Ordnung,* de l'Université de Göttingen, p. 57-59 (Göttingen, 1903).

Elle n'a paru dans aucun Recueil scientifique ([1]).

Otto Blumenthal (Marburg).

2857. (**1905**, 5) (Mannheim). — *Inversion.* — Les origines de l'*inversion* (pour figures planes) peuvent se trouver dans les *lieux plans* d'Apollonius. Bien plus tard en parlèrent Steiner (*Cr.*, t. 1, 1826) et Dandelin (*Mém. de Belgique,* t. II, 1822, et t. IV, 1827). Mais les premières expositions méthodiques sont dues à Bellavitis (*Ann. delle Scienze del Regno Lomb. Venet.*, t. VI, 1836), et Stubbs (*P. M.,* t. XXIII, 1843). L'extension à l'espace appartient à W. Thomson (*Journ. de Liouville,* t. X et XII).

G. Loria (Gênes).

Il en est question dans Stubbs et Ingram, fellows of Trinity College, Dublin (Comp. *Trans. Dubl. Phil. Soc.,* 1842). Ensuite la méthode fut beaucoup employée par Sir William Thomson.

N. Quint (La Haye).

([1]) On la trouve à la bibliothèque de l'Université (Sorbonne), à Paris.

QUESTIONS.

2894. [V] La Bibliothèque mathématique des travailleurs, de M. le Dr Hulman, a cessé de fonctionner depuis peu. Nous serions heureux de faire connaître à nos lecteurs quelles sont les bibliothèques de France ou de l'étranger qui s'occupent de prêter, par correspondance, des livres de Mathématiques à domicile, et à quelles conditions. En particulier, nous serions heureux d'avoir des renseignements sur le fonctionnement de la bibliothèque de prêts de Strasbourg.
La Rédaction.

2895. [V] Je signale l'utilité des nomenclatures suivantes :

1° *La liste des problèmes du second degré sur la résolution des triangles dont on connaît trois éléments ou qui sont assujettis à trois conditions;*
2° *La liste des constructions par la règle et le compas des déterminations de coniques assujetties à cinq conditions, et de paraboles assujetties à quatre conditions.*

Ces listes rendraient de grands services et permettraient de savoir si tel ou tel problème vaut la peine d'être recherché. Il serait aussi utile de signaler le degré des problèmes précédents qui donnent des solutions supérieures au second.
Nester.

2896. [V9] Cauchy a publié dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et l'on trouve reproduits dans le Tome V de ses *Œuvres complètes* plusieurs Mémoires sur certaines formes quadratiques propres

à représenter les nombres premiers ou leurs puissances. Les résultats donnés par Cauchy ont-ils été, depuis lors, démontrés d'une façon plus brève et plus simple? *Rudis.*

2897. **[I9b]** J'aurais besoin de savoir si le nombre

12 761 717

est premier ou composé, et, si quelque correspondant de l'*Intermédiaire,* possédant ou se trouvant à même de consulter des Tables étendues de diviseurs des nombres, pouvait me fixer à ce sujet, il m'obligerait.

A ce propos je demanderai quel est, pratiquement, le meilleur moyen de reconnaître qu'un nombre donné est premier ou non, en supposant qu'on ne dispose point de Tables étendues de diviseurs; et quel temps en moyenne il faut compter dépenser pour décider la question à l'égard d'un nombre appartenant au treizième million comme celui indiqué ci-dessus. *Rudis.*

2898. **[H1h]** (S) Connaît-on l'équation différentielle d'ordre n de toutes les courbes algébriques de degré n, et en particulier celle des équations du troisième degré?

Quemquæris.

2899. **[A3e]** Soit l'équation, à coefficients réels,

$$f(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0.$$

K étant le nombre des racines réelles de l'équation dérivée

$$f'(x) = m x^{m-1} + (m-1) p_1 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} = 0,$$

$f(x) = 0$ a au plus $K+1$ racines réelles.

Peut-on toujours trouver des valeurs pour p_m, les autres coefficients ne changeant pas, telles que $f(x) = 0$ ait précisément $K+1$ racines réelles? A. Pellet.

2900. **[Σ]** On sait que Kummer a établi l'impossibilité de l'équation indéterminée $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$, où λ est premier

(dernier théorème de Fermat), pour tous les nombres premiers $\lambda \geqq 5$ non exceptionnels, c'est-à-dire pour tous ceux ayant la propriété de ne diviser le numérateur d'aucun des $\frac{\lambda-3}{2}$ premiers nombres de Bernoulli. Il serait dès lors important de résoudre les questions suivantes, qui paraissent difficiles :

Le nombre des nombres premiers non exceptionnels est-il illimité?

et de même :

Le nombre des nombres premiers exceptionnels est-il limité ou non (1)? E. MAILLET.

2901. [O2p] On montre en Géométrie cinématique que tout mouvement plan peut être produit par le roulement d'une courbe sur une autre. Quelle est la condition pour que certains points dans le mouvement plan décrivent des lignes droites? Peut-on l'exprimer au moyen des équations des courbes roulantes?

Quelle est la condition pour que certaines lignes dans le mouvement plan passent constamment par des points fixes?

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

2902. [V10] Y a-t-il un projet de publication d'une Encyclopédie des Mathématiques elémentaires qui donnerait un aperçu *complet* des résultats obtenus jusqu'à notre époque ainsi que des références bibliographiques? *L'Encyklopädie der Elementar-Mathematik* de MM. Weber et Wellstein ne donne évidemment pas satisfaction à ce besoin.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

---

(1) Pour les renseignements bibliographiques, *voir* au besoin 314 (1905, 11); pour les renseignements *indispensables*, *voir* E. MAILLET, *Congrès international des Mathématiciens à Paris*, p. 425. Gauthier-Villars, 1902.

2903. [I19c] Les équations

$$x^2+y^2=r^2+1 \quad \text{et} \quad x^2-y^2=s^2-1$$

ont-elles une autre solution commune en entiers que

$$x=13, \quad y=11?$$

x et y sont $\neq 0$ et $x\neq y$.

Le problème peut encore être posé ainsi :

L'équation

$$4mn(m^2-n^2)+1=p^2$$

a-t-elle une solution autre que

$$m=3, \quad n=2?$$

m et n sont $\neq 0$ et $m\neq n$.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2904. [X2] Edward Sang annonce à la fin de ses Tables de logarithmes, publiées en 1871, qu'une Table de logarithmes à 9 décimales des nombres jusqu'à 1 million est presque terminée et sera publiée dès que les souscriptions seront suffisantes pour couvrir la dépense. Où en est ce projet de publication?

E.-B. Escott (Ann Arbor).

[Questions 2901 à 2904 trad. de l'anglais. (La Réd.)]

2905. [R9bα] A-t-on envisagé la question du billard circulaire (ou elliptique) de la façon suivante, et si oui, dans quel Ouvrage est-elle traitée?

Mener une ellipse ayant pour foyers deux points donnés et qui soit tangente à un cercle (ou à une ellipse) donné. Déterminer le point de contact. Crut.

RÉPONSES.

820. (**1896**, 85) (G. Arnoux). — *Sommes de carrés.* — (**1896**, 259; **1897**, 82). — Nouvelle réponse de M. P.-F. Teilhet communiquée à M. Gl Arnoux. La Rédaction.

1660. (**1899**, 224) (E.-B. Escott). — *Formes quadratiques représentant les nombres m et m^2-2.* — Le produit $m(m^2-2)$ se trouve dans la classe principale, on a donc

$$\left(\frac{D}{m(m^2-2)}\right)=+1, \qquad \left(\frac{m(m^2-2)}{D}\right)=+1.$$

Exemple : $m=3$, $m^2-2=7$, $D\equiv 1, 25, 37 \pmod{42}$.

Soit $D=67$; on aura les formes équivalentes

$$(3.7-6)(-6.5.7).$$

A. Werebrusow (Théodésia, Crimée).

1669. (**1899**, 247) (A. Korselt). — *Formules algébriques donnant des séries de nombres premiers.* — Théoriquement, on pourra obtenir autant que l'on voudra de ces formules. Il suffira de se donner les nombres premiers (consécutifs ou non) $p_1, p_2, \ldots, p_m$; on formera leurs différences successives, puis on obtiendra $f(x)$ par la formule de Lagrange, ou mieux par la formule de Newton (les indices étant ici en progression arithmétique).

La fonction $f(x)$ ainsi formée sera de degré m, et vraisemblablement complète et sans réduction d'aucun de ses coefficients, à *zéro;* mais elle donnera une suite de m nombres premiers choisis d'avance, tandis que les formules trinomes proposées jusqu'à présent donnent des nombres premiers dont les valeurs et les intervalles ne sont pas connus d'avance.

Les deux questions **1669** et **1133** (**1897**, 196), analogues en apparence, ont en réalité un objet très différent.

Dans **1669**, on part *de* nombres premiers pour obtenir $f(x)$; dans **1133**, on part d'une formule *empirique* pour obtenir *des* nombres premiers, inconnus et à intervalles indéterminés.

L'avantage est, en somme, à la question **1133**, mais le hasard y tient beaucoup de place, tandis qu'il n'a aucune part dans le résultat de **1669**.

Note. — Pour **1133**, *voir* rép. (**1898**, 114, 184; **1899**, 10).

H. Brocard.

2125. (**1901**, 186) (G. Picou). — *Résidus quadratiques* (**1902**, 77). — Réponse de M. E.-B. Escott communiquée à M. Picou.

La Rédaction.

2255. (**1902**, 3) (*Quærens*). — *Développement de* π *et de* e *en fractions continues* (**1902**, 109, 186, 307). — Dans l'Ouvrage de M. le Dr P. Rudio [*Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre : Vier Abhandlungen über die Kreismessung* (Leipzig, 1892)] se trouvent les expressions suivantes de e en fraction continue :

$$\frac{e^x+1}{e^x-1} = \left(\overline{\frac{4m+2}{x}}\right)_{m=0,1,2,\ldots} = \frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{6}{x}+} \; \frac{1}{\frac{10}{x}+\ldots},$$

$$e = (2, \overline{1, 2m, 1})_{m=1,2,3,\ldots} = 2 + \frac{1}{1+} \; \frac{1}{2+} \; \frac{1}{1+\ldots},$$

$$\sqrt{e} = (1, \overline{4m+1, 1, 1})_{m=0,1,2,3,\ldots} = 1 + \frac{1}{1+} \; \frac{1}{1+} \; \frac{1}{1+} \; \frac{1}{5+\ldots},$$

$$e^2 = (7, \overline{3m-1, 1, 1, 3m, 12m+6})_{m=1,2,3,\ldots},$$

expressions dues à Euler.

Dans la réponse à la même question (**1902**, 307), il y a une erreur dans l'expression de e. Il faut

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10+\ldots}}} \quad \text{ou} \quad \frac{e+1}{2} = 1 + \frac{1}{1+} \; \frac{1}{6+} \; \frac{1}{10+\ldots}.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2269. (**1902**, 7) (G. DE ROCQUIGNY). — *Système d'équations indéterminées* (**1902**, 189, 308). — Réponse de M. P.-F. Teilhet communiquée à M. de Rocquigny. LA RÉDACTION.

2512. (**1903**, 34) (A. WEREBRUSOW). — *Limite de x et y quand $x^3 - y^2$ est limité* (**1903**, 283, 316; **1904**, 152; **1905**, 43). — Je crois utile de faire remarquer que la question de M. Werebrusow peut être formulée ainsi : *Trouver les valeurs de a pour lesquelles $x^3 - y^2 = a$ possède une infinité de solutions en nombres entiers. Y a-t-il de pareilles valeurs de a?* Aucune réponse n'a encore été donnée à la question posée sous cette forme. E. MAILLET.

2550. (**1903**, 71) (NAZAREVSKY). — *Racines primitives.* — Le théorème II est, je crois, du moins sous une forme moins générale, dans E. DESMAREST, *Traité de l'Analyse indéterminée* (1852). Voici d'autres références :

J. OLTRAMARE (*Cr.*, t. **49**, p. 161). — M.-F. LANDRY, *Troisième Mémoire sur la Théorie des nombres* (1854). — A. CAUCHY, *Exercices de Mathématiques*, 4[e] année, p. 231-236, ou *Œuvres*, 2[e] série, t. IX, p. 266-297; *C. R.*, t. XXV, p. 37, ou *Œuvres*, 1[re] série, t. X, p. 324. — F. HOFFMANN (*M. A.*, t. XX, 1882, p. 471).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

2573 (**1903**, 103) (G. PICOU). — *Théorème de fractions continues.* — La proposition n'est pas vraie en général, comme je vais le montrer par un exemple.

Soit une réduite de $\sqrt{A}$, $\frac{P_n}{Q_n}$. On a

$$P_n^2 - AQ_n^2 = (-1)^n D_n \tag{1}$$

ou encore

$$P_n^2 \equiv (-1)^n D_n \pmod{A}. \tag{2}$$

Si $D_m = a$, $D_n = b$, $D_p = ab$, on a

$$P_m^2 \equiv (-1)^m a \pmod{A}, \tag{3}$$

$$P_n^2 \equiv (-1)^n b \pmod{A}, \tag{4}$$

$$P_p^2 \equiv (-1)^p ab \pmod{A}. \tag{5}$$

La formule (4) donne

$$(6) \qquad a^2 P_n^2 \equiv (-1)^n a^2 b \pmod{A},$$

et, d'après (3) et (5),

$$(7) \qquad P_m^2 P_p^2 \equiv (-1)^{m+p} a^2 b \pmod{A}.$$

D'après (6) et (7),

$$(8) \qquad a^2 P_n^2 \equiv (-1)^{m+n+p} P_m^2 P_p^2 \pmod{A}.$$

Ceci exige : 1° ou bien que la congruence

$$(9) \qquad x^2 \equiv -1 \pmod{A}$$

soit possible si $m+n+p$ est un nombre impair; dans ce cas, tout facteur premier impair de A doit être de la forme $4n+1$; 2° ou bien que $m+n+p$ soit un nombre pair.

Dès lors, le théorème de M. Picou peut être vrai sous cette réserve que les facteurs premiers impairs de A soient de la forme $4n+1$; résolvant la congruence (8), on a

$$a P_n \equiv \pm P_m P_p \pmod{A}$$

ou encore

$$a P_n \pm P_m P_p = \mu A \qquad (\mu = \text{entier}).$$

Exemple : $A = 2.5.17.29.37 = 182410$. Développant $\sqrt{A}$ en fraction continue, on trouve les réduites

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{4271}{10}, \qquad \frac{P_8}{Q_8} = \frac{761083}{1782}, \qquad \frac{P_{13}}{Q_{13}} = \frac{12590891191}{29480317},$$

$$D_2 = 441 = ab, \qquad D_8 = 49 = b, \qquad D_{13} = 9 = a.$$

Substituant dans (8), on a

$$a^2 P_8^2 + P_2^2 P_{13}^2 = \rho A.$$

E.-B. Escott (Ann Arbo

[Trad

2608. (1903, 154) (Prompt). —

de M. *E.-A. Majol* co

2680. (**1903**, 277) (H. Brocard). — *Équation* $x^2 - ay^2 = -z^2$. — Si l'on recherche toutes les solutions réelles et entières de l'équation proposée, l'intervention des imaginaires n'est pas indispensable.

On les obtient, en effet, à l'aide des formules

$$(1) \qquad a = m^2 + n^2,$$

$$(2) \qquad y = K(A^2 + B^2),$$

$$(3) \qquad x = mK(A^2 - B^2) \pm 2nK.AB,$$

$$(4) \qquad z = nK(A^2 - B^2) \mp 2mK.AB;$$

les seuls cas d'impossibilité étant ceux où la décomposition (1) ne peut s'effectuer, c'est-à-dire ceux pour lesquels a contient un diviseur premier $4h + 3$ à une puissance impaire.

Le maniement des nombres idéaux me paraît d'ailleurs bien délicat et devoir conduire aisément à des résultats incertains et même inexacts. P.-F. Teilhet.

2699. (**1903**, 303) (P.-F. Teilhet). — *Solution d'une équation indéterminée de troisième degré.* — Considérons l'équation comme celle d'une courbe. Prenons la tangente au point (x_0, y_0). Elle coupe la courbe en un second point (x_1, y_1) dont les coordonnées sont évidemment rationnelles. Le procédé peut être répété en ce dernier point, etc. Cette méthode est en défaut si (x_0, y_0) est un point d'inflexion ou si la tangente est parallèle à une asymptote.

E.-B. Escott (Ann Arbor).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2720. (**1904**, 9) (N. Plakhowo). — *Décomposition d'un nombre en une somme des entiers consécutifs* (**1904**, 132). — Autre réponse analogue de M. Nazarevsky (Kharkov). La Rédaction.

2744 et **2745**. (**1904**, 67) (G. Picou). — *Congruence* (**1904**, 180, 181, 263). — Autres réponses de MM. Escott et Pellet.

La Rédaction.

2766. (**1904**, 94) (*Doubt*). — *Inflexions réelles de cubiques sans point double.* — A titre de renseignement et seulement pour indiquer les types de cubiques ayant un seul point d'inflexion ou dépour-

vues de point double et d'inflexion réel, je ferai les simples remarques suivantes :

a, *b*, *c* étant trois nombres, l'équation

$$y = (x - a)(x - b)(x - c)$$

représente une cubique sans point double et à unique point d'inflexion, ayant pour abscisse

$$x = \frac{a + b + c}{3}.$$

Lorsque l'équation du troisième degré est

$$x^3 + px + q = 0,$$

l'unique point d'inflexion de la cubique

$$y = x^3 + px + q$$

est l'origine.

Ces cubiques sont unipartites.

Parmi les cubiques bipartites présentant les mêmes singularités, on peut citer le *trident de Newton*

$$y = \frac{x^3 - ax^2 + 2abc}{2cx}.$$

Voir aussi TERQUEM (*N. A.*, 1850, p. 385). H. BROCARD.

La portée de ma question est la suivante : la théorie des points d'inflexion fournit pour la courbe générale du troisième degré neuf points d'inflexion, dont six au moins sont imaginaires; peut-il y en avoir huit, à distance finie ou non, qui soient imaginaires? Je me contenterais d'exemples particuliers établissant l'affirmative.

Il resterait donc à examiner à ce point de vue les courbes citées par M. Brocard. *Doubt.*

2783. (**1904**, 117) (E.-N. BARISIEN). — *Maximum de l'aire d'un triangle* (**1904**, 248). — Réponse de M. A. Tafelmacher (Santiago, Chili) analogue à celle de M. A. Boutin. LA RÉDACTION.

2786. (**1904**, 118) (T. HAYASHI). — Pour aider à classer le problème au point de vue de la nature de la construction demandée :

Soient O le premier cercle donné, ABC le triangle cherché, inscrit

au cercle O et dont les côtés sont tangents à trois autres cercles *a*, *b*, *c*.

Supprimons tout ce qui se rapporte au cercle *c*.

Il restera l'angle mobile ACB dont le sommet C parcourt la circonférence O tandis que les deux côtés CA, CB s'appuient sur les deux cercles *a*, *b*.

Cela posé, quelle est dans ces conditions l'enveloppe de la corde AB?

Sans entrer dans le détail de cette recherche qui n'offre sans doute pas de difficulté particulière, je me bornerai à dire que si l'enveloppe n'est pas un cercle, le problème proposé n'est pas susceptible de construction par la règle et le compas.

Sans préjudice de la nature de l'enveloppe, les tangentes communes à cette courbe et au cercle *c* représentent toutes les solutions de la question.

Il ne restera plus qu'à mener des points A et B les tangentes aux cercles *a* et *b*, à condition qu'elles se rencontrent sur la circonférence O. H. Brocard.

2790. (**1904**, 137) (H. Brocard). — *La divisibilité dans la numération binaire.* — Dans les systèmes tétractique et octaval il est aussi facile que dans le système décimal d'établir les conditions de divisibilité par 10, 10 — 1, 10 + 1 et leurs diviseurs. Or les chiffres tétractiques et octavaux sont équivalents respectivement à des tranches de deux ou de trois chiffres du système binaire. Il sera donc facile de déduire les conditions de divisibilité par certains nombres binaires en remplaçant dans les conditions ci-devant les sommes ou différences de chiffres par des sommes ou différences de tranches bichiffres ou trichiffres. Ces résultats pourront alors être démontrés directement.

Point de renseignement bibliographique. Ch. Berdellé.

2793. (**1904**, 138) (V. Aubry). — *Sur la représentation des imaginaires* (**1904**, 297; **1905**, 58). — Il ne sera pas superflu, croyons-nous, de constater d'abord que, dans la *représentation* classique des imaginaires de *toute provenance*, B et C, ce ne sont pas ces imaginaires mêmes qui sont en jeu (leur introduction figurative n'étant pas évidemment possible, en soi) mais les deux éléments constitutifs *réels* qui servent à les définir, savoir : *a* et *b*, ou bien ρ et ω,

selon qu'on choisit la forme $a + b\sqrt{-1}$ ou la forme

$$\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega).$$

Il s'ensuit que les quantités réelles ordinaires A, loin d'être des *cas particuliers,* dans le sens strict du mot, des imaginaires proprement dites, ne sont, en fait, que des cas particuliers des éléments réels précités, correspondant à l'une ou à l'autre des hypothèses $b = 0$ ou bien $\omega = 0$.

Que si, d'autre part, on considère que, dans la représentation plane dont nous parlons, les quantités réelles A, quelle que soit d'ailleurs leur origine concrète, se trouvent, toutes, sans distinction aucune, réduites à l'état de *segments,* le long d'une direction axiale unique, alors que les éléments (réels aussi) a et b ou ρ et ω des imaginaires s'étalent librement sur le plan tout entier, et cela, remarquons-le, pour y jouir de propriétés directes et exactes, par rapport à eux sans doute, mais quasi-à-côté et même fautives vis-à-vis des quantités, *sui generis,* auxquelles ils prétendent se substituer; si, dis-je, on considère attentivement ces faits, vraiment anormaux, on se demandera avec raison, ce nous semble, ce qu'on peut bien attendre de général et de concluant de représentations *artificielles* semblables, surtout pour le cas où l'on songerait à s'élever plus haut, je veux dire, jusqu'aux relations vraies et absolues qui, dans la solution des problèmes, ont trait, par exemple, aux imaginaires de l'espace, prises telles quelles.

Sans insister ici sur ce sujet, disons seulement, en ce qui concerne ces dernières quantités, qu'elles ne figureront communément dans les données et les résultats qu'à titre de *projections* sur les trois plans coordonnés que l'on sait, rendant par là même sans objet, selon nous, l'intervention des *quaternions* dans la question présente.

ISSALY.

2818. (**1904**, 213) (G. PICOU). — *Division d'un triangle en quatre parties égales par deux perpendiculaires.* — La parallèle FH à DC′ coupe les côtés AB, BC′, C′A aux points F, G, H. En introduisant la condition de l'équivalence des aires HC′G et AHGB, on voit que

$$\overline{DF}^2 = \frac{d_1 . d_2}{2},$$

d_1 et d_2 désignant les segments AD, BD. La droite perpendiculaire à C′D et partageant le triangle AC′B en deux parties équivalentes coupe AB en E, FH en M, AC′ en N et DC′ en K. On trouve facilement que

$$\overline{AE}^2 = X^2 = \frac{\lambda(d_2 - d_1)}{2} = \frac{\lambda K}{2},$$

λ désignant le segment AS déterminé sur AB par la perpendiculaire en C′ à C′D. Par le point N menons la parallèle NT à C′D.

On a les proportions

$$\frac{AT}{d_1} = \frac{AN}{AC'} = \frac{X}{\lambda}.$$

D'où l'on tire

$$AT = \frac{d_1 X}{\lambda}.$$

Mais, pour le point C′, le triangle ANE est divisé en deux parties équivalentes par FH. On a donc

$$(1) \qquad \overline{TF}^2 = \frac{1}{2} TA.TE.$$

D'autre part,

$$TA + AE = TE = \left(\frac{d_1}{\lambda} + 1\right) X,$$

$$TF = TA - AF = \frac{d_1 X}{\lambda} - d_a.$$

En remplaçant dans (1), on obtient l'équation suivante :

$$(2) \qquad 2\left(\frac{d_1 X}{\lambda} - d_a\right)^2 = \frac{d_1 X^2}{\lambda}\left(\frac{d_1}{\lambda} + 1\right).$$

Introduisant $X^2 = \frac{\lambda K}{2}$, il vient

$$\lambda(4 d_a^2 - K d_1) - 8 d_a d_1 \sqrt{\frac{K}{2}} \sqrt{\lambda} + d_1^2 K = 0.$$

D'où

$$\sqrt{\lambda} = \frac{4 d_a d_1 \sqrt{\frac{K}{2}} \pm d_1 \sqrt{4 d_a^2 K + d_1 K^2}}{4 d_a^2 - K d_1}.$$

Cette valeur est fort compliquée. Nous avons défini l'équivalence des aires AHGB, C′HG par la relation ABC′ = 2HC′G. Il nous

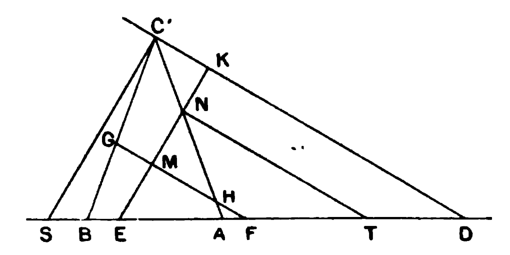
semble qu'il serait préférable de procéder autrement, car la relation $ABC' = 2HC'G$ introduit également la parallèle à DC', située au delà de C' et satisfaisant aussi à l'égalité considérée.

ÉMILE WEBER.

Si M. Weber, dans l'égalité (2), au lieu de remplacer X^2 par sa valeur en λ, avait fait l'inverse, il trouvait la solution assez simple

$$X = AE = \frac{d_1 K}{2(4d_a^2 - d_1 K)}\left[4d_a \pm \sqrt{2(4d_a^2 + d_1 K)}\right].$$

Il est à remarquer que l'angle CDA n'a aucune influence sur le résultat; si donc les points A, B, D sont fixes il en est de même des



points E, F, et le point C' est sur une demi-circonférence de diamètre DS.

G. PICOU.

Autre réponse de M. ESCOTT communiquée à M. G. PICOU.

2850. (**1904**, 283) (E.-N. BARISIEN). — *Intégrales définies.* — En appelant I_1, I_2, I_3 les intégrales proposées, il vient, si l'on pose $t = \tang\theta$,

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t^2+1)^2\,dt}{(At^2+B)^2(Ct^2+D)},$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{(At^2+B)^2(Ct^2+D)},$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4\,dt}{(t^2+1)^2(At^2+B)^2(Ct^2+D)},$$

intégrales de fonctions rationnelles, que l'on calculera d'après la méthode des résidus, en intégrant le long d'un contour fermé formé

d'une demi-circonférence de rayon très grand R ayant l'origine comme centre et située au-dessus de l'axe réel, et du diamètre qui coïncide avec l'axe réel, et faisant ensuite grandir R indéfiniment.

Pour le calcul de I_2 et de I_3 on pourrait faire usage de la remarque que

$$\frac{d}{dA}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(At^2+B)(Ct^2+D)}=-2I_2,$$

$$\frac{d}{dA}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2(At^2+B)(Ct^2+D)}=-2I_3.$$

On trouve

$$I_1=\pi\left[\frac{(C-D)^2}{2C(AD-BC)^2}\sqrt{\frac{C}{D}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{A-B}{AB(AD-BC)}\left(2+\frac{A-B}{2B}-\frac{C(A-B)}{AD-BC}\right)\right],$$

$$I_2=\frac{\pi}{4}\,\frac{(\sqrt{AD}-\sqrt{BC})^2\sqrt{AB}}{AB(AD-BC)^2}=\frac{\pi}{4\sqrt{AB}(\sqrt{AD}+\sqrt{BC})^2},$$

$$I_3=\pi\left[\frac{CD\sqrt{CD}}{2(C-D)^2(AD-BC)^2}\right.$$
$$+\frac{1}{(A-B)^2(C-D)}\left(\frac{3}{2}-\frac{2A}{A-B}-\frac{C}{C-D}\right)$$
$$\left.-\frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2(AD-BC)}\left(\frac{3}{2}+\frac{2B}{A-B}+\frac{BC}{AD-BC}\right)\right].$$

M. Plancherel (Fribourg, Suisse).

Si, dans l'intégrale

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(A\sin^2\theta+B\cos^2\theta)^2(C\sin^2\theta+D\cos^2\theta)},$$

on pose $\tang\theta=x$, $\frac{B}{A}=\alpha^2$, $\frac{D}{C}=\beta^2$, il vient

$$A^2CI_1=\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)^2\,dx}{(x^2+\alpha^2)^2(x^2+\beta^2)}.$$

Or

$$\frac{(1+x^2)^2}{(x^2+\alpha^2)^2(x^2+\beta^2)}=\frac{A_0}{(x^2+\alpha^2)^2}+\frac{A_1}{x^2+\alpha^2}+\frac{B_0}{x^2+\beta^2}.$$

Il s'ensuit

$$A_2 C I_1 = \left[\frac{A_0}{2\alpha^3}\left(\frac{\alpha x}{x^2+\alpha^2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\alpha}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{A_1}{\alpha}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\alpha} + \frac{B_0}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\beta}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{A_0}{2\alpha^3} + \frac{A_1}{\alpha} + \frac{B_0}{\beta}\right)$$

et

$$I_1 = \frac{\pi}{2A^2C}\left(\frac{A_0}{2\alpha^3} + \frac{A_1}{\alpha} + \frac{B_0}{\beta}\right),$$

où

$$A_0 = \frac{(1-\alpha^2)^3}{\beta^2-\alpha^2} = \frac{C}{A}\,\frac{(A-B)^2}{AD-BC},$$

$$A_1 = -\frac{(1-\alpha^2)(1+\alpha^2-2\beta^2)}{(\alpha^2-\beta^2)^2} = -C\,\frac{(A-B)(AC+BC-2AD)}{(BC-AD)^2},$$

$$B_0 = \frac{(1-\beta^2)^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2} = A^2\,\frac{(C-D)^2}{(BC-AD)^2},$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{B}{A}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{D}{C}}.$$

En traitant de même

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta}{(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^2(C\sin^2\theta + D\cos^2\theta)},$$

on obtient

$$A^2 C I_2 = \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+\alpha^2)^2(x^2+\beta^2)}.$$

Or

$$\frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^2(x^2+\beta^2)} = \frac{C_0}{(x^2+\alpha^2)^2} + \frac{C_1}{x^2+\alpha^2} + \frac{D_0}{x^2+\beta^2},$$

de sorte que

$$A^2 C I_2 = \left[\frac{C_0}{2\alpha^3}\left(\frac{\alpha x}{x^2+\alpha^2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\alpha}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{C_1}{\alpha}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\alpha} + \frac{D_0}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\beta}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{C_0}{2\alpha^3} + \frac{C_1}{\alpha} + \frac{D_0}{\beta}\right)$$

et

$$I_2 = \frac{\pi}{2A^2C}\left(\frac{C_0}{2\alpha^3} + \frac{C_1}{\alpha} + \frac{D_0}{\beta}\right),$$

où

$$C_0 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2} = C\frac{B}{BC-AD},$$

$$C_1 = \frac{\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2} = AC^2\frac{B}{(BC-AD)^2},$$

$$D_0 = -\frac{\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2} = -AC^2\frac{B}{(BC-AD)^2},$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{B}{A}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{D}{C}}.$$

En introduisant ces valeurs dans I_2, il vient

$$I_2 = \frac{\pi}{4A^2C}\,\frac{\alpha^2-\beta^2+2\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)^2} = \frac{\pi}{4A^2C}\,\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)^2}$$
$$= \frac{\pi}{4A^2C}\,\frac{1}{(\alpha+\beta)^2},$$

et enfin

$$I_2 = \frac{\pi}{4\sqrt{AB}}\,\frac{1}{(\sqrt{AD}+\sqrt{BC})^2}.$$

Si

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta}{(A\sin^2\theta+B\cos^2\theta)^2(C\sin^2\theta+D\cos^2\theta)},$$

on trouve de même

$$A^2CI_3 = \int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{(x^2+\alpha^2)^2(x^2+\beta^2)(x^2+1)^2}.$$

Or

$$\frac{x^4}{(x^2+\alpha^2)^2(x^2+\beta^2)(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{E_0}{(x^2+\alpha^2)^2} + \frac{E_1}{x^2+\alpha^2} + \frac{G_0}{x^2+\beta^2} + \frac{H_0}{(x^2+1)^2} + \frac{H_1}{x^2+1}.$$

Il s'ensuit

$$A^2CI_3 = \left[E_0\frac{1}{2\alpha^3}\left(\frac{\alpha x}{x^2+\alpha^2}+\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\alpha}\right)\right.$$
$$+\frac{E_1}{\alpha}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\alpha}+\frac{G_0}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\beta}$$
$$\left.+\frac{H_0}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arc\,tang}x\right)+H_1\operatorname{arc\,tang}x\right]_0^\infty$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{E_0}{2\alpha^3}+\frac{E_1}{\alpha}+\frac{G_0}{\beta}+\frac{H_0}{2}+H_1\right).$$

et

$$I_3 = \frac{\pi}{2A^2C}\left(\frac{E_0}{2\alpha^3} + \frac{E_1}{\alpha} + \frac{G_0}{\beta} + \frac{H_0}{2} + H_1\right),$$

où

$$E_0 = \frac{\alpha^4}{(\beta^2-\alpha^2)(1-\alpha^2)^2} = \frac{AB^2C}{(AD-BC)(A-B)^2},$$

$$E_1 = \alpha^2\frac{\alpha^2+\alpha^4-2\beta^2}{(\beta^2-\alpha^2)^2(1-\alpha^2)^3} = A^2BC\frac{ABC+B^2C-2A^2D}{(AD-BC)^2(A-B)^3},$$

$$G_0 = \frac{\beta^4}{(\alpha^2-\beta^2)^2(1-\beta^2)^2} = \frac{A^2C^2D^2}{(BC-AD)^2(C-D)^2},$$

$$H_0 = \frac{1}{(\alpha^2-1)^2(\beta^2-1)} = \frac{A^2C}{(B-A)^2(D-C)},$$

$$H_1 = \frac{1+\alpha^2-2\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2-1)^3(\beta^2-1)^2} = A^2C\frac{AC+BC-2BD}{(B-A)^3(D-C)^2},$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{B}{A}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{D}{A}}.$$

H. Amstein (Lausanne).

Autre réponse de M. E.-B. Escott qui indique les valeurs de I_1, I_2, trouvées par M. Plancherel, et

$$I_3 = \frac{\pi}{4}\,\frac{2\sqrt{CD}(\sqrt{A}+\sqrt{B})+C\sqrt{B}+D\sqrt{A}}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})^3(\sqrt{C}+\sqrt{D})^2(\sqrt{BC}+\sqrt{AD})^2}.$$

2858. (**1905**, 5) (Mannheim). — *Notation abrégée.* — La *notation abrégée* a été imaginée et appliquée par Bobillier en France (*voir* plusieurs articles dans les *Annales* de Gergonne) et par Plücker en Allemagne (voir *Cr.*, t. **5**, **10**, **11** et **34**). On peut la dire un enfant qui a eu deux pères! G. Loria (Gênes).

M. Darboux, dans son discours : *Development of geometrical methods,* lu à Saint-Louis, attribue la découverte à Bobillier et Plücker. N. Quint (La Haye).

Voir : Plücker, *Analytisch-geometrische Entwickelungen,* t. I, 1828, et t. II, 1831 ; *Cr.,* t. **5**, 1830, p. 268-286, en particulier note de la page 284 et l'observation du n° **18**, p. 286.

G. Jung (Milan).

Voir A. Clebsch, *Leçons sur la Géométrie,* t. I, note de la page 45 (Paris, 1879), où sont cités J. Plücker et E. Bobillier (*A. G.*, t. XVIII, 1827-1828). E.-B. Escott (Ann Arbor).

2839. (**1905**, 5) (NAZAREVSKY). — *Sous quelles conditions a lieu la congruence*

$$(a+\sqrt{b})^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

le nombre p étant premier, et a et b étant deux entiers non divisibles par p, dont le dernier n'est pas carré parfait? — Il faut et il suffit que b soit un résidu quadratique de p, et que l'on n'ait pas

$$a^2 \equiv b \pmod{p}.$$

En effet, en tenant compte de la congruence

$$C_{p-1}^k = \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-k)}{1.2\ldots k} \equiv (-1)^{k-1} \pmod{p},$$

la congruence supposée se décompose dans les deux suivantes

$$\left.\begin{aligned} a^{p-1} + a^{p-3}b + a^{p-5}b^2 + \ldots + a^2 b^{\frac{p-3}{2}} + b^{\frac{p-1}{2}} &\equiv 1 \\ a^{p-2} + a^{p-4}b + a^{p-6}b^2 + \ldots + ab^{\frac{p-3}{2}} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{p},$$

d'où l'on conclut tout d'abord

$$b^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p},$$

ce qui caractérise un résidu quadratique de p, ce module étant premier. Il suffit, d'autre part, que b soit un résidu quadratique, car ayant

$$b \equiv x^2 \pmod{p},$$

la congruence

$$a^{p-2} + a^{p-4}b + a^{p-6}b^2 + \ldots + ab^{\frac{p-3}{2}} \equiv 0 \pmod{p}$$

devient, suppression faite du facteur a, incongru à p,

$$a^{p-3} + a^{p-5}x^2 + a^{p-7}x^4 + \ldots + x^{p-3} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Or, il existe un nombre y tel que l'on ait

$$xy \equiv 1 \pmod{p},$$

de sorte qu'en désignant par z le résidu de ay suivant le module p, on trouve

$$z^{p-3} + z^{p-5} + z^{p-7} + \ldots + z^4 + z^2 + 1 \equiv \frac{z^{p-1}-1}{z^2-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

et, comme z est moindre que p, on peut faire abstraction du dénominateur, sauf le cas où l'on aurait $z = 1$ ou $z = p - 1$; en dehors de cette supposition, la congruence se trouve donc satisfaite d'elle-même.

L'exception qui se présente entraînant l'alternative

$$\left.\begin{array}{ll} ay \equiv 1, & ay \equiv -1 \\ 1 \equiv xy, & 1 \equiv \quad xy \end{array}\right\} \pmod p,$$

revient à admettre que l'une ou l'autre des égalités suivantes est vérifiée :

$$a = x, \qquad a + x = p;$$

en d'autres termes, elle ne saurait se produire que si a est racine carrée de b selon le module p, hypothèse que l'on a écartée d'avance. E. Malo.

Soient a, b, c des nombres entiers non divisibles par p; c non carré parfait; on peut supposer qu'il ne renferme que des facteurs premiers distincts. Soit $r = \sqrt{c}$.

On demande la condition pour que

$$(a + br)^{p-1} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

Cette congruence est équivalente à

$$(a + br)^p \equiv a + br.$$

Or

$$(a + br)^p \equiv a^p + b^p r^p,$$

et, d'après le théorème de Fermat, $\equiv a + br^p$, p étant premier.

Deux cas à distinguer :

1° c est résidu quadratique

$$c^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\, p) \qquad \text{ou} \qquad r^{p-1} \equiv 1.$$

D'où

$$r^p \equiv r.$$

On a donc

$$(a + br)^p - (a + br) \equiv 0,$$

ce qui donne

$$(a + br)^{p-1} - 1 \equiv 0.$$

Donc, il suffit que c soit résidu.

2° c n'est pas résidu.

On a

$$c^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1, \qquad r^{p-1} \equiv -1, \qquad r^p \equiv -r,$$

$$(a+br)^p \equiv a - br \not\equiv a + br.$$

La congruence n'est pas vérifiée. $N = a + br$ vérifie alors la congruence

$$N^{p-1} + 1 \equiv 0 \qquad \text{ou encore} \qquad N^{p^2-1} \equiv 1.$$

J. Sadier.

Autre réponse de M. E.-B. Escott, qui arrive aux mêmes conclusions.

2862. (**1905**, 6) (T. Lemoyne). — *Montrer géométriquement que le centre de gravité d'un triangle circonscrit à une parabole et inscrit dans une conique donnée décrit une droite.* — Je suppose que la conique soit une ellipse : alors, par une projection cylindrique, on transforme la figure en une autre où l'ellipse est remplacée par un cercle (passant, comme on sait, par le foyer de la nouvelle parabole). Or, dans ce cas, le lieu du centre de gravité est homothétique par rapport au centre du cercle, qui est fixe, du lieu décrit par le point de concours des hauteurs, point qui, d'après Steiner, appartient à la directrice de la nouvelle parabole. Le lieu est donc bien une droite dans la figure primitive.

La proposition établie si simplement pour le cas de l'ellipse s'étend au cas des coniques à branches infinies par le raisonnement suivant.

En la transformant par la méthode des polaires réciproques, le centre du cercle auxiliaire étant au foyer de la parabole, on obtient l'énoncé suivant :

Lorsqu'un triangle mobile est à la fois inscrit dans un cercle S *et circonscrit à une conique* Σ, *la polaire, par rapport au triangle, d'un point fixe du cercle, pivote autour d'un point fixe.*

Cet énoncé est manifestement *projectif,* et, pour lui donner sa forme la plus générale, il n'y a qu'à substituer le mot *conique* au mot *cercle :* il est exact, puisqu'il est démontré lorsque la conique de la figure primitive qui correspond à la conique Σ est une ellipse. Réciproquement, la proposition primitive est toujours vraie parce qu'on la transforme toujours dans le même théorème projectif.

Il y a lieu de remarquer que, plus généralement, le centre de

gravité d'un triangle inscrit à une conique et circonscrit à une autre décrit une conique. La forme projective du théorème est la suivante : *Lorsqu'un triangle mobile est à la fois inscrit dans une conique et circonscrit à une autre, le pôle, par rapport au triangle, de toute droite fixe décrit une conique; la polaire de tout point fixe enveloppe une conique.* E. MALO.

Dans les *Annales de Math.*, par Gergonne, on trouve le théorème suivant (théorème proposé à démontrer à la page 134) qui est démontré par Steiner dans le même journal (t. XIX, p. 37-64) :

Les intersections des trois hauteurs H *de tous les triangles* ABC *circonscrits à une même parabole sont toutes situées sur la directrice de cette courbe.*

Si le triangle variable ABC *est, de plus, inscrit à un cercle avec le centre fixe* M, *le centre de gravité* G *est situé sur une parallèle à cette directrice parce que* GM : HM = 1 : 3 (Euler).

De cette manière, la propriété est démontrée au cas où la conique est un cercle. Si la conique est une ellipse, on peut projeter la figure par des rayons parallèles ainsi que la projection de l'ellipse et un cercle. La parabole, le centre de gravité et la ligne droite sont projetés les mêmes. Ainsi le théorème est juste pour l'hyperbole et pour la parabole. WEINMEISTER (Tharandt, Saxe).

2864. (1905, 8) (E. MAILLET). — *Fonctions entières.* — La question que M. Maillet a proposée m'a aussi intéressé il y a quelques mois. J'ai cru utile de publier la réponse suivante qui contribue, dans une certaine mesure, à la résolution de la question.

Les raisonnements, utilisés par M. Wiman pour mettre en lumière les conditions dans lesquelles se présente le cas où les inégalités établies par MM. Boutroux et Lindelöf entre l'ordre de grandeur de module maximum et la distribution des *zéros* ne sont plus vérifiées, comportent quelques résultats relatifs à la question de M. Maillet.

M. Wiman a démontré, dans un travail paru dans les *Arkiv för matematik, astronomi of fysik utgifvet of k. svenska vetenskapsakademien* (1) (1904, Band I), qu'une fonction entière $F(z)$

(1) *Voir* aussi : A. WIMAN, *Sur le genre de la dérivée d'une fonction entière et sur le cas d'exception de M. Picard* (*C. R.*, 18 janvier 1905), ou bien ma Note : *Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes* (*C. R.*, 20 juin 1904).

peut être toujours décomposée comme il suit

$$(1) \qquad F(z) = F_1(z)e^{q\frac{z^\rho}{\rho}},$$

ρ étant l'ordre, q une quantité ne dépendant que de r, et $F_1(z)$ une fonction qui obéit aux inégalités de MM. Boutroux et Lindelöf.

Ceci posé, la question qui nous occupe revient à rechercher les cas où $F(z)$ *étant à croissance régulière, il n'en est pas de même de* $F_1(z)$.

Supposons que ce cas se présente, et donnons-nous un nombre ε positif arbitrairement petit; il y aura alors une infinité de valeurs de r, de module croissant indéfiniment, qui satisferont à l'inégalité

$$(2) \qquad |F_1(z)| < e^{r^{\rho-\varepsilon}}.$$

Dans la plupart des cas on peut constater que ces intervalles I_ε, satisfaisant à l'inégalité (2), renferment des intervalles Δ_ε satisfaisant aussi à l'inégalité

$$(3) \qquad |F_1(z)| > e^{-r^{\rho-\varepsilon}}.$$

De tels exemples ont été donnés par M. E. Borel dans son Livre *Sur les fonctions entières* (Note III à la fin du Volume), où il forme une fonction $\omega(z)$, à croissance irrégulière, qui jouit bien de la propriété précitée.

Bien que la chose me paraisse vraie d'une façon générale, je n'en connais aucune démonstration générale.

Les intervalles I_ε peuvent bien être appelés *intervalles d'irrégularité correspondant au nombre positif* ε.

Les inégalités (2) et (3) prouvent immédiatement que la *réciprocité entre le module minimum et le module maximum,* signalée par M. Wiman dans son travail déjà cité, apparaît, pour la fonction $F(z)$, sur les cercles appartenant aux intervalles Δ_ε.

C'est encore un cas d'exception pour les intervalles I_ε ou bien Δ_ε, puisque la fonction

$$F(z) + f(z),$$

où $f(z)$ désigne une fonction entière d'ordre ρ', inférieur à ρ, ne saurait présenter la même réciprocité entre le module minimum et le module maximum sur des intervalles Δ_ε (renfermés par les I_ε).

Ainsi les intervalles I_t *ne seront plus des intervalles d'irrégularité pour la fonction* $F(z)+f(z)$, et cela, aussi petit que soit ε donné d'avance. Ces remarques me semblent renfermer le germe de la résolution du problème et une étude approfondie dans cette voie nous conduirait au but. Nos remarques présenteraient un grand intérêt si l'on pouvait démontrer, d'une façon générale, que les intervalles d'irrégularité renferment toujours des valeurs de r satisfaisant à l'inégalité (3).

On aurait alors ce fait important que les fonctions

$$F(z) \quad \text{et} \quad F(z)+f(z)$$

ne sauraient jamais admettre les mêmes intervalles d'irrégularité.

GEORGES RÉMOUNDOS (Athènes).

2892. (**1905**, 52) (*Matito*). — *Récent concours d'aviation.* — Le rapport officiel du concours a paru dans l'*Aérophile* de mars 1905 (84, faubourg Saint-Honoré, Paris) et répond à la question.

En ce qui concerne la Communication de M. Brillouin, il faut remarquer que la conclusion ne peut s'appliquer qu'aux planeurs que M. Brillouin a en vue et qui sont tels : « qu'à une vitesse (vecteur) quelconque correspond une réaction de l'air déterminée et fixe par rapport au planeur. »

Ce genre d'aéroplane-là est bien mauvais et l'on s'efforce de ne pas en construire, parce que, en effet, ils emportent à travers l'espace l'hérédité des circonstances initiales de lancement toujours mauvaises.

M. Brillouin s'est un peu hâté de généraliser et surtout de s'appuyer prématurément sur des expériences dont il n'a pas cherché à fouiller les détails. Ainsi au concours d'aviation un même planeur lancé à diverses reprises a suivi tantôt une hélice, tantôt une ligne droite : c'est vrai ; mais entre chaque expérience l'aviateur modifiait quelque chose. Parmi les quatre lauréats, Dargent plissait une aile, Henrion braquait différemment un gouvernail vertical, Papet surchargeait une aile et Burdin plaçait une oreillette. Henrion et Papet ont modifié à volonté le sens de leur hélice. FERBER.

QUESTIONS.

705. [O2d] (1896, 8) Les surfaces constituées par les centres de gravité de tous les arcs d'une courbe gauche peuvent-elles être à courbure moyenne ou totale constante?

CESÀRO (Naples).

711. [J2f] (1896, 9) Connaît-on la généralisation suivante du problème de l'aiguille, de Leslie Ellis : « Sur une surface, plane ou courbe, d'aire S, on jette deux fils de longueurs a et b; le nombre moyen de leurs points de rencontre tend, quand le nombre des épreuves croît indéfiniment, vers la limite $\frac{2ab}{\pi S}$? »

E. DUPORCQ.

718. (SUJET D'ÉTUDE) (1896, 11) La théorie géométrique des tours composés n'a jamais été traitée complètement. C'est un travail très utile et très fécond qui reste à faire; il n'y a peut-être à citer sur le sujet que quelques pages çà et là, relatives aux courbes épicycloïdales obtenues avec les tours à équipages mobiles, des Notes de Poncelet sur les tours à graver, d'anciens écrits de La Condamine, une Note de Chasles dans l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie* (Bruxelles, 1837), Note XXXIV, p. 409; enfin un *très intéressant* Mémoire, assez peu connu, qui pourrait former un des Chapitres de cette théorie et qui a pour titre : *Théorie des tours à ovale,* par L. Dreyfus, publié dans le *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale,* 1873.

E. LEMOINE.

720. [H3t] (1896, 11) L'équation différentielle suivante, que j'ai rencontrée dans une question de Physique

mathématique, a-t-elle été résolue :

$$ay\frac{d^2y}{dx^2} + bx\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + cy\frac{dy}{dx} + xy^n = 0,$$

n étant un nombre positif? J. Rey.

721. [**K6b**] (**1896**, 12) Les deux équations

$$F(u, v) = 0, \qquad f(w, t) = 0$$

étant les équations d'une même courbe dans deux systèmes de coordonnées différents, dans quels cas ces deux équations seront-elles toutes deux algébriques ou toutes deux transcendantes? M. Servant.

726. (Sujet d'étude) (**1896**, 29) Détermination du centre de gravité de l'intensité lumineuse qui se trouve répartie sur une surface courbe placée dans des conditions définies d'éclairement. Établir, au moyen du Calcul intégral, les formules les plus générales que paraît comporter la question. Appliquer à des cas spéciaux susceptibles de conduire à des résultats intéressants. Je citerai, comme exemple, le cas le plus élémentaire, celui d'une sphère illuminée par un point extérieur, qui en fournit un très simple.

Haton de la Goupillière.

728. [**V7, 8**] (**1896**, 30) Jacques Bernoulli a publié, en 1700, une petite brochure intitulée : Jacobi Bernoulli *ad fratrem suum Johannem Bernoulli epistola; cum annexâ solutione propriâ problematis isoperimetrici* (Basilæ, in-4°). Une partie de cette brochure a été insérée dans les *Acta Eruditorum* (1700, p. 261-266) et le reste en a été réimprimé par Bossut dans le journal *Observations sur la Physique, sur l'Histoire naturelle et sur les Arts,* dirigé par l'abbé Rozier (t. XLI, 1792, p. 161-173). Connaît-on actuellement quelque exemplaire de cette brochure et, dans ce cas, le titre indiqué ci-dessus est-il exact?

G. Eneström (Stockholm).

729. [M¹1a] (**1896**, 30) Dans l'Appendice qu'il a ajouté au *Traité des courbes planes,* de Salmon, Halphen rapporte comme étant dû à M. Édouard Weyr le théorème suivant :

Si, sur une courbe algébrique quelconque, on veut déterminer les points par groupes au moyen des intersections de la courbe avec les courbes d'un faisceau, et cela de telle sorte qu'un des groupes puisse être pris à volonté, le minimum du nombre des points d'un groupe surpasse d'une unité le genre de la courbe.

A-t-on démontré ce théorème pour des courbes qui n'ont que des points doubles, d'une manière rigoureuse, sans recourir à la théorie des intégrales abéliennes? Si ce n'est pas fait, il y aurait intérêt à le faire. L. Raffy.

731. [O2b] (**1896**, 31) Quelles sont les courbes dont on peut déterminer la nature sans effectuer d'intégration, lorsque l'on connaît une propriété de leurs normales?

Mannheim.

739. [K13c] (**1896**, 32) A-t-on étudié deux tétraèdres homologiques ou hyperboloïdiques dont les faces homologues sont perpendiculaires? *Grebuen.*

741. [A5b] (**1896**, 33) Par la résolution d'un système d'équations linéaires on peut trouver une fonction $J = f(x)$ du degré $m - 1$ qui, pour n valeurs de x ($n < m$), prenne certaines valeurs assignées, et dont la dérivée $J' = f'(x)$, pour $m - n$ des valeurs données aussi, prenne autant de valeurs correspondantes; peut-on obtenir une expression plus simple que celle que donne la méthode directe?

J. Duran-Loriga (La Corogne).

754. [I9] (**1896**, 37) Soit r_q le plus petit reste de

$$\sum_{i=0}^{i=q-1} 2^{2q-(2i+1)} C_{2i+1,\,i}$$

par rapport au module $2q+1$. On démontre que, *si* $2q+1$ *est premier, on a*

$$r_q = -1.$$

Peut-on affirmer que, si $r_q = -1$, le nombre $2q+1$ est premier? J'ai vérifié que cela a lieu jusqu'à $q = 12$, et il est désirable qu'un calculateur plus habile pousse plus loin la vérification, afin de voir si la proposition énoncée a quelque chance d'être vraie. C. Pietrocola (Naples).

755. [**V9**] (**1896**, 37) Un correspondant pourrait-il indiquer une bibliographie des Mémoires de Legendre non publiés à part?

A ce sujet, ne serait-il pas intéressant de voir entreprendre une édition des Œuvres complètes de ce géomètre? Sa rencontre avec Gauss sur beaucoup de questions a peut-être fait trop oublier sa grande valeur et son infatigable activité.

H. Bourget.

758. [**V**] (**1896**, 38) Dans une Lettre inédite de Malézieux à Billy, du 20 février 1677, se trouve l'expression *capiangulum* pour désigner un instrument servant à la mesure des angles (il s'agit en particulier de la mesure de la distance de la Lune à une étoile). Cette expression est-elle connue d'ailleurs? S'appliquait-elle à un instrument déterminé? Paul Tannery.

763. [**K9b**] (**1896**, 53) J'ai obtenu la formule suivante pour exprimer le côté c du polygone régulier de n côtés, inscrit dans le cercle de rayon 1 :

$$\frac{1}{12c} = \frac{1}{2n} + \frac{n^2-6^2}{1.2.3}\frac{1}{(2n)^3} + \frac{(n^2-6^2)(3^2n^2-6^2)}{1.2.3.4.5}\frac{1}{(2n)^5}$$
$$+ \frac{(n^2-6^2)(3^2n^2-6^2)(5^2n^2-6^2)}{1.2.3.4.5.6.7}\frac{1}{(2n)^7} + \ldots;$$

la vérification en est facile pour $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Cette formule est-elle connue? Oppert.

767. [Q4bα] (1896, 54) En généralisant la question, qui consiste à disposer en carré les quatre quatrièmes majeures d'un jeu de cartes, de manière que, dans chaque bande horizontale, verticale et diagonale, on trouve dans un ordre quelconque un as, un roi, une dame et un valet, et en même temps un cœur, un carreau, un pique et un trèfle (question XI des *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet de Méziriac), je suis parvenu à construire tous les carrés magiques.

Est-on arrivé, jusqu'à présent, à déterminer complètement, par la méthode précitée ou autrement, les carrés magiques pairs, impairs et pairement impairs, c'est-à-dire les carrés magiques des 2^{2k}, $(2r+1)^2$ et $2^{2k}.(2r+1)^2$ premiers nombres? E. Barbette (Liége).

790. [V5b] (1896, 60) Le savant norvégien Hauk Erlendsson, juge provincial et conseiller d'État (né vers 1264, mort en 1334), a composé un Traité d'*Algorismus* embrassant essentiellement le même programme que l'*Algorismus* de Sacrobosco. Mais, à la fin de son *Algorismus*, Hauk Erlendsson a ajouté :

1° Une Table des carrés et des cubes des neuf premiers nombres;

2° Quelques spéculations sur la correspondance entre les quatre éléments et les nombres 8, 12, 18, 27; ces spéculations sont au fond les mêmes que celles qu'a proposées Platon dans le dialogue Τίμαιος.

Y a-t-il quelque Traité d'*Algorismus* d'auteur antérieur ou contemporain à Erlendsson où se trouvent ces deux additions? G. Eneström (Stockholm).

791. [V6] (1896, 60) Dans plusieurs Traités de Cosmographie publiés au XVIe siècle (*voir*, par exemple, Apianus, *Cosmographicus liber*, Landshutæ, 1524, p. 39), on donne, pour déterminer la distance *d* entre deux lieux sur la surface de la Terre, une règle équivalant à la formule suivante (où

l, l' sont les longitudes; φ, φ' les latitudes des lieux)

$$d = \sqrt{(l - l')^2 \cos^2 \frac{\varphi + \varphi'}{2} + (\varphi - \varphi')^2}.$$

Quel est le premier auteur qui ait indiqué cette règle?

G. ENESTRÖM (Stockholm).

1293. [L¹9a] (1898, 124; 1899, 17) Un correspondant m'obligerait s'il voulait bien m'indiquer comment calculer la partie de l'aire d'un cercle comprise dans une ellipse qui lui est concentrique : a et b désignant les demi-axes de l'ellipse, r le rayon du cercle, on suppose $a > r > b$. *Hadé.*

1294. [L²20b] (1898, 124; 1899, 17) Question analogue à la précédente : calculer le volume commun à une sphère de rayon r et à un ellipsoïde concentrique ayant pour demi-axes a, b, c. On suppose $a > b > c$ et $a > r > c$.

Hadé.

M. *Hadé* désirerait vivement une solution de ces deux questions obtenue au moyen d'intégrations. LA RÉDACTION.

2608. [I3b] (1903, 154) On sait que, si a est un nombre entier, n un nombre premier, le nombre $a^n - a$ est divisible par n. Pour $a = 2$, il est facile de démontrer ce principe sans s'appuyer sur la formule du binome de Newton, et, en général, sans faire usage d'aucune connaissance préalable, en sorte que cette démonstration pourrait être placée au début de l'Arithmétique.

Existe-t-il une démonstration du même genre pour le cas général où a est un nombre quelconque (¹)?

Dr PROMPT (Turin).

(¹) M. Prompt croit, d'après des réponses qui sont parvenues au journal, qu'il ne s'est pas suffisamment expliqué, et qu'il n'a pas été compris. Il tient à la disposition des personnes qui voudraient bien s'intéresser à ce qu'il demande, une brochure qu'il leur enverra aussitôt, si elles veulent bien l'inviter à leur faire cette communication. Il suffirait de lui écrire pour cet objet : *Corso re Umberto*, 34, à Turin (Italie).

2907. **[V]** Un correspondant désirerait savoir quels sont les savants français (particulièrement les mathématiciens) auxquels une statue ou un monument a été élevé (¹); il s'agit de compléter les notices biographiques de ces savants. En particulier, Poinsot a-t-il un monument?

LA RÉDACTION.

2908. **[V]** M. A. Grévy fera connaître prochainement à nos lecteurs, sous ce numéro, dans les réponses l'état d'avancement de la publication allemande intitulée *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften* de MM. H. Burkhardt et F. Meyer (Leipzig, Teubner), œuvre où l'on peut trouver des renseignements étendus sur les connaissances acquises dans une foule de branches des Mathématiques.

LA RÉDACTION.

2909. **[I1 et V]** Je m'occupe à rédiger un opuscule sur les divers systèmes de numération, et serais content de mettre à la suite quelques renseignements historiques et bibliographiques. Je serais donc bien obligé à ceux qui m'en fourniraient, et je me ferais un devoir, si mon opuscule recevait les honneurs de l'impression, de les nommer. Il sera question surtout des trois numérations binaire, tétractique et octavale, et un peu des deux numérations ternaire et nonale.

CH. BERDELLÉ.

2910. **[M¹5kα]** J'ai démontré dans les *N. A.* (numéro de juin 1904) que :

Si par un point quelconque M *d'une cubique de point*

(¹) Exemples pour les statues : Arago, Leverrier, Pasteur, à Paris; Ampère, à Lyon; Fermat, à Beaumont-de-Lomagne (Tarn-et-Garonne); pour les monuments : Darcy, à Dijon. On pourra préciser la nature du monument et ajouter un ou deux détails intéressants; ainsi au pied de la statue de Fermat est gravée l'inscription :

$$x^m + y^m \neq z^m.$$

double O *on mène les deux tangentes* MA, MB *à cette courbe, les droites* OA *et* OB *sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en* O.

Si donc une cubique circulaire de point double O passe par son foyer singulier F, les points de contact des deux tangentes issues de F étant les points cycliques I et J, les droites OI, OJ sont conjuguées par rapport aux tangentes nodales et celles-ci sont, par conséquent, rectangulaires. Il s'ensuit que :

Toute cubique nodale circulaire passant par son foyer singulier est une strophoïde.

Cette propriété caractéristique et intéressante, dont on peut facilement tirer diverses conséquences, est-elle connue? Renseignements bibliographiques.

Elle semble n'avoir pas été aperçue par quelques mathématiciens qui ont cru rencontrer des cubiques nodales circulaires (autres que des strophoïdes) passant par leur foyer singulier.

Mathesis, dans la seule année 1891, en signale deux en réponse à des questions de MM. Brocard et Jerabek (*voir* 2e série, t. I, p. 70 et 120). T. LEMOYNE.

2911. [**J2g**] Depuis 1896, l'article 758 du Code civil français est ainsi conçu :

« Si le père ou la mère a laissé des descendants légitimes, le droit héréditaire de l'enfant naturel est de la moitié de la portion héréditaire qu'il aurait eue s'il eût été légitime. »

M. H. Laurent, dans sa *Théorie des opérations financières* (*Encyclopédie Léauté,* Paris, Gauthier-Villars et Masson), a indiqué trois interprétations possibles de cet article pour un algébriste : l étant le nombre des enfants légitimes, i celui des illégitimes, a l'héritage à partager, on a pour la part d'un enfant illégitime, suivant l'interpré-

tation [1]

$$\frac{1}{2}\frac{a}{i+l}, \quad \frac{a}{2l+i}$$

ou un résultat plus compliqué. Je désirerais connaître, surtout pour $i > 1$, quelle est l'interprétation adoptée par la jurisprudence, et les recueils où l'on trouve sa justification, avec indication à l'appui d'arrêts de Cassation.

Même question pour l'article 759. E. MAILLET.

2912. [**U7** et **8**] Un correspondant pourrait-il me faire connaître les Ouvrages ou Mémoires qui traitent de la *Théorie mathématique* des mouvements de l'atmosphère et de l'Océan, et notamment des *cyclones?*

Je ne connais qu'un seul essai de ce genre : *Théorie des mouvements de l'atmosphère et de l'Océan,* par A. ANSART-DENSY, capitaine de frégate (Paris, Arthus Bertrand, 1877). Il ne me semble pas qu'il ait été tenu compte, dans les Traités de Météorologie parus depuis, des résultats à mon sentiment très intéressants et suggestifs que le calcul a fournis à cet auteur [*comp.* quest. **2033** (**1901**, 39, 240)].

E. REMY.

2913. [**K22a**] Etant donnés deux plans rectangulaires de projection appelés *sol* et *mur,* la cote et l'éloignement d'un point A, le rayon θ d'une sphère, ainsi que la cote et l'éloignement du centre B de celle-ci, avec les projections horizontale et verticale d'une droite CD, un correspondant m'obligerait en m'indiquant les constructions que peuvent fournir les méthodes de la Géométrie descriptive pour la détermination des points E et F d'intersection de la droite CD et de la surface latérale du cône de sommet A circonscrit à la sphère. Je fais observer que l'épure ne doit contenir que des cercles et des droites, et que l'on s'interdit l'usage des

---

[1] Les formules de M. Laurent, relatives à l'ancienne rédaction de l'article en question, ont été modifiées convenablement par moi ici.

méthodes dites *des rotations,* des changements de plans de projection et des rabattements, ces méthodes étant dans le cas que j'ai en vue beaucoup trop compliquées.

PAULMIER.

2914. [K22b] La sphère de la question précédente étant remplacée par un ellipsoïde à trois axes inégaux, deux de ces axes étant respectivement normaux au sol et au mur et le troisième parallèle à la ligne de terre, je demande qu'on veuille bien, en tenant compte des restrictions indiquées, m'enseigner les constructions les plus simples pour déterminer les points de percement de l'ellipsoïde par la droite CD.

PAULMIER.

2915. [I19c] L'équation indéterminée

$$x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + 2y^3 = 1$$

a-t-elle une solution différente de $x = 1$, $y = 0$ [*comp.* rép. à **1360** (**1901**, 147)]. E. LANDAU (Berlin).

2916. [V] J'ai ce théorème :

« La condition nécessaire et suffisante pour que la progression arithmétique $ax + b$ (a, b premiers entre eux) renferme une infinité de puissances $\mu^{\text{ièmes}}$ ($\mu > 1$) de nombres premiers est que b soit un résidu de puissance $\mu^{\text{ième}}$ (mod a). Si cette condition est satisfaite, la progression renferme asymptotiquement, c'est-à-dire pour N assez grand,

$$\frac{m\mathrm{N}^{\frac{1}{\mu}}}{\log \mathrm{N}}(1 + \varepsilon) \qquad (\lim \varepsilon = 0 \text{ pour } \mathrm{N} = \infty)$$

puissances $\mu^{\text{ièmes}}$ de nombres premiers inférieures à N. »

Ce théorème, que je déduis assez facilement du théorème analogue connu (Dirichlet, Hadamard, de la Vallée-Poussin, etc.) pour $\mu = 1$, *a-t-il déjà été énoncé, et où?* Je ne demande qu'un renseignement bibliographique.

E. MAILLET.

RÉPONSES.

574. (**1895**, 79) (G. Cantor). — *Théorème de Goldbach* (**1896**, 75; **1897**, 60; **1903**, 74). — Ce théorème est établi actuellement (**1903**, 168) pour les nombres $N \leqq 5000$. On peut énoncer des théorèmes analogues moins précis, mais que l'on vérifie aisément pour des valeurs de N beaucoup plus grandes à l'aide du Tableau T et d'une formule mentionnée dans ma réponse à **968** (**1905**, 110).

1° Soit p_λ le $\lambda^{\text{ième}}$ nombre premier impair. Je forme

$$P_\lambda^{(0)} = 2p_\lambda \leqq 9.10^6, \qquad p_\lambda + p_{\lambda-1} = P_{\lambda-1}^{(0)}, \qquad \ldots, \qquad p_\lambda + 1 = P_1^{(0)};$$
$$P_{\lambda-1}^{(1)} = 2p_{\lambda-1}, \qquad P_{\lambda-2}^{(1)} = p_{\lambda-1} + p_{\lambda-2}, \qquad \ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots$$

Si Δ est la plus grande des différences $p_i - p_{i-1}$ pour $i \leqq \lambda$, on sait (Tableau T) que $\Delta \leqq 154$. La différence

$$P_i^{(k)} - P_{i-1}^{(k)} \leqq 154 \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

et, de plus, $2p_{\lambda-k} \geqq p_{\lambda-k+1} + 1$ (*postulatum* de Bertrand, que l'on vérifie rapidement avec le Tableau T).

Or, tout nombre pair $\leqq 154$ est la somme de deux nombres premiers. Si $2n$ est un nombre pair $\leqq P_{\lambda-k}^{(k)} = 2p_{\lambda-k}$ et $> p_{\lambda-k}$,

$$2n = p_{\lambda-k} + p_j + \varpi_1 + \varpi_2,$$

où $j \leqq \lambda - k$, et ϖ_1, ϖ_2 sont nuls ou sont deux nombres premiers dont la somme est $\leqq 154$. On peut donc affirmer que :

Tout nombre pair $2n \leqq 9.10^6$ est la somme d'au plus quatre nombres premiers impairs dont un est $\geqq n$.

Il semble assez facile, en sacrifiant au besoin la dernière restriction (dont un est $\geqq n$), de montrer que cette propriété a lieu de plusieurs manières, les nombres pairs $\leqq 154$ (et même $\leqq 5000$) étant,

sauf 2 et 4, de plusieurs manières la somme de deux nombres premiers impairs.

2° Soit p un nombre premier quelconque, $p + \Delta$ le nombre premier immédiatement supérieur $\leqq 9.10^6 - 3$; $\Delta \leqq 154$. Si l'on forme

$$(1) \qquad p+1, \quad p+3, \quad \ldots, \quad p+151, \quad p+157$$

en ajoutant à p tous les nombres premiers < 154 et le nombre premier 157, on obtient beaucoup des nombres pairs compris entre p et $p + \Delta + 3$; la différence entre deux des nombres de la suite (1) ne dépasse pas 14. Ces suites, quand p prend toutes les valeurs possibles, empiètent les unes sur les autres, et elles comprennent, à δ ($\delta \leqq 14$) unités près par défaut, tous les nombres $2n < 9.10^6$.

Cette différence δ se réduira même pour les valeurs de p qui ne sont pas trop grandes; ainsi (Tableau T), si $p + \Delta + 3 \leqq 10^6$,

$$\Delta \leqq 114, \qquad \delta \leqq 8;$$

si $p + \Delta + \leqq 350000$,

$$\Delta \leqq 86, \qquad \delta \leqq 6.$$

Tout nombre pair $\leqq 350000$, 10^6 *ou* 9.10^6 *est, à* 6, 8 *ou* 14 *unités près respectivement, par défaut, la somme de deux nombres premiers.*

Ce résultat entraîne facilement celui que j'ai énoncé tout à l'heure.

Si l'on veut envisager les sommes par défaut ou par excès indifféremment, 6, 8 ou 14 se trouvent remplacés par le plus grand entier contenu dans leur moitié, 2, 4 ou 6.

En prenant, au lieu de (1),

$$p-1, \quad p-3, \quad \ldots, \quad p-151, \quad p-157,$$

p premier ne dépassant pas 9.10^6, on obtient un théorème analogue, dont l'énoncé est voisin de celui qu'a formulé Polignac (*N. A.*, 1855, p. 118) :

Tout nombre premier pair est la différence de deux nombres premiers.

3° A titre de curiosité, j'ai vérifié que, si la différence Δ entre deux nombres premiers consécutifs était $\leqq 4(\log_{10} N)^2$ (formule établie pour $N \leqq 9.10^6$), N étant le plus grand de ces deux nombres,

quand N a au plus 10^{17} chiffres, tout nombre pair n'ayant pas plus de 10^{17} chiffres serait la somme de quatre nombres premiers impairs au plus.

E. MAILLET.

833. (**1896**, 104) (P. TANNERY). — *Impossibilité de l'équation*

$$x^4 + 4x^2 + 1 = y^2$$

en nombres rationnels (**1897**, 20, 83, 203, 229; **1898**, 89, 128; **1900**, 87; **1903**, 43, 158). — Je crois utile de faire une dernière modification à la solution (**1897**, 20) que M. Fauquembergue signale avec raison comme incomplète. Je dois reconnaître que les compléments (**1903**, 43) n'ont réfuté des précédentes critiques (**1897**, 84) que l'argument relatif à la divisibilité de n par 2 (en ce qui concerne les doubles signes, il n'y a pas lieu d'en tenir compte, puisque, l'un des facteurs m^2+2n^2+p et m^2+2n-p ainsi que leur produit étant *positifs*, l'autre est aussi positif).

Tout ce que nous avons dit (**1897**, 20; **1903**, 43) nous semble d'ailleurs irréfutable, hors le point faible suivant : de ce que m^2+2n^2+p et m^2+2n^2-p sont premiers entre eux on ne peut conclure les trois hypothèses examinées, mais simplement que l'un de ces trinomes est le triple d'un bicarré et l'autre un bicarré.

La démonstration *en devient beaucoup plus simple.*

En tenant compte de la symétrie, la seule hypothèse possible devient

$$\text{(A)} \qquad m^2+2n^2+p = 3\alpha^4, \qquad m^2+2n^2-p = \beta^4,$$

α et β impairs premiers entre eux, d'où

$$\text{(B)} \qquad 2m^2 = (3\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2).$$

Cette dernière équation ne saurait être résolue qu'en posant

$$\text{(C)} \qquad 3\alpha^2-\beta^2 = 2m'^2$$

et

$$\text{(D)} \qquad \alpha^2-\beta^2 = m''^2.$$

L'équation (D) exige

$$\alpha = A^2+B^2, \qquad \beta = A^2-B^2, \qquad m'' = 2AB$$

(A et B premiers entre eux et de parité différente). L'équation (C) devient alors

$$A^4 + B^4 + 4A^2B^2 = m'^2;$$

équation identique à la proposée, mais où A et B sont inférieurs à m et n. D'où l'impossibilité.

Nota. — Dans le cas de l'équation $m^4 - 4m^2n^2 + n^4 = p^2$, l'hypothèse correspondante conduit à

$$\text{(E)} \qquad \overline{A^2 + B^2}^2 + 2AB(A^2 - B^2) = m'^2,$$

dont la plus petite solution est

$$m = 442, \qquad n = 161, \qquad p = 136319;$$

mais on peut en outre poser

$$m^2 - 2n^2 - p = -3\alpha^4, \qquad m^2 - 2n^2 + p = \beta^4,$$

ce qui ramène à

$$\text{(F)} \qquad A^4 + B^4 - 4A^2B^2 = m'^2;$$

mais ici les plus petites valeurs de A et B ($A = 1$, $B = 2$) sont acceptables et l'on a la suite récurrente

$$n_{k+1} = m_k^4 - n_k^4,$$
$$m_{k+1} = 2m_k n_k p_k,$$
$$p_{k+1} = \sqrt{m_{k+1}^4 + n_{k+1}^4 - 4m_{k+1}^2 n_{k+1}^2}$$

avec

$$m_1 = 2, \qquad n_1 = 1, \qquad p_1 = 1,$$
$$m_2 = 4, \qquad n_2 = 15, \qquad p_2 = 191,$$
$$\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots$$

P.-F. Teilhet.

859. (**1896**, 152) (*Novice*). — *Construction du polygone régulier de* 17 *côtés* (**1897**, 23, 86, 229; **1899**, 179). — *Voir* réponses à ma question 2169 (**1905**, 112). E.-B. Escott (Ann Arbor).

968. (**1897**, 5) (G. de Rocquigny). — *Y a-t-il toujours un nombre premier entre deux triangulaires consécutifs* (**1897**, 159, 276)? — Je forme (par la pensée) à l'aide des Tables de nombres premiers

jusqu'au nombre 9.10^6 [*voir*, au sujet de ces Tables, rép. à **2667** (**1904**, 103)] un Tableau où les nombres premiers sont rangés par ordre de grandeur croissante, et où je porte, vis-à-vis de chaque nombre premier, la différence Δ_1 avec le nombre premier précédent; puis je ne conserve dans ce Tableau que les différences Δ_1 qui sont supérieures à toutes les précédentes. Je ne reproduis pas le Tableau T ainsi obtenu, que j'ai indiqué ailleurs ([1]). Il permet de résoudre une série de questions relatives aux nombres premiers dans les limites des Tables jusqu'au nombre 9.10^6, en particulier de répondre aux questions **968** et **2181** (**1901**, 249).

J'ai déduit de T que la différence entre un nombre N et le nombre premier immédiatement inférieur à $N-2$, *a fortiori*, la différence δ_N entre N et ce nombre premier, est ([2]), pour $13 < N \leqq 9.10^6$, au plus égale à $4(\log_{10} N)^2$.

La différence de deux nombres triangulaires consécutifs $N = a\dfrac{a+1}{2}$ et $a\dfrac{a-1}{2}$ est a. On aura

$$\delta_N \leqq 4(\log_{10} N)^2 \leqq a \leqq \sqrt{2N},$$

si

$$\psi_N = (2N)^{\frac{1}{4}} - 2\log_{10} N \geqq 0.$$

Or $\psi'_N = 2^{\frac{1}{4}} \dfrac{N^{-\frac{3}{4}}}{4} - \dfrac{2\log_{10} e}{N}$ est $\geqq 0$ dès que $(2N)^{\frac{1}{4}} \geqq 8 \log_{10} e$ ou, *a fortiori*, dès que $N > 100$. Si $N > 100$, $\psi'_N \geqq 0$, ψ_N croît avec N; de plus $\psi_{1000} > 0$; donc $\psi_N > 0$ pour $9.10^6 \geqq N \geqq 1000$, et il y a toujours un nombre premier entre deux triangulaires compris entre 10^3 et 9.10^6.

On peut vérifier directement la propriété pour $N < 10^3$; on peut aussi remarquer que la différence δ_1 entre deux triangulaires est $\geqq 20$, 14, 8, 6, 4, 3 ou 2, quand a est au moins égal à un de ces nombres, et $a\dfrac{a+1}{2} \geqq 210$, 105, 36, 21, 10, 6 ou 3 : δ_1 est alors toujours $\geqq \delta_N$, comme on le voit sur le Tableau T, et *il y a toujours un nombre premier entre deux triangulaires consécutifs* $\leqq 9.10^6$.

([1]) *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1904, p. 340; le Tableau comprend 22 lignes seulement.

([2]) *Id.*, p. 342.

Pour voir à partir de quelle valeur de N on a sûrement k nombres premiers entre deux triangulaires consécutifs, on considérera de même

$$\sqrt{2N} - 4k(\log_{10} N)^2 \geqq 0, \qquad (2N)^{\frac{1}{4}} \geqq 2\sqrt{k}\log_{10} N.$$

Ainsi l'on vérifie que, quand $N \geqq 10^6$, on peut prendre $k = 9$. [*Comp.* mes réponses à **574** (**1905**, 107), **2181** (**1905**, 112.)

E. MAILLET.

1788. (**1900**, 84) (C. FLYE-SAINTE-MARIE). — *Constructions par la règle et un compas d'ouverture invariable* (**1900**, 384; **1901**, 174; **1905**, 16). — Référence.

C. PAGLIANO, *Sull'uso dell compasso di apertura fissa nella risoluzione dei problemi della Geometria elementare e sulla sostituzione di un disco al predetto compasso* (*El Bollettino di mat. e di sc. fis.*, Bologna, t. I, 1902, p. 201).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

2169. (**1901**, 221) (E. LEMOINE). — *Construction du polygone régulier de* 17 *côtés* (**1902**, 82). — Cette question a déjà été proposée sous le n° **859** (**1896**, 152) et il y a eu des réponses (**1897**, 23, 86, 229; **1899**, 179). Voici de nouvelles références :

BOCHOW, *Eine einfache Berechnung der* 17 *Ecks* (*Z. S.*, t. XXXVIII, 1893, p. 250).

G. FONTENÉ (*M.*, 2ᵉ série, t. IX, 1899, p. 179).

FINKEL (*E. T. R.*, t. LIV, 1891, question **10176**).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

2174. (**1901**, 222) (E.-B. ESCOTT). — *Réversion des séries* (**1902**, 51; **1903**, 211, 312). — Dans le *Mathematical Visitor* (publié par Artemas Martin, Washington, D. C.) vol. I, 1879, p. 58, on trouve les 17 premiers coefficients des séries obtenues par réversion.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

2181. (**1901**, 249) (S. DE LA CAMPA). — *Y a-t-il toujours un nombre premier entre deux carrés* (**1904**, 149)? — *On peut répondre affirmativement pour les carrés* $\leqq 9.10^6$, en appliquant la même méthode que dans ma réponse à **968** (**1905**, 110) à laquelle je renvoie.

Soit $N = a^2$,

$$a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1.$$

A-t-on

$$\delta_N \leq 4(\log_{10} N)^2 \leqq 2a - 1 = 2\sqrt{N} - 1 ?$$

On a vu que $\sqrt{2N} - 4(\log_{10} N)^2$ croît avec N et est positif pour $N \geq 1000$; alors il est même $\geqq 1$; de même *a fortiori*

$$2\sqrt{N} - 1 - 4(\log_{10} N)^2 > 0.$$

Il ne reste à vérifier la propriété que pour $N \leq 1000$, $a \leqq 31$, soit directement, soit en remarquant que la différence δ'_1 entre deux carrés est $\geqq 20$, 14, 6, 4 quand $a \geqq 11$, 8, 4, 3 et $a^2 \geqq 121$, 64, 16, 9; en sorte qu'alors $\delta'_1 > \delta_N$ d'après le Tableau T.

On peut déterminer de même une limite inférieure de N à partir de laquelle on a sûrement k nombres premiers entre deux carrés, en étudiant

$$2\sqrt{N} - 1 \geq 4k(\log_{10} N)^2.$$

Ainsi l'on vérifie que, quand $N \geqq 10^6$, on peut prendre $k = 13$. [*Comp.* mes réponses à 574 (**1905**, 107) et 968 (**1905**, 110).]

E. Maillet.

2222. (**1901**, 276) (A. Boutin). — *Équation différentielle*

(1) $$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2}{x^2 + y^2} - 1$$

(**1904**, 43, 98). — Une nouvelle étude de la courbe intégrale paraît conduire à d'intéressantes propriétés.

Soient

x, y les coordonnées rectangulaires d'un point M de la courbe;
r, θ ses coordonnées polaires;
N la normale en M ou $y\sqrt{1 + y'^2}$;
R le rayon de courbure $(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : y''$.

L'équation (1) peut s'écrire

(2) $$(1 + y'^2)(x^2 + y^2) = a^2,$$

et signifie qu'en un point M où la tangente est MT, l'on a

$$\mathrm{OM} = r = a\cos\delta,$$

δ désignant l'angle MTO.

On peut donc définir le point M comme il a été dit (*loc. cit.*, p. 43) ou bien en menant au cercle O de rayon r la tangente AD. Le point M situé sur la circonférence OMD est donc entre Oy et OD.

On a ainsi pour la courbe (M) quatre arcs égaux, tangents en O à Oy, et rencontrant la circonférence OA de rayon a en quatre points E, F, G, H où la tangente est parallèle à Ox (*fig.* 1).

De l'équation (2) on déduit aussi

$$ry\sqrt{1+y'^2} = ay$$

ou

$$\mathrm{N} = \frac{ay}{r} = a\sin\theta.$$

Ici, l'angle θ ne part pas de zéro : il reste compris entre une certaine valeur φ et $\frac{\pi}{2}$, φ désignant l'angle de EOG ou de FOH avec Ox.

Différentiant l'équation (1), on obtient

$$y'' = -\frac{a^2(x+yy')}{r^4 y'}$$

et, par suite,

$$\mathrm{R} = -\frac{a\sqrt{a^2-r^2}}{x+yy'}$$

ou

$$\mathrm{R} = -\frac{\mathrm{OA.AD}}{\mathrm{ON}},$$

N étant le pied de la normale en M. On a aussi

$$\mathrm{R} = -\frac{ry'.\mathrm{AD}}{\mathrm{ON}}.$$

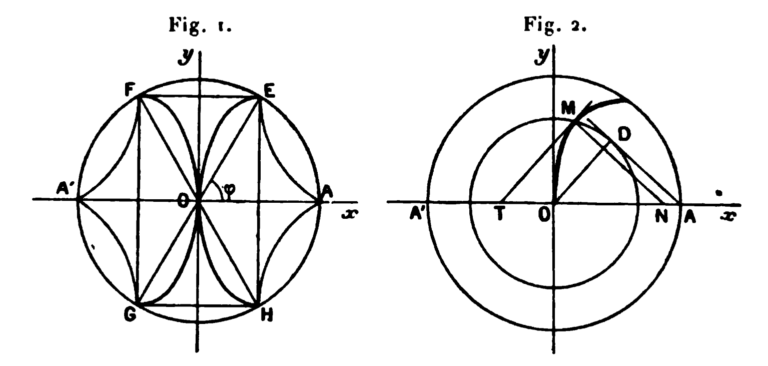
De ces formules on conclut que $\mathrm{R} = a = \mathrm{OA}$ au point O, et $\mathrm{R} = 0$ aux points E, F, G, H. Ainsi la développée de la courbe (M) part des points E, F, G, H, parallèlement à Oy, pour former deux rebroussements sur Ox en A, A' (*fig.* 1 et 2).

La configuration AEOH présente quelque analogie avec celle de la cycloïde et de sa développée; la base EH étant la médiatrice de AO; cependant, pour cette courbe, on aurait $\mathrm{EH} = \frac{\pi a}{2}$, tandis

qu'ici EH $= a\sqrt{3}$. L'assimilation proposée n'est donc pas complète, mais elle pourra avoir son utilité. Elle montre, au moins, que l'angle φ ne peut prendre une valeur quelconque : il paraît devoir peu différer de $\frac{\pi}{3}$, et il est aisé de démontrer qu'il doit être $< \frac{\pi}{3}$. Il serait intéressant de resserrer les limites ou de déterminer la valeur unique de φ. Peut-être y parviendrait-on en se servant de l'équation de la courbe (M) supposée représentée par la série

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

Formant les quantités $1 + y'^2$ et $x^2 + y^2$ et multipliant, puis éga-



lant à a^2 les termes connus et à zéro tous les coefficients des termes en x, on aura

$$A^2 + A^2B^2 = a^2,$$
$$2(1 + B^2)AB + 4A^2BC = 0,$$
$$(1 + B^2)(1 + 2AC + B^2) + A^2(4C^2 + 6BD) + 8AB^2C = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où

$$A = A,$$
$$B = \frac{\sqrt{a^2 - A^2}}{A},$$
$$C = -\frac{a^2}{2A^3},$$
$$D = a^2\frac{4(a^2 - A^2)A - a^2}{6A^5\sqrt{a^2 - A^2}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il pourrait être utile de continuer cette recherche qui est seulement un peu longue.

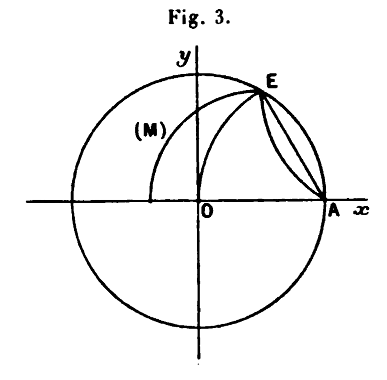
Remarques. — 1° La normale en M rencontrant Ox en N, et la tangente Oy en T_1, la distance T_1N est constante et égale à a (*loc. cit.*, p. 98). Ainsi, la courbe (M) est intimement associée à la circonférence OA de rayon a, aux circonférences de rayon $\frac{a}{2}$ passant par O, et à l'astroïde de paramètre a,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

enveloppe de la droite T_1N.

2° D'après les conditions $R_O = OA$ et $R_E = 0$, il est *impossible* que la courbe (M) rencontre la circonférence de rayon a, dans le premier quadrant, près de l'axe des x ou près de l'axe des y. L'angle AOE doit être voisin de 60°, et certainement $< 60°$. En effet, traçons l'arc de cercle ayant A pour centre et OA pour rayon (*fig.* 3). Il rencontre AE en un point E, à 60° du point A.

Fig. 3.



L'arc de (M) partant de E parallèlement à OA, on voit que toute courbe (M) devra traverser Oy. Pour qu'elle vienne en O tangentiellement à Oy, il faut donc que l'arc EA de développée, dont la corde est EA, soit $< 60°$.

H. Brocard.

2394. (**1902**, 203) (G. de Rocquigny). — *Equations à résoudre en nombres entiers* (**1903**, 131; **1904**, 82). — 1° Soit l'équation

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = N = y(y+1)(y+2) = M.$$

Posons $(x+1)(x+4)=z$. Il vient simplement

$$(z-4)z(z+2)=\mathrm{N}.$$

Remarquons tout d'abord que, si l'on excepte les valeurs de x qui annulent N, les valeurs de y qui annulent M, x étant un entier, N sera toujours positif; par suite, il en devra être de même de M, qui a le signe de y.

Il suit de là que les valeurs $z-4$, z, $z+2$, y, ... *sont positives.*

Examinons ce que devient N quand on attribue à $z-4$ les valeurs y, $y-1$, $y-2$, $y-3$ (en tenant compte des remarques précédentes) :

$$z-4=y\ldots\ldots\quad \mathrm{N}=y(y+4)(y+6)>y(y+1)(y+2).$$

$$=y-1\ldots\left\{\begin{array}{l}\mathrm{N}=(y-1)(y+3)(y+5)\\ \quad=[y(y+1)+3y-5](y+3).\\ \text{Dès que } y=2,\\ \qquad\qquad \mathrm{N}>\mathrm{M}.\end{array}\right.$$

$$=y-2\ldots\left\{\begin{array}{l}\mathrm{N}=(y-2)(y+2)(y+4)\\ \quad=[y(y+1)+y-8](y+2).\\ \text{Si } \mathrm{N}=\mathrm{M},\\ \qquad y=8,\qquad x=1\quad\text{ou}\quad -6.\\ \text{Pour } y>8\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \mathrm{N}>\mathrm{M}\\ \text{Pour } y<8\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \mathrm{N}<\mathrm{M}\end{array}\right.$$

$$=y-3\ldots\left\{\begin{array}{l}\mathrm{N}=(y-3)(y+1)(y+3)<\mathrm{M},\\ \text{car on a toujours}\\ (y-3)(y+3)=y^2-9<y(y+2).\end{array}\right.$$

Nous voyons ainsi que, pour avoir $\mathrm{M}=\mathrm{N}$, sauf le cas où

$$z-4=y-2\qquad\text{et}\qquad y=8,$$

il faut que $z-4$ soit compris entre $\widehat{y-2}$ et $\widehat{y-3}$, c'est-à-dire entre deux entiers consécutifs; z ne saurait donc être entier et, *a fortiori,* il en est de même de x.

Les seules solutions du problème pour lesquelles $MN \neq 0$ sont donc

$$y = 8, \qquad x = 1 \quad \text{ou} \quad -6.$$

2° Soit l'équation

$$x^3 - x \pm 1 = y^2.$$

a. Si l'on prend le signe —, on a la proposition suivante :

L'équation

$$x^3 - x = (3m + \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2})y^2 + 1$$

n'admet aucune solution en nombres entiers.

En effet, le premier membre est mult. 3, le second ne l'est pas.

b. Si l'on prend le signe +, y étant de la forme $2\gamma + 1$, l'équation proposée peut s'écrire

$$(x+1)x(x+1) = 4\gamma(\gamma+1),$$

et les solutions

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad 1, \quad 3, \quad 5, \quad 56; \\ y &= 1, \quad 1, \quad 5, \quad 11, \quad 419; \\ \gamma &= 0, \quad 0, \quad 2, \quad 5, \quad 209 \end{aligned}$$

apparaissent immédiatement en écrivant le premier membre de l'égalité, divisant un de ses facteurs par 4 et remarquant, ce faisant, que x est impair ou mult. 8.

Si l'on observe que $\overline{x-1}$ ne peut être mult. 8 + 1, 3, 5; mult. 5 + 1 ; mult. 7 + 3; mult. 11 + 1, 3, 5, 6, 7, 8; mult. 13 + 1, 7, 8, 10; mult. 17 + 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14; mult. 19 + 5, 6, 8, 9, 10, 13, 15, 16; on peut en quelques instants former le Tableau des valeurs qui, jusqu'à 500, ne sont pas exclues par les conditions précédentes. On a ainsi

$$\overline{x-1} = \left\{ \begin{array}{c} 2,\ 4,\ 55,\ 68,\ 134,\ 152,\ 174,\ 208,\ 240 \\ 284,\ 288,\ 308,\ 340,\ 420,\ 440 \end{array} \right\}.$$

Un examen rapide montre que seuls les trois premiers de ces nombres donnent pour γ des valeurs entières.

15 octobre 1902. P.-F. TEILHET.

M. TEILHET ajoute, en outre, une réponse relative aux paragraphes 3° et 4°.

2860. (**1905**, 6) (E.-N. Barisien). — *Polygones inscrits et circonscrits à deux ellipses.* — La question **2860** est résolue (avec bien d'autres) par un groupe de travaux que j'ai analysés dans une brochure intitulée : *I poligoni di Poncelet* (Turin, Paravia, 1889); j'ai l'honneur de vous l'adresser afin que vous la remettiez à M. Barisien. Un complément à ce travail se trouve sous le titre : *Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet,* dans la *Bibliotheca mathematica,* 1889).   Gino Loria (Gênes).

La brochure de M. Gino Loria et un Mémoire de M. Lindelöf intitulé : *Sur les polygones au plus petit périmètre circonscrits à une ellipse donnée* (Helsingfors, *Acta Soc. Scient. Fennicæ,* 1903, t. XXXI, n° 4) et comportant deux Notes supplémentaires (*loc. cit.,* t. XXXII, n° 5 et t. XXXIII, n° 3), ont été transmis, sur la demande des auteurs, à M. le Commandant Barisien.

La Rédaction.

2865. (**1905**, 9) (E. Lemoine). — *Problème d'Apollonius.* — Comparez : *Das apollonische Berührungs-problem,* par Cranz (Maier, Stuttgart, 1891). Bien qu'il manque dans ce Livre les solutions classiques, celles-ci se trouveront bien parmi les cinquante Mémoires qui sont nommés par Wölffing (*Mathematischer Bücherschatz,* p. 222).   N. Quint (la Haye).

M. E.-B. Escott nous a adressé une liste de 71 auteurs s'étant occupés de la question, avec l'indication des Mémoires ou Livres corrélatifs. Cette réponse a été transmise à M. E. Lemoine.   La Rédaction.

2873. (**1905**, 26) (Lazzaro Filus). — *Problème de jeu.* — Nous allons donner la solution pour les $3^3 - 1 = 26$ premiers nombres, ce qui suffira pour faire facilement comprendre la méthode.

Écrivons ces nombres dans le système de numération ternaire :

1	1	10	101	19	201
2	2	11	102	20	202
3	10	12	110	21	210
4	11	13	111	22	211
5	12	14	112	23	212
6	20	15	120	24	220
7	21	16	121	25	221
8	22	17	122	26	222
9	100	18	200	27	1000

Un nombre quelconque est égal à une somme dont les termes sont des puissances de 3 ou le double de ces puissances, par exemple :

$$122 = 3^2 + 2.3^1 + 2.3^0 = 17,$$
$$212 = 2.3^2 + 3^1 + 2.3^0 = 23.$$

Inscrivons sur un premier carton les nombres dont le dernier chiffre dans le système ternaire est 1; sur un deuxième, les nombres dont le dernier chiffre est 2; sur un troisième ceux dont le deuxième chiffre à partir de la droite est 1; sur un quatrième ceux dont ce deuxième chiffre est 2; sur un cinquième ceux dont le troisième chiffre à partir de la droite est 1; enfin sur un sixième ceux dont le troisième chiffre est 2. L'ensemble de ces six cartons est représenté dans le Tableau ci-après :

18	9	6	3	2	1
19	10	7	4	5	4
20	11	8	5	8	7
21	12	15	12	11	10
22	13	16	13	14	13
23	14	17	14	17	16
24	15	24	21	20	19
25	16	25	22	23	22
26	17	26	23	26	25
18	9	6	3	2	1

Supposons que le nombre pensé soit 17, on le trouve dans le cinquième, le quatrième et le deuxième carton; d'après la manière dont ces cartons ont été formés, le nombre pensé s'écrira donc 122 dans le système ternaire; par suite il sera égal à $3^2 + 2.3^1 + 2.3^0$.

Pour plus de simplicité, on inscrit les nombres 1, 2, 3, 6, 9, 18 au bas de chaque carton et l'on n'a alors qu'à additionner les nombres portés sur les cartons indiqués.

Si, au lieu de 26 nombres, on en prenait $3^n - 1$, il faudrait $2n$ cartons.

DELANNOY.

QUESTIONS.

793. [V8] (1896, 77) D. Melanderhjelm (né et mort à Stockholm, 1726-1810) et P. Frisi (né et mort à Milan, 1728-1784) ont publié en 1769 un écrit intitulé : *Danielis Melandri et Paulli Frisii alterius ad alterum de theoria Lunæ commentarii* (Parmæ, ex typographia regia; MDCCLXIX, 86 pages in-4°). D'après une Notice de Lüdeke dans *Allgemeines schwedisches Gelehrsamkeits-Archiv*, 5 (Leipzig, 1790, in-8°, p. 269), il y aurait une nouvelle édition publiée (Parmæ et Lipsæ, in-4°) en 1782. La Notice de Lüdeke a été reproduite par plusieurs auteurs; cependant, malgré beaucoup de recherches, je n'ai pu me procurer aucun exemplaire de la nouvelle édition, ni même en trouver aucune mention faite jusqu'à Lüdeke. Cette édition a-t-elle jamais existé? G. Eneström (Stockholm).

794. [V7] (1896, 77) D'après une indication donnée par Palmsköld vers la fin du XVIIe siècle, le savant suédois J. Bothvidi a publié en 1613 un écrit intitulé : *Arithmeticæ vulgaris libri duo, primum a M.* Heizone Buschero *breviter collecti : nunc vero auctiores editi studio et opera* Johannis Bothvidi *Goti Norcopensis*. Rostokii, cum consensu amplissimæ Facultatis philosophicæ. Anno MDCXIII.

Je désirerais savoir s'il existe encore quelque exemplaire de cet écrit. G. Eneström (Stockholm).

795. [V6] (1896, 78) Dans le *Grand Dictionnaire universel* de P. Larousse, t. XIII (1875), p. 483, on affirme que le problème de la quadrature du cercle était tellement célèbre au XVIe siècle, que Charles-Quint promit cent mille écus à

celui qui carrerait le cercle, et que les États hollandais offrirent aussi une somme considérable à celui qui obtiendrait un tel résultat.

Y a-t-il, pour la première partie, quelque autre source que la fausse Lettre de Charles-Quint à Rabelais communiquée par Chasles à Quételet, et publiée par ce dernier dans l'*Annuaire de l'Observatoire de Bruxelles* pour 1867, p. 204? Et quelle est la source originale de la seconde partie de l'assertion? G. Eneström (Stockholm).

796. [V5a] (1896, 78) M. Favaro a appelé l'attention sur un écrit intitulé : *Astrolabij quo primi mobilis motus deprehenduntur Canones,* dont la première partie a été attribuée par lui à Prosdocimo de' Beldomandi (voir *B. M.*, 1890, p. 83-86). Y a-t-il trois éditions différentes de cet écrit, comme l'indique la *Bibliographie générale de l'Astronomie,* par J.-C. Houzeau et A. Lancaster (t. I, p. 643), ou faut-il considérer les trois éditions comme identiques? Ni M. Favaro (*loc. cit.*), ni M. Riccardi (voir *B. M.*, 1890, p. 113-114) n'en connaissent plus d'une édition.

G. Eneström (Stockholm).

798. [V3] (1896, 79) Dans le catalogue des *Codices præclarissimi... apud S. Comnum civem Atheniensem asservati* (Athènes, 1857. Serapeum XVIII. Intelligenzbl., p. 129 et suiv.) se trouve la mention que voici :

1. *Codex chartaceus in quarto, sec.* XV *aut certe* XVI, *constans chartis* 137, *id est paginis* 274, *ineditus : continet Procli Philosophi commentarios in Nicomachi Geraseni Arithmeticam;* tit. : Νικομάχου Γερασηνοῦ ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς τῶν εἰς δύο τὸ ά^{ov}, ὅπερ ἐξηγεῖται ὁ φιλόσοφος Πρόκλος. Incipit : Εἰσαγωγὴ ἐπιγέγραπται ὡς πρὸς τὰ γεγραμμένα αὐτῷ Θεολογικά, ἤτοι μέγαλα ἀριθμητικά.

Ce manuscrit a été vendu à Londres il y a une trentaine d'années; M. Comno n'en a pas de souvenir plus précis. Peut-on savoir où il se trouve actuellement?

Paul Tannery.

807. [A1a] (1896, 82) Au bout de combien de temps les noms de famille sont-ils réduits à un seul par suite de mariages? On se donne tous les éléments. Quels sont ces éléments? *Buray.*

809. [L¹1c] (1896, 82) Soit un pentagone convexe inscrit à une courbe du second ordre. On sait que les points d'intersection de deux couples de côtés non consécutifs et le point d'intersection du cinquième côté et de la tangente au sommet opposé sont sur une droite; et de même, que les diagonales qui joignent deux couples de sommets non consécutifs et la droite qui joint le cinquième sommet au point de contact du côté opposé se coupent en un point.

Or, M. Moreau a donné (*N. A.*, 1878, question 1257) le théorème suivant : « Étant donné dans un plan un pentagone convexe, chaque système de trois côtés consécutifs forme un triangle; démontrer que les cinq circonférences circonscrites à ces triangles déterminent par leurs intersections cinq points situés sur une même circonférence. »

[M. Paul Terrrier a publié (*N. A.*, 1895, p. 1*) une solution remarquable de cette question, qu'il dit, d'après Catalan et Salmon, avoir été posée et démontrée, il y a de longues années, d'une autre manière, dans la *Géométrie* par M. Auguste Miquel.]

Y a-t-il quelque relation entre la droite de Pascal (ou le point de Brianchon) et le cercle, signalé par M. Moreau, correspondant au pentagone considéré?

J. D'AVILLEZ, Vte DE REGUENGO (Portalegre).

819. [T3b] (1896, 85) 1° Je désirerais savoir si l'on a étudié les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière polarisée, à la surface du quartz perpendiculaire à l'axe, et à la surface des liquides doués du pouvoir rotatoire. 2° Où en est la question de la réflexion et de la réfraction de la lumière polarisée ou naturelle à la surface des milieux transparents non isotropes? E.-M. LÉMERAY.

821. [**O5f**] (**1896**, 86) Soient, sur une surface donnée,

$$\lambda = \text{const.}, \qquad \mu = \text{const.},$$

des lignes de coordonnées curvilignes orthogonales, et soit

$$dS^2 = L^2\, d\lambda^2 + M^2\, d\mu^2$$

l'expression du carré de l'arc élémentaire.

X et Y sont deux fonctions inconnues de λ et de μ, entre lesquelles existent les trois équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d(LX)}{d\mu} = Y\frac{dL}{d\mu}, \\ &\frac{d(MY)}{d\lambda} = X\frac{dM}{d\lambda}, \\ &\frac{X}{R_\lambda} + \frac{Y}{R_\mu} = F(\lambda, \mu), \end{aligned}\right.$$

$\frac{1}{R_\lambda}$, $\frac{1}{R_\mu}$ étant les courbures normales respectives des lignes $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$, et F une fonction connue de λ et de μ.

Est-il possible d'intégrer ce système d'équations? Ou, tout au moins, peut-on en tirer quelques conclusions sur la nature des fonctions inconnues X et Y?

Dans le cas particulier où les lignes $\lambda = \text{const.}$ sont des lignes géodésiques, la fonction Y est indépendante de λ. La fonction X présente-t-elle aussi quelque chose de particulier?

J. Voyer.

2917. [**D4a**] Construire une fonction *entière* $G(z)$ jouissant de la propriété suivante (ou en démontrer l'impossibilité) : il existe deux intervalles (θ_1, θ_2) et (θ_3, θ_4) *d'étendues non nulles,* compris entre o et $2u$ et tels que :

1° $G(z)$ tend vers une limite *finie et déterminée a* lorsque z augmente indéfiniment avec un argument *quelconque* compris dans l'intervalle (θ_1, θ_2);

2° $G(z)$ tend vers une autre limite *finie et déterminée b* lorsque z augmente indéfiniment avec un argument *quelconque* compris dans l'intervalle (θ_3, θ_4).

On construit aisément des fonctions *méromorphes* pareilles. Telle serait, par exemple, la fonction

$$a + \frac{b-a}{1+e^z}$$

tendant vers a lorsque z augmente indéfiniment dans une direction quelconque à droite de l'axe des imaginaires et tendant vers b lorsque cette direction est à gauche de cet axe.

M. Petrovitch (Belgrade, Serbie).

2918. [Σ] Les équations indéterminées à deux variables $f(x, y) = 0$ peuvent, au point de vue des solutions en nombres entiers (ou rationnels) se diviser en deux grandes classes : 1° celles qui n'ont qu'un nombre fini de solutions; 2° celles qui en ont une infinité. Les premières peuvent se résoudre par un nombre fini d'opérations, dès qu'on connaît une limite supérieure des solutions.

Dans cet ordre d'idées, je crois que la question **2512** (**1903**, 34) de M. Werebrusow peut être formulée ainsi :

Trouver les valeurs de a pour lesquelles $x^3 - y^2 = a$ *possède une infinité de solutions en nombres entiers, par exemple pour* $-1000 \leqq a \leqq 1000$. *Y a-t-il de pareilles valeurs de a? Peut-on les déterminer?* E. Maillet.

2919. [**I18c**] La plupart des nombres entiers sont sommes algébriques de 2 ou 3 cubes. Les multiples de 9 ± 4 font exception, mais on a le théorème :

Théorème. — *Tout nombre entier* N *est la somme algébrique de quatre cubes entiers (au plus).*

Corollaire I. — *Tout nombre entier est, d'une infinité de manières, la somme algébrique de n cubes entiers* $\neq 0$, *quel que soit* $n > 4$.

Corollaire II. — *Tout cube entier est, d'une infinité de manières, la somme algébrique de n cubes entiers* $\neq 0$, *quel que soit* $n > 4$ *ou égal à* 3.

1° Ces propositions ont-elles déjà été publiées?

2° Je demande de déterminer p groupes de fonctions φ'_β, φ''_β, φ'''_β, $\varphi^{\text{IV}}_\beta$ ($\beta \leqq p$) telles que les formules

$$\begin{array}{llll} x'_1 = \varphi'_1(N), & x''_1 = \varphi''_1(N), & x'''_1 = \varphi'''_1(N), & x^{\text{IV}}_1 = \varphi^{\text{IV}}_1(N), \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x'_\beta = \varphi'_\beta(N), & x''_\beta = \varphi''_\beta(N), & x'''_\beta = \varphi'''_\beta(N), & x^{\text{IV}}_\beta = \varphi^{\text{IV}}_\beta(N) \end{array}$$

donnent toutes les solutions de l'équation

$$N = x'^3_\beta + x''^3_\beta + x'''^3_\beta + x^{\text{IV}3}_\beta.$$

Note I. — Nous avons déjà donné [question **71** de M. Gabriel Oltramare (**1895**, 325)] une infinité de décompositions de N en une somme algébrique de *cinq* cubes entiers. Si $N = 6m$, on déduit de nos formules

$$(m+1)^3 - m^3 - m^3 + (m-1)^3 = N.$$

Note II. — Je suppose que les fonctions correspondantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\beta$ soient toutes différentes et que l'on groupe sous le même indice toutes les solutions qui se déduisent d'une valeur φ_β au moyen d'une formule de récurrence $\Phi(\beta) = 0$. P.-F. Teilhet.

2920. [**I18c**] Théorème. — *Tout cube entier est, d'une infinité de manières, la somme algébrique de trois cubes entiers* $\neq 0$.

Corollaire. — *Tout cube entier est, d'une infinité de manières, la somme algébrique de* $2n+1$ *cubes entiers* $\neq 0$, *quel que soit l'entier* n.

Si l'on multiplie (*voir* ma solution de la question **2489**, Note VII) l'unité et trois cubes qui la composent par un cube quelconque Q^3, on obtient une suite infinie de décompositions de Q^3; j'en possède d'ailleurs d'autres séries particulières.

1° Ces résultats sont-ils, comme je le crois, nouveaux?

2° Je désire savoir s'il est possible de trouver n groupes de fonction $f'_\alpha, f''_\alpha, f'''_\alpha$ $(\alpha \leqq n)$ telles que les formules

$$\begin{array}{lll} x'_1 = f'_1(Q), & x''_1 = f''_1(Q), & x'''_1 = f'''_1(Q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_\alpha = f'_\alpha(Q), & x''_\alpha = f''_\alpha(Q), & x'''_\alpha = f'''_\alpha(Q) \end{array}$$

donnent toutes les solutions de l'équation

$$Q^3 = x'^3_\alpha + x''^3_\alpha + x'''^3_\alpha,$$

Q étant un nombre donné.

Note I. — Je suppose que les fonctions correspondantes $f_1, f_2, \ldots, f_\alpha$ soient toutes différentes et que l'on groupe sous le même indice toutes les solutions qui se déduisent d'une valeur f_α au moyen d'une formule récurrente $F(\alpha) = 0$.

Note II. — Ce théorème et son corollaire ne constituent point une généralisation de la seconde proposition formulée dans la question **2520** (**1903**, 36), proposition dans l'énoncé de laquelle il s'agit implicitement d'une somme *arithmétique* de trois cubes positifs. P.-F. Teilhet.

2921. [L¹16b] Le lieu des sommets des coniques bitangentes à deux cercles donnés se compose :

1° De la ligne des centres des deux cercles;

2° D'une cubique bitangente aux deux cercles, passant par leurs centres de similitude et ayant pour asymptote la perpendiculaire élevée à la ligne des centres en son milieu;

3° D'une autre courbe C (que je n'ai pu trouver).

Il convient de remarquer que deux cercles bitangents à une conique peuvent être dans les deux situations suivantes : ou avoir leurs centres sur le même axe, ou avoir chacun de leurs centres sur un axe différent de la conique.

Les lieux 1° et 2° correspondent à la première de ces situations, le lieu 3° que je désire connaître correspend à la seconde. E.-N. Barisien.

2922. [**K2e**] Soient ABC un triangle, H son orthocentre, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ des projetantes obliques, obtenues en faisant tourner d'un même angle, dans le même sens, les projetantes normales $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, et coupant les côtés du triangle en A', B', C'; soient encore A'_B et A'_C les projections de A' sur $\overline{AC}$ et sur $\overline{AB}$ prises parallèlement à $\overline{BB'}$ et à $\overline{CC'}$: les points A'_B, A'_C et les quatre autres points analogues B'_C, B'_A et C'_A, C'_B sont sur un même cercle. Ce cercle joue-t-il un rôle dans la Géométrie du triangle (au moins lorsque les projetantes sont normales) et a-t-il reçu une dénomination particulière?

E. Malo.

2923. [**V8**] Je possède une Brochure de 34 pages in-8, avec une planche, ayant pour titre :

« Nouvelles résolutions très faciles des plus fameux Problèmes de la Géométrie qui ont paru jusqu'ici insolubles, de la quadrature du cercle et de la section des angles, avec plusieurs manières de calculer le cercle et les angles, démontrées à la rigueur des géomètres de l'ancienne Grèce et de la manière que toutes les résolutions font encore une partie de la Géométrie élémentaire. — A Strasbourg, de l'Imprimerie de Jean-Henri Heitz, l'an IV de la République Française. »

Sur le titre, avant « A Strasbourg », il est écrit à la main : *Partie I*, par Charles Strack.

Je désirerais la biographie de l'auteur de cette Brochure, qui est reliée avec un Manuscrit assez gros sur le sujet que celle-ci aborde.

Nobel.

2924. [**K9a**] Petersen, dans son Ouvrage *Méthodes et théories*, traite cette question : « Construire un polygone connaissant, en position, les perpendiculaires élevées au milieu des côtés. »

Rouché cite le problème et développe la solution.

Je ne sais si son interprétation exacte m'échappe, mais elle me paraît conclure à l'indétermination.

Voici comment je la comprends.

Désignons par $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ les n perpendiculaires élevées sur les milieux des n côtés du polygone $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$.

Considérons un point quelconque B_1 du plan de la figure. On prend son symétrique B_2 par rapport à P_1, puis le symétrique B_3 de B_2 par rapport à P_2, et ainsi de suite ; on obtient finalement un point B_n et les droites $A_1 B_1$, $A_1 B_n$ étant égales, le sommet A_1 appartient à la perpendiculaire élevée au milieu de $B_1 B_n$.

Considérons un second point quelconque B'_1, en prenant successivement son symétrique par rapport à $P_1, P_2, \ldots, P_n$, on tombe finalement sur un point B'_n tel que $A_1 B'_1 = A_1 B'_n$, et le sommet A_1 appartient à la perpendiculaire élevée au milieu de $B'_1 B'_n$.

Il semblerait résulter de là la possibilité de déterminer le sommet A_1 par l'intersection de deux lignes ; mais il y a lieu de remarquer que la figure $B_1 B_n B'_1 B'_n$ est un trapèze symétrique et que, par suite, les deux perpendiculaires élevées sur les milieux de $B_1 B_n$, $B'_1 B'_n$ coïncident.

Je serais reconnaissant au Correspondant qui voudrait bien me signaler mon erreur. J. Fitz-Patrick.

2925. [V9] Je serais reconnaissant à tout Correspondant qui voudrait me faire connaître les Ouvrages ou les Revues diverses où il me serait possible de trouver des renseignements complets sur l'escroquerie dont l'illustre Chasles a été victime de la part du faussaire Vrain Lucas.

Histoire de l'affaire. Polémiques engagées à ce sujet. Jugement et condamnation du faussaire. J. Fitz-Patrick.

2926. [V] M. Aubry avait commencé, dans l'année 1896 du *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps, la publication d'une notice historique sur la Géométrie de la mesure. Le dernier article paru a été inséré dans le n° 9 de septembre 1897 et le Journal ayant changé de Direction, la publication de la notice a cessé brusquement.

Un Correspondant serait-il assez obligeant pour me faire connaître où il serait possible de trouver la notice complète de M. Aubry? J. Fitz-Patrick.

2927. [**D2e**] a étant une constante, condition de convergence et expression en termes finis, si possible, de la fraction continue

$$y = x + \cfrac{a}{x + \cfrac{2(1+a)}{x + \cfrac{3(2+a)}{x + \ldots + \cfrac{p(p-1+a)}{x + \ldots\ldots\ldots}}}}$$

Équations différentielles linéaires auxquelles satisfont les numérateurs et dénominateurs des réduites?

A. Boutin.

2928. [**U10**] Je désirerais une solution *aussi élémentaire que possible* de la question suivante qui intéresse les topographes :

Une ligne a été mesurée n fois dans un sens et n fois en sens contraire, ce qui a donné $2n$ résultats voisins, mais différents.

1° Quelle est la longueur mathématique de la ligne considérée?

2° A quelle erreur s'expose-t-on en prenant une longueur conventionnelle plus facile à calculer, par exemple la moyenne arithmétique générale des $2n$ résultats trouvés ou la moyenne arithmétique particulière de m résultats choisis? G. Lemaire (Mytho, Cochinchine).

2929. [**U10**] Combien de fois faut-il mesurer une longueur L, avec un ruban d'acier de l mètres, pour obtenir, après calculs, un résultat théoriquement exact ou pratiquement acceptable? G. Lemaire (Mytho, Cochinchine).

RÉPONSES.

2411. (**1902**, 226) (G. de Rocquigny). — *Nombre pair somme de deux nombres premiers d'une seule manière* (**1903**, 61, 166, 283; **1904**, 83). — *Voir* ma réponse à **574** (**1905**, 107), laquelle se rattache à la question **2411**. E. Maillet.

2446. (**1902**, 264) (*Meglio*). — *Phénomènes intellectuels chez les mathématiciens* (**1902**, 339). — *Voir* ci-dessous ma réponse à **2447**. E. Maillet.

2447. (**1902**, 264) (*Meglio*). — *Rêve mathématique* (**1902**, 339). — J'ai publié dans le n° **1** du Tome VII, 9e série (1905) du *Bulletin de la Société philomathique de Paris* (p. 19-62) l'exposé des réponses que j'ai reçues au sujet des questions **2446** (**1902**, 263) et **2447** (**1902**, 264) et du questionnaire corrélatif (**1902**, 339), et les conclusions qui paraissent s'en dégager. Je crois utile de résumer ici mon travail, qui est intitulé : *Les rêves et l'inspiration* [1] *mathématiques* (*enquête et résultats*).

Les réponses reçues sont au nombre d'environ 80; 60 d'entre elles émanent de mathématiciens ayant en moyenne 29 ans de mathématiques, soit en tout 1740 années environ [2]. 16 d'entre eux peuvent être considérés comme des amateurs, les autres comme des professionnels. La plupart des réponses sont insérées en tout ou en partie dans mon Mémoire; certaines sont signées de pseudonymes (en italique).

---

[1] L'inspiration mathématique est une disposition momentanée très favorable à la découverte. Un exemplaire de mon Mémoire sera adressé à tous les auteurs de réponses.

[2] Ceci pour qu'on ait idée de la fréquence relative de certains phénomènes signalés et du degré de généralité de mes conclusions.

Voici mes conclusions; il est bien entendu que je ne discute pas les dires de mes correspondants ni la fidélité de leur mémoire.

Première catégorie de résultats. — *Au sujet des mathématiciens ayant trouvé en rêve des solutions ou un commencement de solution.*

4 ont trouvé des solutions, 8 environ un commencement de solution; pour 3 des 4 premiers, il s'agissait de problèmes de Géométrie relativement élémentaires, pour le quatrième la nature du sujet n'est pas indiquée. Ces rêves ont eu lieu avant l'âge de 25 ou 30 ans. Donc *les solutions complètes en rêves sont rares* et ne se présentent guère que dans la jeunesse; il ne s'agit que de choses assez faciles; mais des idées utiles surviennent plus fréquemment.

Autre conclusion : *le raisonnement fonctionne très rarement dans le rêve;* les idées mathématiques qui s'y suivent dans le temps n'ont pas de lien logique. Cela n'empêchera évidemment pas que la solution d'un problème de Géométrie assez facile, qui dépendra parfois d'une ligne bien menée, puisse exceptionnellement apparaître. De même, en Algèbre ou en Arithmétique, l'idée d'une transformation utile, à l'occasion décisive pour la solution, peut par hasard se présenter. Mais cela ne va pas plus loin.

Autre conclusion encore : *le rêve professionnel* sérieux (c'est le cas où l'on rêverait par exemple que l'on fait passer un examen, en suivant plus d'un instant, logiquement, les calculs ou les figures) est très rare. Si l'on rêve d'examens, les idées mathématiques ne se succèdent pas d'une manière raisonnable : les impressions des sens ou les questions de sentiments prédominent trop.

Deuxième catégorie de résultats. — *Au sujet des mathématiciens ayant trouvé de suite au réveil la solution complète ou partielle d'une question posée la veille ou antérieurement, ou y ayant eu une idée utile.*

J'ai 15 réponses affirmatives; deux explications ont été proposées, dont chacune peut avoir sa part de vérité : c'est le résultat du repos, ou encore c'est le résultat d'un travail mental pendant le sommeil; on peut invoquer aussi le hasard.

Troisième catégorie de résultats. — *Inspiration mathématique ou phénomènes analogues.*

J'ai 22 réponses affirmatives; j'indique diverses formes de l'inspi-

ration et plusieurs explications, dont certaines proposées par mes correspondants.

Quatrième catégorie de résultats. — *Au sujet des mathématiciens parlant de leur faculté de faire des calculs ou de voir des figures de tête.*

J'ai 8 réponses affirmatives. D'après certaines, il semble que le repos et l'obscurité soient favorables à cette faculté; c'est bien d'accord avec ce qu'on sait des mathématiciens aveugles, comme Euler et Plateau.

Cinquième catégorie de résultats. — *Faits accessoires.*

Je mentionnerai : 1° la production d'un sentiment particulier, de joie par exemple, au moment de la découverte d'une solution : 2° la description d'illusions d'optiques; 3° un rêve qu'on peut ranger dans la catégorie des *rêves révélateurs :* il s'agissait d'une erreur de calcul numérique, qu'un rêve a peut-être aidé à retrouver. J'explique comment un pareil rêve pourrait, à l'occasion, résulter des façons de travailler des calculateurs de métier.

Mon travail se rattache à une enquête beaucoup plus vaste entreprise par MM. Laisant, Fehr et Buhl sur les méthodes de travail des mathématiciens, mentionnée dans l'*Intermédiaire* (**1904**, 257).

Voici encore quelques réponses que j'ai recueillies verbalement.

M. Corlieu (24 ans de math.) a trouvé en rêve, étant en Élémentaires, la solution d'un problème d'Arithmétique se rapportant à la théorie de la divisibilité, solution qu'il avait en vain cherchée la veille au soir; il s'en est souvenu au réveil, et la solution a été trouvée exacte par le professeur.

M. Broca (24 ans de math.) a trouvé plusieurs fois des solutions de problèmes, cherchées en vain les jours précédents, ou retrouvé des erreurs de calcul, dans le demi-sommeil (suivi en général du réveil). Il se souvient, étant élève de Mathématiques spéciales, s'être posé en rêve cette question : on fait tourner une hyperbole autour d'une droite de son plan; voir dans l'espace la forme de la surface ainsi engendrée.

M. Mercadier (20 ans de math.) se rappelle qu'en rêve, étant encore élève de Mathématiques spéciales, il se croyait dans une des nappes d'un hyperboloïde dont il essayait de sortir; mais il s'éloi-

gnait en vain dans la direction de l'infini en suivant la nappe : il n'en voyait pas la fin.

Pour ma part, j'ai fait récemment un rêve où je m'imaginais faire passer un examen, je n'avais d'ailleurs pas conscience du sujet. J'ai vu fugitivement écrit au tableau un produit de facteurs binomes; l'élève méritait jusque-là 17, mais il ne pouvait continuer, et j'eus l'intuition très nette qu'il y avait à développer un binome en série infinie; ce n'était d'ailleurs là qu'une idée isolée, sur laquelle le rêve se termina.

E. MAILLET.

2688. (**1903**, 280) (P.-F. TEILHET). — *Décomposition de tout nombre entier en triangulaires non nuls* (**1904**, 88). — C'est par erreur que l'énoncé publié a paru au lieu du suivant qui, plus général, le comprend :

On démontre bien simplement, en se basant sur ce fait que tout multiple de 8 plus 3 est la somme de trois carrés, la proposition énoncée par Fermat : *Tout nombre entier est la somme de trois triangulaires* AU PLUS.

Je désirerais une démonstration simple et directe soit du théorème suivant soit de son premier corollaire :

THÉORÈME. — *Tout nombre entier* $8m+4$ ($m=4$, 6 *ou* $\geqq 8$) *est somme de quatre carrés impairs* SUPÉRIEURS A L'UNITÉ.

COROLLAIRE I. — *Tout nombre entier sauf* 1, 2, 3, 5 et 7 *est somme de quatre triangulaires* NON NULS.

COROLLAIRE II. — *Tout nombre entier* N *est somme de* n *triangulaires* NON NULS *si* $N+4-n$ *est différent de* 1, 2, 3, 5 *ou* 7.

Je serais d'ailleurs reconnaissant au correspondant qui, à défaut de la démonstration de ces nouvelles propositions, pourrait m'en communiquer une s'appliquant aux énoncés primitivement donnés (**1903**, 280).

P.-F. TEILHET.

2721. (**1904**, 9) (P. RENARD). — *Bibliographie de la théorie des formes* (**1904**, 112, 203). — Voir : *Encyklopädie der math. Wiss.*, Band I (Algebraic), p. 322-403; (Arithmetic), p. 582-635. — E. PASCAL, *Repertorium der höheren Mathematik* (Algebraic), Chap. XII, p. 256; (Arithmetic), Chap. XX, § 8, p. 11.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

2744. (**1904**, 67) (G. Picou). — *Résidus quadratiques* (**1904**, 180, 263). — *Voir* Serret, *Algèbre supérieure*, 4e édition, t. II, Section III, Chap. II, p. 117; Bachmann, *Elemente der Zahlentheorie*, p. 113-117 (Teubner, 1892); *Leçons d'Arithmétique* de M. J. Tannery, p. 493. La question est résolue dans ces trois Ouvrages. N. Plakhowo (Tambow, St. Tokarewka, Russie).

2780. (**1904**, 116) (H. Brocard). — *Systèmes divers de numération* (**1904**, 269). — Le système de numération qui a pour base 60 paraît avoir été inventé et mis en pratique par les Chaldéens. Nous nous en servons encore aujourd'hui pour la mesure du temps et pour la mesure des angles. Ainsi l'expression

$$32^{\circ}\,15'\,28''$$

n'est pas autre chose qu'un nombre de secondes égal à 116128, écrit sous la forme suivante :

$$32 \times 60^2 + 15 \times 60^1 + 28 \times 60^0.$$

Les petits signes adoptés pour désigner les puissances de 60 seraient d'un usage difficile, si l'on voulait en avoir de semblables pour toutes les puissances quelconques, et pour tous les nombres qu'on pourrait prendre comme bases des différents systèmes.

Je propose donc une notation qui consiste à mettre entre parenthèses les multiples des puissances de la base et à indiquer la base par un exposant placé à gauche de la première parenthèse. Ainsi, j'écris

$$^{60}(22)(14)(0)(0)(57) = 22 \times 60^4 + 14 \times 60^3 + 57 \times 60^0.$$

Cela posé, j'observe que, si un nombre est écrit dans le système de numération ordinaire, on peut, au moyen d'un calcul très rapide, l'écrire dans le système de numération qui a pour base 60. Il suffit de le diviser par 6 autant de fois que c'est nécessaire, en arrêtant chaque division au second chiffre à droite. Les restes obtenus donnent l'écriture cherchée. Soit par exemple le nombre 9643725. Le calcul se dispose ainsi

9643725	
160728	45
2678	48
44	38

On peut donc poser le résultat suivant :

$$9643725 = {}^{60}(44)\,(38)\,(48)\,(45).$$

Maintenant, dans ce système de numération, les caractères de la divisibilité par les nombres 59 et 61 seront les mêmes que ceux qui existent dans le système usuel pour les nombres 9 et 11.

On aura donc le reste de la division par 59 en ajoutant 44, 38, 48 et 45 et en divisant le résultat par 59. On a ainsi pour ce reste le nombre 57, résultat que le lecteur vérifiera aisément. Pour 61, on aura à ajouter 45 et 38, ce qui fait 83; on en retranchera la somme $48 + 44 = 92$; le résultat est -9; le reste de la division du nombre proposé par 61 est donc $61 - 9 = 52$.

En prenant les systèmes de numération qui ont pour base les multiples de 10, on aura ainsi les caractères de la divisibilité des nombres par la plupart des petits nombres premiers, comme on le voit par le Tableau suivant :

Nombres premiers.	Bases des systèmes.
$17 = \frac{51}{3}$	50
19	20
$23 = \frac{69}{3}$	70
29	30
31	30
59	60
61	60
71	70
79	80
89	90

Nous avons omis à dessein le nombre 41, parce qu'il existe pour ce nombre un caractère de divisibilité bien connu; on voit, en effet, que c'est un diviseur du nombre 99999. Dr Prompt (Turin).

2793. (**1904**, 138) (V. Aubry). — *Imaginaires* (**1904**, 297; **1905**, 58). — Voici un problème du plan qui conduit sous certaines conditions à une solution dans l'espace d'un problème dont le proposé est un cas particulier.

Soit à chercher l'intersection de la droite $y = ax + b$ et du cercle $x^2 + y^2 = r^2$.

L'abscisse de l'intersection est

$$x = -\frac{ab}{1+b^2} \pm \frac{\sqrt{a^2b^2 - (1+b^2)(a^2 - r^2)}}{1+b^2};$$

dans le cas où la solution est imaginaire convenons que la partie imaginaire représente une perpendiculaire au plan xy, de telle façon que la solution du problème soit donnée dans ce cas par le système

$$x = -\frac{ab}{1+b^2},$$
$$z^2 = \frac{(1+b^2)(a^2 - r^2) - a^2b^2}{1+b^2},$$
$$y = a + bx.$$

Ce système, on le reconnaît facilement par élimination, est équivalent à

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2,$$
$$y = -\frac{x}{b},$$
$$y = a + bx.$$

La solution générale de l'intersection d'une droite D et d'un cercle donne donc, avec l'interprétation adoptée pour les imaginaires, la solution du problème suivant dont le proposé n'est qu'un cas particulier :

Trouver les intersections réelles de l'hyperboloïde

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2$$

par le faisceau des droites formé de la droite D *et de la verticale menée par le point où* D *coupe sa direction conjuguée par rapport au cercle* (*point le plus rapproché du centre*).

Ce mode d'interprétation conduit à des surfaces de degré supérieur au second quand les deux axes de la courbe du second degré ne sont pas égaux. Exemple : intersection d'une droite et d'une courbe $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ahem.

2806. (**1904**, 165) (M. Lerch). — *Développement de la fonction* $\frac{1}{1 - \log(1+z)}$ *en série infinie.* — Soit

$$(1) \qquad y = \frac{1}{1 - \log(1+z)}, \qquad \log(1+z) = 1 - \frac{1}{y}.$$

En différentiant

$$(2) \qquad \frac{1}{1+z} = \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dz} \qquad \text{ou} \qquad (1+z)y' = y^2.$$

Différentiant n fois, on a par le théorème de Leibniz

$$(3) \quad \begin{cases} y^{(n+1)}(1+z) + ny^{(n)} = y^{(n)}y + ny^{(n-1)}y' \\ \qquad\qquad + \frac{n(n-1)}{1.2}y^{(n-2)}y'' + \ldots + yy^{(n)}. \end{cases}$$

Soit

$$(4) \qquad y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

Le théorème de Maclaurin donne, quand $z = 0$,

$$\begin{array}{lll} y = a_0, & y' = a_1, & y'' = 2!\,a_2, \\ y''' = 3!\,a_3, & \ldots\ldots, & y^n = n!\,a_n, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Faisant dans (3) $z = 0$, on a

$$\begin{aligned} &(n+1)!\,a_{n+1} + n.n!\,a_n \\ &\quad = n!\,a_n a_0 + n(n-1)!\,a_{n-1}a_1 \\ &\qquad\qquad + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)!\,2!\,a_{n-2}a_2 + \ldots \\ &\qquad\qquad + n(n-1)!\,a_1 a_{n-1} + n!\,a_0 a_n. \end{aligned}$$

Divisant par $n!$, on a

$$(5) \qquad (n+1)a_{n-1} + na_n = \sum_0^n a_{n-r}a_r$$

D'après (1) et (2)

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 1.$$

D'après (5)

$$a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = \frac{1}{3}, \qquad a_4 = \frac{1}{6},$$

$$a_5 = \frac{7}{60}, \qquad a_6 = \frac{19}{360}, \qquad a_7 = \frac{3}{70},$$

$$a_8 = \frac{5}{336}, \qquad a_9 = \frac{359}{3780}, \qquad \ldots\ldots$$

La loi empirique $\frac{1}{a_r} = m\left(p \pm \frac{1}{q}\right)$ n'est pas générale, et $\frac{1}{a_9}$ ne peut être exprimée sous cette forme.

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2834. (**1904**, 258) (H. Brocard). — *Telle disposition de chiffres dans un système de numération représente-t-elle telle autre disposition dans un autre système* (**1905**, 63). — En thèse générale, *non!* mais pourtant en beaucoup de cas particuliers, *oui.* Prenez deux nombres différents, mais représentés de la même manière dans deux systèmes de numération, il arrivera souvent, mais pas toujours, qu'il en sera de même de leur produit. Ainsi l'on a

$$12 \times 12 = 144 \qquad \text{et} \qquad 21 \times 21 = 441$$

dans toutes les numérations dont la base > 4. De même

$$12 \times 13 = 156 \qquad \text{et} \qquad 21 \times 31 = 651$$

dans toutes celles dont la base > 6; et il en sera ainsi pour tous les produits quand ni la formation des produits partiels élémentaires ni leur addition ne donne lieu à des retenues. C'est ainsi que le carré d'un nombre composé de chiffres 1 qui se suivent donne lieu au même phénomène dans les diverses numérations *aussi longtemps que le nombre de ces* 1 *sera inférieur à la base de la numération.* Par exemple

$$11111^2 = 123454321$$

dans toutes les numérations dont la base est supérieure à 5.

On sait (par leur formule algébrique) que les nombres parfaits sont représentés par un nombre premier de chiffres 1 suivis du

nombre immédiatement inférieur de zéros, dans la numération binaire. Si l'on fait abstraction du premier nombre parfait 6, le nombre de zéros sera toujours pair. Représentons ce nombre par z, il sera facile de voir que le nombre parfait représenté binairement par $z+1$ chiffres 1 suivis de z zéros sera dans la numération tétractique représenté par un 1 suivi de $\frac{z}{2}$ chiffres 3 et de $\frac{z}{2}$ zéros.

Dans la numération octavale, lorsque z est divisible par 3, le même nombre sera représenté par 1 suivi de $\frac{z}{3}$ chiffres 7 et de $\frac{z}{3}$ zéros; mais comme z n'est pas toujours divisible par 3, il se présente un autre type composé de $\left(\text{entier de } \frac{z}{3}\right)$ chiffres 7, puis un 6 suivi de $\left(\text{entier de } \frac{z}{3}\right)$ zéros.

Mais il faut remarquer que, par le fait, les trois numérations binaire, tétractique et octavale ne sont qu'une seule et même numération. CH. BERDELLÉ.

Si je comprends bien la question, la réponse est, en général, négative; elle reviendrait, en effet, à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$N = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^n,$$

x étant la seule inconnue. E.-B. ESCOTT (Ann Arbor.)

2845. (**1904**, 262) (*Rudis*). — *Tables de logarithmes d'addition et de soustraction de Zech.* — On peut encore se les procurer. La 3[e] édition a été publiée en 1892, par la *Wiedmannsche Buchhandlung,* Berlin. E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

2851. (**1904**, 283) (N. QUINT). — *Construction géométrique du point de réfraction.* — C'est la même question que 1039 (**1897**, 78, 188). E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

2857. (**1905**, 5) (MANNHEIM). — *A qui doit-on la transformation par inversion* (**1905**, 72)? — Cette transformation [qui à un point quelconque P fait correspondre un point P′ de la droite OP (O centre fixe), sous la condition que le produit OP.OP′ se conserve constant

en valeur et en signe] est connue aussi sous les noms de *principe des images* (*électriques*) et de *transformation par rayons vecteurs réciproques*.

Sous le nom d'*inversion*, c'est Bellavitis (1836) qui a trouvé et étudié le premier cette méthode de transformation; il l'a exposée dans le Mémoire *Teoria della figure inverse e loro uso nella Geometria elementare* (*Annali di Scienze del Regno Lombardo-Veneto*, t. VI, 1836, p. 121-141). La même transformation, sous le même nom d'*inversion*, a été plus tard (1843) l'objet d'un Mémoire de J.-W. Stubbs, *On the application of a new method to the Geometry of curves and curves surfaces* (*Philos. Magazine*, t. XXIII, 1843, p. 338).

Sous le nom de *The principle of* (*electrical*) *images*, Sir W. Thomson (Lord Kelvin) trouva à son tour et (dès 1845) se servit de la même méthode de transformation (voir *Cambr. and Dublin mathem. Journ.*, t. III, 1848, p. 141); il en communiqua un résumé à Liouville par trois lettres, dont les extraits sont publiés dans le *Journ. de Mathém.* (t. X, 1845, et t. XII, 1847). Liouville rédigea lui-même et publia dans le *Journ. de Mathém.* (t. XII, 1847, p. 265-290) une exposition magistrale et complète de cette méthode, qu'il nomma *transformation par rayons vecteurs réciproques*.

L'*inversion* dont on vient de parler n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la *transformation quadratique* étudiée analytiquement par Magnus (*Cr.*, t. 8, 1832, p. 51); et géométriquement, sous le nom de *projection gauche*, par Steiner (*System. Entwickelung*, etc., 1832, p. 254); et plus tard, sous le nom d'*inversione quadrica*, aussi par Bellavitis dans son *Saggio di Geometria derivata* (*Nuovi Saggi dell' i. r. Accad. d. Scienze, Lettere et Arti di Padova*, vol. IV, 1838).

Sur cette relation entre la *transformation quadratique* et l'*inversion* (*par rayons vecteurs réciproques*), il est intéressant de voir les remarques :

1° De M. G.-V. Schiaparelli (le célèbre astronome de Brera), dans le Mémoire *Sulla trasformazione geometrica delle figure e in particolare sulla trasformazione iperbolica* (*Mem. r. Accad. di Torino*, 2e série, t. XXI, 1862);

2° De T.-A. Hirst, dans le Mémoire *Sull'inversione quadrica*

della curve piane (*A. D. M.*, 1re série, t. VII, Roma, 1865) et dans sa Note *Sur la transformation quadratique* (*N. A.*, 2e série, t. VI, 1866).

G. Jung (Milan).

Autres réponses de M. E.-B. Escott qui cite les noms de Bellavitis, Stubbs, Hirst, Casey, Ingram, et de M. Plakhowo.

2867. (1905, 9) (V. Aubry). — *Théorie du planimètre du capitaine Pritz.* — Références :

Prytz, *Un planimètre économique* (*La Nature*, 2e série, t. XXII, 1894, p. 139).

Gray, *The Hatchet Planimeter* (*Engineering*, t. LVII, 1894, p. 687, 725).

Captain H. Pritz : Lettre donnant une explication du planimètre (*Engineering*, t. LVII, 1894, p. 813; voir *Engineering*, t. LXII, 1896, p. 347, 377).

F.-W. Hill, *The Hatchet Planimeter* (*Proc. Physical Society of London*, t. XIII, 1894, p. 229; *P. M.*, 5e série, t. XXXVIII, 1894, p. 265-269).

E. Hammer, *Das Stangenplanimeter von Prytz, nebst Bemerkungen zur Praxis des Polarplanimeters* (*Zeitschrift für Instrumentenkunde*, t. XV, 1895, p. 90-97, 156, 232, 352; *Physical Society of London; Abstracts of Physical Papers*, t. I, 1895, p. 210).

O. Henrici, *Report on Planimeters* (*R. B. A.*, 1894, p. 496-523). C'est un véritable Mémoire historique et bibliographique donnant une description complète des planimètres les plus connus. Les pages 516 à 520 sont consacrées au planimètre Pritz. On y trouve décrits des perfectionnements de l'appareil Pritz.

A. Poulin, *Le stang-planimètre* (*M.*, 2e série, t. V, 1895; Suppl. I); *Les aires des tractrices et le stang-planimètre* (*J. S.*, 2e série, t. IV, 1895, p. 49-54; voir *Cosmos*, 15 déc. 1894).

Goodman's *Hatchet Planimeter* (*Engineering*, t. LXII, 1896, p. 255).

E.-K. Scott, *Improved stang-planimeter* (*Engineering*, t. LXII, 1896, p. 205); *Goodman's Stangen-Planimeter* (*Praktische Maschinen Constructeur*, t. XXX, 1897, p. 85; Leipzig); *Theorie des Prytz'schen Stangenplanimeters* (*Zeitschrift für Vermessungswesen*, t. XXVIII, 1899, p. 315-317; Stuttgart).

Maffiotti, *Das Stangenplanimeter (Beilschneiden-planimeter) von Prytz (Zeitschrift für Instrumentenkunde*, t. XXII, 1902, p. 338; Berlin).

Plusieurs des écrivains qui discutent le planimètre Pritz pensent qu'il n'est pas assez exact pour beaucoup d'études d'ingénieur. D'après M. Hammer le minimum de l'erreur est environ 1 pour 100. Les planimètres de MM. Goodman et Scott constituent, d'après eux, un perfectionnement par rapport à celui de Pritz.

Le planimètre Pritz est manufacturé par Cornelius Kundsen, Kjöbmagergade, 37, Copenhagen. Prix : 11 marks (14^{fr}).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

Autre réponse de M. Jonesco qui renvoie à *Mathesis* (Supp.), 1895; *Tidsskrift for Opmalings-og Matrikulvaesen*, 1895; *Teknisse Forenings Tidsskrift*, 1882.

2870. (**1905**, 10) (T. Lemoyne). — *Cubiques circulaires.* — Cette question a été posée par inadvertance. C'est, sous une forme différente, l'énoncé du cas particulier déjà indiqué du théorème qui a fait l'objet de la question 2707 (**1904**, 4, 107, 129, 174, 263).

T. Lemoyne.

Autres réponses de M. Malo, et de M. Espanet qui fait remarquer que les propriétés indiquées par M. Lemoyne résultent du fait que la cubique circulaire à point double est la podaire d'une parabole par rapport à ce point.

2872. (**1905**, 25) (E. Weber). — *Équation, en coordonnées cartésiennes, de la courbe polaire réciproque du cercle circonscrit à un triangle, la courbe directrice étant : 1° le cercle inscrit; 2° le cercle des neuf points.* — Je prends le centre du cercle directeur pour origine des coordonnées, son rayon $= R$, les coordonnées du centre du cercle circonscrit $x = m$, $y = 0$, rayon $= r$. Alors l'équation de la courbe polaire réciproque est

$$x^2(r^2 - m^2) + 2xmR^2 + y^2r^2 = R^4.$$

1° $$m = \sqrt{r^2 - 2r\rho}, \qquad R = \rho;$$

2° $$m = \frac{1}{2}\sqrt{9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}, \qquad R = \frac{r}{2}.$$

Weinmeister (Tharandt, Saxe).

2873. (**1905**, 26) (LAZZARO FILUS). — ***Deviner un nombre d'après les cartons où il est inscrit*** (**1905**, 119). — Deux solutions ternaires. Dans la première, fondée sur la numération ternaire qui s'écrit avec trois chiffres 0, 1 et 2, on a sept cartons ayant pour premier chiffre inscrit les nombres de la progression ternaire et leurs doubles :

1 2   3 6   9 18   27 54   81

On transforme le nombre en numération ternaire et l'on trouve ainsi l'indication des cartons où chacun des 100 premiers nombres doit être inscrit. Dans la seconde solution, fondée sur ce principe qu'avec des poids en progression ternaire on peut avec un seul échantillon de chaque poids peser les nombres depuis 1 jusqu'à la somme de tous les poids, mais en se servant des deux plateaux de la balance, il suffira d'avoir des cartons de deux couleurs différentes portant les titres :

1   3   9   27   81

et d'affecter à l'une des couleurs le sens de +, à l'autre celui de —. Neuf cartons suffiront pour aller jusqu'à 100 :

1	— 1	2	5
10	— 10	20	50
100	—100	200	500

Il y aurait deux autres systèmes à établir sur celui de la numération en chiffres romains et sur celui de nos poids et mesures. Dans les deux systèmes il faudrait douze cartons dont trois de couleurs différentes dans l'un d'eux; dans les deux, pour inscrire chaque nombre sur les cartons, on s'aiderait de la numération en chiffres romains, en observant que

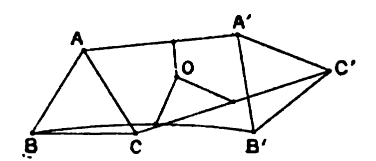
IV = I II I,   IX = V I II I, ...

Ces deux derniers jeux familiariseraient plus vite nos enfants avec le système de nos poids métriques. CH. BERDELLÉ.

QUESTIONS.

2930. [**R1c**] Quand on applique, dans l'espace, la construction classique qui conduit à la notion géométrique du centre instantané de rotation d'une figure dans le plan, on rencontre la difficulté suivante qu'il serait intéressant de résoudre clairement :

Soient ABC et A'B'C' deux triangles égaux situés d'une manière quelconque dans l'espace; les plans perpendiculaires aux milieux des droites AA', BB', CC' qui joignent les sommets homologues se coupent en un point O. Les deux



tétraèdres OABC et OA'B'C' ont tous leurs éléments égaux. Démontrer *directement* que ces deux tétraèdres sont symétriques et non égaux. (Ils ne seraient égaux que si les trois plans précédents passaient par une même droite.)

J.-E. Estienne.

2931. [**J4d**] Quels théorèmes généraux connaît-on sur la structure des groupes d'ordre $p^n - 1$, p étant premier et n entier?

Dans le cas de n impair, j'ai trouvé qu'il existe un sous-groupe invariant dont l'ordre est une puissance de f, f étant un diviseur premier de $p^n - 1$, mais non de $p^m - 1$ si $m < n$.

Dickson.

2932. **[I3b]** En supposant que $p^n - 1$ et n aient un diviseur commun d, dans quel cas $p^{\frac{n}{\delta}} - 1$ est-il divisible par $p^{\frac{n}{d}} - 1$, δ étant un diviseur d? Ceci a lieu, en particulier, pour $\delta = 1$.

DICKSON.

2933. **[I3b]** Le proposition suivante est-elle exacte?

Soient p un nombre premier, a et b (b non carré parfait) deux entiers non divisibles par p et $a^2 \not\equiv b \pmod{p}$.

I. Supposons $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$.

Si $\left(\frac{a^2 - b}{p}\right) = 1$, nous avons une des deux congruences

$$(a + \sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Si $\left(\frac{a^2 - b}{p}\right) = -1$, nous avons une congruence de la forme

$$(a + \sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \equiv k\sqrt{b} \pmod{p},$$

où k satisfait à la congruence $k^2 b \equiv 1 \pmod{p}$.

II. $\left(\frac{b}{p}\right) = -1$.

Si $\left(\frac{a^2 - b}{p}\right) = 1$, nous avons une congruence de la forme

$$(a + \sqrt{b})^{\frac{p+1}{2}} \equiv m \pmod{p},$$

où $m^2 \equiv a^2 - b \pmod{p}$.

Si $\left(\frac{a^2 - b}{p}\right) = -1$, nous avons une congruence de la forme

$$(a + \sqrt{b})^{\frac{p+1}{2}} \equiv n\sqrt{b} \pmod{p},$$

où $n^2 b \equiv a^2 - b \pmod{p}$.

NAZAREVSKY (Kharkov, Russie).

2934. [I13c] L'énoncé de la question 2484 (1902, 316) donne implicitement des valeurs en nombre infini de x telles que le binome (x^2+1) soit, de deux façons différentes, décomposable en un produit de deux binomes de même forme

$$(4) \qquad (x^2+1) = (y^2+1)(z^2+1).$$

Pour ces valeurs, on a à la fois

$$x = y_1 z_1 + 1 \qquad \text{et} \qquad x = y_2 z_2 + 3.$$

Si, dans la formule (3) (*loc. cit.*), l'on désigne par b_n la $n^{\text{ième}}$ valeur de b qui satisfasse aux deux conditions précédentes, on peut écrire

$$(5) \left\{ \begin{aligned} &[b_n(b_n+1)+1]^2+1 \\ &\quad = \left(\overline{b_n+1}^2+1\right)(b_n+1) \\ &\quad = \left[\overline{\tfrac{1}{2}(5b_n-b_{n-1})+1}^2+1\right]\left[\overline{\tfrac{1}{2}(5b_{n-1}-b_{n-2})+1}^2+1\right]. \\ &\quad b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2, \qquad b \ldots,\ 1,\ 7,\ 43,\ 253,\ \ldots. \end{aligned} \right.$$

Exemples :

$$\begin{aligned} 3^2+1 &= (2^2+1)(1^2+1) &&= (3^2+1)(0^2+1), \\ 57^2+1 &= (8^2+1)(7^2+1) &&= (18^2+1)(3^2+1), \\ 1893^2+1 &= (44^2+1)(43^2+1) &&= (105^2+1)(18^2+1), \\ 64263^2+1 &= (254^2+1)(253^2+1) &&= (612^2+1)(105^2+1). \end{aligned}$$

. . . .

Est-il possible :

1° De trouver des valeurs de x non comprises dans les formules (5) qui donnent pour x^2+1 deux décompositions de la forme considérée?

2° De déterminer x de manière à obtenir 3, 4, ... décompositions analogues?

P.-F. Teilhet.

2935. [**B12**] Quels sont les principes des imaginaires de Despeyrous, cités par M. H. Laurent dans sa réponse à la question **2793** (**1905**, 58)?

Prière de donner aussi les indications bibliographiques utiles. H. Hoffbauer.

2936. [**H11c**] En cherchant à mettre en évidence la partie non uniforme d'une fonction analytique d'après les changements qu'elle éprouve lorsque la variable indépendante tourne autour d'un point critique, on rencontre le problème suivant :

Étant donnés deux systèmes de variables indépendantes

(1) $$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,$$

(2) $$x',\quad y',\quad z',\quad \ldots,$$

trouver toutes les fonctions f d'une seule variable telles que les relations

(3) $$\begin{cases} x' = f(x), \\ y' = f(y), \\ z' = f(z), \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

entraînent une relation de la forme

(4) $$F(x', y', z', \ldots) = F(x, y, z, \ldots)$$

(*la fonction* F *étant la même dans les deux membres de l'équation*).

Dans le cas où le nombre de variables (1) ainsi que celui de (2) est égal à 2, on a comme solutions particulières :

1° $f(x) = ax + b$ conduisant à une fonction

$$F(x, y) = (x - y)^{\lambda} \qquad \left(\lambda = \frac{2k\pi i}{\log a}\right),$$

ou, dans le cas de $a = 1$, à une fonction

$$F(x, y) = x - y;$$

2° $f(x) = ax^b$ conduisant à une fonction

$$F(x, y) = \left(\log \frac{x}{y}\right)^\lambda \qquad \left(\lambda = \frac{2k\pi i}{\log b}\right),$$

ou, dans le cas de $b = 1$, à une fonction

$$F(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Préciser les fonctions f dans le cas où le nombre de variables (1) et (2) est égal à 2, 3, 4.

Gé (Belgrade, Serbie).

2937. [U8] Il est facile de constater, dans les cours d'eau soumis au régime de la marée, que (par une température et une pression barométrique normales, sans le moindre vent) le *courant* continue à monter alors que la *marée* descend depuis longtemps.

(En Cochinchine, par exemple, le courant ne se renverse qu'une heure ou deux après la marée.)

Je serais heureux qu'on voulût bien me donner : 1° une explication mathématique et élémentaire du phénomène; 2° une formule permettant de calculer le retard du courant sur la marée, dans un lieu et pour une date lunaire convenus.

G. Lemaire (Saïgon).

2938. [A1] Dans les deux expressions

$$a_1 + a_2(1+x)^n + a_3(1+x)^{2n} + a_4(1+x)^{3n} + \ldots + a_{k+1}(1+x)^{kn},$$

$$b_1(1+x) + b_2(1+x)^{n+1} + b_3(1+x)^{2n+1}$$
$$+ b_4(1+x)^{3n+1} + \ldots + b_{k+1}(1+x)^{kn+1},$$

les $2k+2$ coefficients $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ peuvent être choisis de façon que les termes constants, les coefficients

de x, x^2, ..., x^{2k} soient les mêmes dans les deux expressions.

Je désire connaître la forme de ces coefficients dans le cas général. J'ai vérifié que l'on a

$$a_1 = b_{k+1}, \qquad a_2 = b_k, \qquad \ldots.$$

Si $n = 2$, il est facile de démontrer que les coefficients sont les coefficients alternés du développement de $(x+y)^{2k+1}$.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2939. [**A1**] Dans la question précédente, si l'on pose $x = \frac{\alpha}{r}$ et $(r+\alpha)^n = \mathrm{N}$ et que $\frac{\alpha}{r}$ soit petit, les deux expressions sont à peu près égales et l'on a la valeur suivante approchée de $\mathrm{N}^{\frac{1}{n}}$:

$$\mathrm{N}^{\frac{1}{n}} = \frac{a_1 r^{kn} + a_2 r^{(k-1)n}\mathrm{N} + a_3 r^{(k-2)n}\mathrm{N}^2 + \ldots + a_{k+1}\mathrm{N}^{kn}}{a_{k+1} r^{kn} + a_k r^{(k-1)n}\mathrm{N} + a_{k-1} r^{(k-2)n}\mathrm{N}^2 + \ldots + a_1 \mathrm{N}^{kn}}\, r.$$

Si $k = 1$, on a

$$\mathrm{N}^{\frac{1}{n}} = \frac{(n-1)r^n + (n+1)\mathrm{N}}{(n+1)r^n + (n-1)\mathrm{N}}\, r,$$

où r est une première approximation de $\mathrm{N}^{\frac{1}{n}}$.

Cette approximation fut indiquée par Chas. Hutton [*voir* question **2677** (**1903**, 275)].

Si $k = 2$, on a

$$\mathrm{N}^{\frac{1}{n}} = \frac{(n-1)(2n-1)r^{2n} + 2(2n+1)(2n-1)r^n\mathrm{N} + (n+1)(2n+1)\mathrm{N}^2}{(n+1)(2n+1)r^{2n} + 2(2n+1)(2n-1)r^n\mathrm{N} + (n-1)(2n-1)\mathrm{N}^2}\, r.$$

Cette dernière formule a-t-elle déjà été publiée?

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

RÉPONSES.

577. (**1895**, 181; **1903**, 226) (VENTURA R. PROSPER). — *Propriétés de l'axe radical déduites des figures de l'espace* (**1901**, 139). — *Voir* les réponses à **1775** (**1901**, 173; **1904**, 80) et **2558** (**1903**, 198, 222, 287; **1904**, 53, 101). E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

687. (**1895**, 401). — *Formule approchée du périmètre de l'ellipse* (**1896**, 7, 137, 235; **1897**, 64, 202; **1900**, 409; **1902**, 239; **1903**, 281). — Je trouve empiriquement la formule suivante, approchée en général à moins de $\frac{1}{150}$ par excès ou par défaut, exacte pour $b = 0$ et au voisinage de $b = 0,5$ $(a = 1)$:

$$p = \sqrt{a^2 + 9b^2} + \sqrt{b^2 + 9a^2}.$$

Elle donne la construction géométrique très simple que voici, pour le quart q du périmètre. Soient $OA = a$ et $OB = b$ les demi-axes en position. Sur leurs prolongements, on prend respectivement les points A_3 et B_3, tels que :

$$OA_3 = 3\,OA \qquad \text{et} \qquad OB_3 = 3\,OB.$$

On trace les droites AB_3 et BA_3; soit I leur point d'intersection. On a

$$q = AI + IB.$$

D'ailleurs I est sur la diagonale OC du rectangle OACB et

$$OI = \tfrac{3}{4}\,OC.$$ H. HOFFBAUER.

728. (**1896**, 30; **1905**, 98) (G. ENESTRÖM). — *Sur une brochure de Jacques Bernoulli.* — M. Eneström a lui-même trouvé un exemplaire de cette brochure dans la bibliothèque de M. A. Pringsheim, à Munich, et en a publié le titre complet dans la *Bibliotheca*

Mathematica (3e série, t. I, p. 274; Leipzig, 1900). Il est peut-être utile d'ajouter à cette information que l'opuscule de Jacques Bernoulli existe en outre à la Bibliothèque nationale, à Paris.

H. Braid.

872. (**1896**, 174) (G. de Rocquigny). — *Tables de nombres premiers* $4n+1$ *donnant leur décomposition en deux carrés* (**1897**, 86). — Références :

C.-G.-J. Jacobi (*C. R.*, t. XXX, 1846, p. 174) jusqu'à 11981.

Reuschle, *Neue zahlentheoretische Tabellen* (Progr. Stuttgart, 1856) jusqu'à 12377 pour tous les nombres premiers; de 12401 à 24917 pour les nombres premiers de cette forme pour lesquels 10 est un résidu quadratique.

Lieut.-Col. Allan Cunningham, *Quadratics partitions* (London, 1904). E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

1271. (**1898**, 80) (*Martin*). — *Théorie des fractions continues périodiques* (**1898**, 215; **1899**, 16, 252; **1905**, 34). — Références :

T. Muir, *The Expression of a Quadratic Surd as a Continued Fraction* (Glasgow, 1874).

T. Muir (*M. M.*, 2e série, t. XIV, 1884, p. 115).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

1299. (**1898**, 126) (F. Michel). — *Machines à calculer* (**1898**, 240; **1899**, 18, 252; **1900**, 133; **1905**, 14). — Une récente machine est la « Monopol » Simplex, Duplex, and Progress-Rechenmashinen, construite par *Schubert et Salzer Maschinenfabrik aktiengesellschaft,* Chemnitz. E.-B. Escott (Ann Arbor).

2175. (**1901**, 223) (E.-B. Escott). — *Nombres à la fois triangulaires, carrés et hexagonaux* (**1905**, 16). — Je m'aperçois que dans la série dont il est question à la fin de ma réponse (**1905**, 16), les termes sont alternativement multiples de 8 plus 4 et multiples de 8. Ma démonstration est donc incomplète. Ph. Jolivald.

2245. (**1901**, 309) (H. Brocard). — *Sur l'hyperbole d'Apollonius* (**1902**, 244). — Une étude complète à ce sujet, due à M. Droz-Farny (Porrentruy) vient de paraître aux *Mitteil. der Naturf. Gesells. in Bern,* 1905.

A la bibliographie déjà indiquée (**1902**, 244) l'auteur ajoute :

M. Chasles, *Sections coniques*, p. 142.

B. Niewenglowski, *Centre de l'hyperbole d'Apollonius* (*J. S.*, 1884, p. 78-80).

C. Michel, quest. **352** (*J. S.*, 1892).

E. Duporcq, *Premiers principes de Géométrie moderne*. Exercice **11**.

La Rédaction.

Voir aussi :

Propriétés diverses de l'hyperbole d'Apollonius. Questions **149**, **163**, **164** (*N. A.*, 1847, p. 367, 370).

A. Mannheim (*N. A.*, 1898, p. 340, quest. **1803**, résol. 1901, p. 474, et 1902, p. 136, 285).

E. Duporcq (*N. A.*, 1901, p. 474-475).

A. Gob (*M.*, 1905, p. 76-78, quest. **1415** *bis* et **1416**).

Déprez (*M.*, 1905, p. 112, quest. **1519**).

H. Brocard.

2382. (**1902**, 173) (A. Droz-Farny). — Le deuxième Volume des *Œuvres de Laguerre* vient de paraître (avril 1905) à la librairie Gauthier-Villars.

La Rédaction.

2397. (**1902**, 203) (E.-B. Escott). — *Solutions en nombres rationnels de l'équation*

$$x^5-(a^2+b^2)x^3+a^2b^2x+c=0.$$

— Comme addition à la solution donnée dans la question, j'indiquerai les trois cas suivants, dans lesquels on trouve trois racines rationnelles :

$$a=29,\quad b=17,\quad c=1330560,\quad x=27,\ -7,\ -11,$$
$$a=31,\quad b=19,\quad c=2217600,\quad x=25,\ -9,\ -11,$$
$$a=68,\quad b=57,\quad c=-178378200,\quad x=75,\ 42,\ 13.$$

Il est facile de trouver autant de valeurs de a et b que l'on veut, l'un d'eux ou les deux étant des racines carrées et tels que l'équation ait trois racines rationnelles; l'équation peut également avoir cinq racines rationnelles; exemple :

$$a=\sqrt{44},\quad b=1,\quad c=-1680,\quad x=7,\ -4,\ -6.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2402. (**1902**, 205) (PETROVITCH). — *Formule sommatoire d'Abel.* — Je pense que la fonction $\varphi(x)$ n'est assujettie à aucune restriction et a toute sa généralité, puisque Abel dit, à la page 18 :

« Lorsque φ est une fonction algébrique, logarithmique, exponentielle ou circulaire, on peut, comme on sait, toujours exprimer la valeur réelle de $\varphi(x+yi)+\varphi(x-yi)$ sous forme réelle et finie. Si, au contraire, φ conserve toute sa généralité, on n'a pas, que je sache, jusqu'à présent pu l'exprimer sous forme réelle et finie. On peut le faire à l'aide d'intégrales définies de la manière suivante, etc. ».

A la page 25, il parle de la sommation de la série infinie

$$S=\varphi(x+1)-\varphi(x+2)+\varphi(x+3)-\varphi(x+4)+\ldots,$$

et enfin, à la page 27, après quelques transformations, il parvient à la formule

$$\begin{aligned}&\varphi(1)-\varphi(2)+\varphi(3)-\varphi(4)+\ldots\\&=\frac{1}{2}\varphi(0)+2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{\varphi(ti)-\varphi(-ti)}{2i};\end{aligned}$$

en posant $\varphi(x)=\dfrac{1}{x+1}$, on a

$$\frac{\varphi(ti)-\varphi(-ti)}{2i}=-\frac{t}{1+t^2},$$

donc

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots=\frac{1}{2}-2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(1+t^2)(e^{\pi t}-e^{-\pi t})},$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(1+t^2)(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}=\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{4}.$$

En général, je crois que $\varphi(x)$ doit être une telle fonction pour qu'on puisse sommer la série

$$\varphi(1)-\varphi(2)+\varphi(3)-\varphi(4)+\ldots,$$

car autrement l'intégrale définie ne pourrait pas avoir pour valeur une quantité connue. N. PLAKHOWO (Russie).

Les fonctions $\varphi(z)$, auxquelles la formule sommatoire en question serait applicable, sont certainement restreintes. La démonstration

d'Abel manque, d'ailleurs, complètement de rigueur. La formule n'est applicable, entre autres, ni aux fonctions paires, ni aux impaires. Sa démonstration rigoureuse serait à désirer et rendrait des services.
M. PETROVITCH (Belgrade).

2481. (**1902**, 314) (P.-F. TEILHET). — *Solution de l'équation*

$$(1) \qquad 4A^4+1=B^2C.$$

— On peut écrire

$$4A^4+1=(2A^2-2A+1)(2A^2+2A+1),$$

et, puisque les deux facteurs n'ont pas de diviseur commun, l'un d'eux est divisible par B^2. On peut aussi écrire

$$(2) \qquad 4(A-1)^4+1=(2A^2-2A+1)(2A^2-6A+5)=B^2D,$$

$$(3) \qquad 4(A+1)^4+1=(2A^2+2A+1)(2A^2+6A+5)=B^2E.$$

Il en résulte que toute solution de (1) est solution de (2) ou de (3).

En adoptant la notation des congruences, l'équation (1) équivaut à

$$(4) \qquad 2A^2\pm 2A+1\equiv 0 \pmod{B^2},$$

ce que l'on peut écrire

$$(5) \qquad (2A\pm 1)^2+1\equiv 0 \pmod{B^2}.$$

Pour résoudre cette congruence, on peut employer la méthode donnée généralement dans les Traités sur la théorie des nombres (CAHEN, *Théorie des nombres*, p. 99, § 169) ou encore procéder comme suit :

Écrivons la congruence (5) sous la forme

$$(6) \qquad (2A\pm 1)^2+1=B^2F.$$

Nous savons que tous les facteurs premiers de B sont de la forme $4n+1$. Supposons que B^2 soit exprimé par une somme de deux carrés

$$B^2=K^2+L^2;$$

réduisons $\frac{K}{L}$ en fraction continue et cherchons-en les réduites ..., $\frac{H}{J}$, $\frac{K}{L}$. Alors, on a

$$(K^2+L^2)[(Kx\pm H)^2+(Lx\pm J)^2]$$
$$=[(K^2+L^2)x\pm(HK+JL)]^2+1.$$

[*Voir* la question **2483** (**1904**, 195).]

On peut alors poser

$$2A\pm 1=B^2x\pm(HK+JL),$$

où x est un entier. La solution de cette équation donne l'expression générale de A.

Exemples :

1° Si $B=5$,

$$B^2=25=4^2+3^2, \qquad \frac{4}{3}=(1,3),$$

$\frac{1}{1}$, $\frac{4}{3}$ sont les réduites

$$[(4x\pm 1)^2+(3x\pm 1)^2]\,25=(25x\pm 7)^2+1,$$
$$2A\pm 1=25x\pm 7.$$

Soit $x=2y$,

$$A=25y\pm 3 \qquad \text{ou} \qquad 25y\pm 4.$$

2° Si $B=13$,

$$A=169y\pm 49 \qquad \text{ou} \qquad \pm 50.$$

3° Si $B=17$,

$$A=289y\pm 125 \qquad \text{ou} \qquad \pm 126.$$

4° Si $B=25$,

$$A=625y\pm 221 \qquad \text{ou} \qquad \pm 222.$$

5° Si $B=29$,

$$A=841y\pm 20 \qquad \text{ou} \qquad \pm 21.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor).

2512. (**1903**, 34) (Werebrusow). — *Valeurs de* x^3-y^2 (**1903**,

283, 316; **1904**, 152; **1905**, 43). — On a encore les égalités

$$\overline{93844}^3 - \overline{28178141}^2 = -297,$$
$$\overline{421351}^3 - \overline{273505487}^2 = -618,$$
$$\overline{657547}^3 - \overline{533200074}^2 = 847,$$
$$\overline{11393}^3 - \overline{1216066}^2 = -899,$$
$$\overline{11815}^3 - \overline{1284253}^2 = 366,$$
$$\overline{30333}^3 - \overline{5282908}^2 = -427.$$

WEREBRUSOW (Théodésia).

2518. (**1903**, 36) (HOFFBAUER). — *Géométrie des troisième et quatrième degrés* (**1903**, 216). — A signaler l'apparition récente de l'*Introduction à la Géométrie du troisième ordre,* par F. DUMONT, Annecy, 1904. H. HOFFBAUER.

2559. (**1903**, 97) (E.-B. ESCOTT). — *Développement en fraction continue* (**1903**, 318; **1904**, 154). — La réponse de M. Werebrusow ne répond pas exactement à la question.

Si l'on pose

$$(1)\qquad \sqrt{N} = a^2 + \frac{[2a, b, c, \ldots, c]}{[b, c, \ldots, c, b]} = a^2 + k,$$

$$(2)\qquad 2a = kb + \frac{k[d, \ldots, c, b] - [c, \ldots, c]}{[b, c, \ldots, c]} = kb + l,$$

$$(3)\qquad k = lc + m,$$

$$(4)\qquad l = md + n,$$

$$\ldots\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(r)\qquad r = sb + (-1)^r[c, \ldots, c],$$

où r est le nombre des éléments $a, b, c, \ldots, c, b, a$, on en déduit (*voir* LEJEUNE-DIRICHLET, *Zahlentheorie*, p. 47 et 48)

$$(A)\qquad 2a = [b, c, \ldots, c, b]s + (-1)^r[b, c, \ldots, c][c, \ldots, c],$$

$$(B)\qquad k = [b, c, \ldots, c]s + (-1)^r[c, \ldots, c]^2,$$

où s est entier. Si $b, c, \ldots$ sont choisis de façon que le second membre de l'équation (A) soit un nombre pair, N sera entier.

Depuis que j'ai trouvé ces formules, j'ai reçu de M. Thomas Muir, Cape-Town (South-Africa), une brochure : *The Expression of a*

Quadratic Surd as a Continued Fraction (Glasgow, 1874) qui contient (p. 29) une formule équivalente.

Sur le même sujet, cet auteur a, en outre, publié les brochures suivantes :

The Researches of M. E. de Jonquières on Periodic Continued Fractions (*P. R. S. E.*, t. XII, 1883-1884, p. 389-400).

On the Phenomenon of Greatest Middle *in the Cycle of a Class of Periodic Continued Fractions* (*P. R. S. E.*, t. XII, 1883-1884, p. 578-592).

On Continued Fractions which represent the square roots of Integers and have an even number of Elements in the Cycle of partial denominators (*M. M.*, 2e série, t. XIV, 1884, p. 115-122).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

2593. (**1903**, 149) (J. Amodeo). — *Sur le mathématicien Jourdan* (**1903**, 272; **1904**, 219). — La question ne me semble pas résolue.

Chasles, dans son *Aperçu historique* (p. 328), parle du jeune Napolitain Giordano di Ottaïno.

D'autre part, dans une Notice historique complète sur le problème en question, parue sous la signature de M. Davies dans le Volume CXI (1856) du *Mathematician*, il est dit que Giordano est un des noms de baptême d'Ottajano.

Cette même Notice donne 1784 comme étant la date à laquelle ce mathématicien fit connaître sa solution du problème général consistant à inscrire dans un cercle un polygone de n côtés dont les côtés passent par n points donnés. J. Fitz-Patrick.

2654. (**1903**, 251) (Audis). — *Étude d'une courbe* (**1904**, 56). — Note : A la cochléoïde on peut associer utilement une courbe d'équations analogues que j'appellerai la *syncochléoïde*.

En effet, on a pour chacune d'elles ($\varphi = 2\theta$) :

Cochléoïde.	*Syncochléoïde.*
$x_1 = a\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$,	$x_2 = a\dfrac{1+\cos\varphi}{\varphi}$,
$y_1 = a\dfrac{1-\cos\varphi}{\varphi}$,	$y_2 = a\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$,
d'où $r_1 = a\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.	d'où $r_2 = a\dfrac{\cos\theta}{\theta}$.

Entre leurs éléments, on a des relations simples

$$x_1 = y_2 = \frac{r_1 r_2}{a}\theta,$$

$$x_2 y_1 = x_1 y_2 = x_1^2 = y_2^2,$$

$$x_2 + y_1 = \frac{a}{\theta},$$

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{a^2}{\theta^2},$$

d'où

$$(x_2 + y_1)^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

H. Hoffbauer.

2701. (**1904**, 1) (P.-F. Teilhet). — *Solution du système*

$$ab - cd = -1 \quad et \quad a^2c^2 - 2b^2d^2 = \pm 2$$

en nombres entiers. — Soient $ac = 2x$, $bd = y$; la seconde équation peut s'écrire

$$y^2 - 2x^2 = \mp 1.$$

La solution générale de cette équation est

$$y = \frac{1}{2}(\alpha^n + \beta^n), \qquad x = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^n - \beta^n)$$

ou

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \beta = 1 - \sqrt{2}.$$

Puisque

$$ab - cd = -1, \qquad abcd = 2xy,$$

on en déduit

$$ab + cd = \sqrt{8xy + 1},$$

c'est-à-dire que $8xy + 1$ doit être un carré

$$xy = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\alpha^{2n} - \beta^{2n}).$$

Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, on a la série récurrente

$$w_n = xy = 0,\ 1,\ 6,\ 35,\ 204,\ \ldots$$

avec la relation

$$w_{n+2} = 6w_{n-1} - w_{n-2}.$$

Prenant les résidus de ces séries (mod p), où p est un nombre premier, et rejetant les valeurs de n pour lesquelles $8w_n + 1$ n'est

pas congru à un résidu quadratique de p, on trouve, pour différentes valeurs de p, les congruences suivantes :

$$n \equiv 0, 1, 2 \pmod{4} \quad \text{quand} \quad p = 3,$$
$$n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{6} \quad » \quad p = 5,$$
$$n \equiv 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 11 \pmod{12} \quad » \quad p = 11,$$
. . . .

En allant jusqu'à $p = 47$, on trouve que les seules valeurs de $n < 342$ sont $n = 0, 1, 2$; ce qui donne les solutions indiquées par M. Teilhet. Par suite, il n'y a pas d'autre solution pour ab ou cd moindre que 10^{261}. Cette solution est semblable à ma solution de la question 976 (**1900**, 129). E.-B. Escott (Ann Arbor).

2786. (**1904**, 118) (T. Hayashi). — (**1905**, 82). — D'après une remarque de M. Barisien, l'enveloppe définie (*loc. cit.*) n'est simple que si les trois cercles donnés sont concentriques. Elle se compose alors, en réalité, de deux cercles doubles, concentriques.

Il est donc à présumer que, dans le cas général, l'enveloppe est au moins du huitième degré, de sorte que le problème proposé ne serait pas graphique. La Rédaction.

2846. (**1904**, 262) (*Rudis*). — *Renseignements bibliographiques sur la théorie des nombres.* — 1° Cette identité a été indiquée par Fibonacci, d'après M. Ed. Lucas, page 125 de sa *Théorie des nombres,* mais il dit aussi dans son Introduction à la *Théorie des nombres* (p. xxvi) :

« L'identité de Platon généralisée conduit à la formule

$$(v^2 + s^2)(v_1^2 + s_1^2) = (vv_1 - ss_1)^2 + (vs_1 + v_1 s)^2,$$

elle est due aux géomètres indiens et se trouve dans *Liber quadratorum* de Fibonacci. » N. Plakhowo.

2848. (**1904**, 282) (P. Renard). — *Questions d'Algèbre.* — On trouve en roumain un Ouvrage analogue à celui de Maupin : *Culegere de probleme,* par A.-S. Joachimescu, contenant en deux Volumes 1579 problèmes d'Algèbre avec les réponses et des indications pour faciliter la résolution. Le premier Volume contient en plus des problèmes d'Arithmétique, Géométrie et Trigonométrie.

J. Jonesco (Bucarest).

2858. (**1905**, 5) (MANNHEIM). — *Notation abrégée* (**1905**, 91). — Dans son *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie,* Lamé a fait usage de la notation abrégée. Cet Ouvrage, qui a paru en 1818, est antérieur aux publications de Bobillier et de Plücker.

Je crois me rappeler que Dupin, aussi, a employé la notation abrégée, mais, ne sachant plus dans quel travail, j'ai posé ma question.

MANNHEIM.

Dans le numéro d'avril 1905 (p. 90) on nomme comme inventeurs de la notation abrégée Bobillier et Plücker, et l'on cite pour Bobillier les *Annales de Gergonne* (t. XVIII, 1827-1828). Or, la notation abrégée est plus ancienne que cela. Elle remonte à G. Lamé (alors élève ingénieur au corps royal des mines) dans un tout petit Volume : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie* (Paris, 1818, chez Mme Ve Courcier). Lamé y dit (p. 28) :

« Je supposerai d'abord que les trois lieux géométriques soient du même degré D. Je désignerai par $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$, $\varepsilon'' = 0$ leurs équations.

» ... l'équation $m\varepsilon + m'\varepsilon' = 0$ pourra représenter tout lieu géométrique du degré D passant par les intersections des lignes ou surfaces représentées par les équations $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$. »

On ne saurait exprimer plus clairement la méthode en question.

MORITZ CANTOR (Heidelberg).

2862. (**1905**, 6) (T. LEMOYNE). — *Lieu du centre de gravité d'un triangle* (**1905**, 93). — I. La conique est une ellipse Φ et soit P la parabole; considérons le cercle principal de Φ, Φ', et la parabole P' dont Φ et P sont les projections orthogonales; le lieu géométrique des centres de gravité des triangles inscrits à Φ' et circonscrits à P' est une droite qui divise les segments de droites compris entre la directrice Δ' de P' et le diamètre de Φ' qui lui est parallèle au tiers à partir de ce diamètre; en projection ce diamètre devient le diamètre de Φ conjugué à la direction de l'axe de P, et la directrice Δ' devient une droite parallèle à ce diamètre; le lieu du centre de gravité est la droite parallèle aux précédentes qui coupe tous les segments de droites compris entre elles au tiers à partir du diamètre de Φ.

II. La conique est une parabole Π, soit P la parabole à laquelle sont circonscrits les triangles inscrits à Π; ces deux paraboles jouissant de la propriété en question, en l'un des points d'intersection de Π et de P, M; la tangente en M à P est parallèle à l'axe de Π, cela est évident.

En reprenant le raisonnement précédent et en supposant que Φ s'allongeant indéfiniment devienne la parabole Π, on voit immédiatement que le lieu du centre de gravité est une parallèle à l'axe de Π qui divise tous les segments de droites compris entre la tangente en M à P et le diamètre de Π conjugué à la direction de l'axe de P au tiers à partir de ce diamètre.

III. La conique est une hyperbole Θ; considérons la figure où Θ' est une hyperbole équilatère et P' une parabole dont la projection orthogonale reproduit la figure Θ, P; tous les triangles inscrits à Θ' et circonscrits à P' ayant leurs orthocentres à la fois sur Θ' et sur la directrice Δ' de P', tous ces orthocentres se confondent en l'un des points d'intersection de Δ' et de Θ'; soit H' ce point; il est le centre de similitude directe commun à tous les cercles circonscrits aux triangles et à leurs cercles de Feuerbach correspondants; tous les cercles circonscrits passant par le foyer f' de P', tous les cercles de Feuerbach passent par le point φ' tel que $H'\varphi' = \frac{H'f'}{2}$; tous les cercles de Feuerbach passant par le centre ω' de Θ, tous les cercles circonscrits passent par le point o' tel que $H'o' = 2H'\omega'$, donc tous les cercles circonscrits passant par deux points fixes f' et o' ont leurs centres en ligne droite et le théorème devient évident.

28 avril 1905.

G. Espanet
(Shih-Chia-Chuang de Tcheng-Ting-Fou
du Pei-Chih-Li, Chine).

2866. (**1905**, 9) (A. Kristhoff). — I. *Méthode Cassella.* — A la date du 19 juillet 1802, la *Societa italiana delle Scienze* de Modane proposa pour son concours annuel la question suivante (que je traduis à la lettre) :

« Exposer la méthode la plus courte, autrement dit la moins pénible, pour déterminer les racines numériques des équations de degré quelconque. »

Les réponses devaient parvenir à la Société pour le 19 juillet 1803.

Cinq concurrents répondirent au programme. Le Mémoire jugé digne de récompense portait la devise :

... si quid novisti rectius istis.
Candidus imperti, si non, his utere mecum.

et l'on apprit que l'auteur en était le savant mathématicien Paul Ruffini.

Un sixième Mémoire, parvenu trop tard pour pouvoir être admis au concours, était dû à Joseph Cassella ; il fut, cependant, présenté à la Société par Joseph Chiminello, dans la séance du 3 décembre 1803. On le trouvera publié au Tome XI des *Memorie* de ladite Société pour 1804 (p. 203-240). L'auteur y expose la solution de la question suivant deux méthodes différentes, fondées sur le même principe et très ingénieuses.

II. *Bibliographie des écrits de* GIORDANO RICCATI :

Saggio sopra le leggi del contrappunto (in-8°, Giulio Trento, éd.; Castelfranco, 1762).

Préface à l'œuvre : *Dei principi e dei metodi della Fisica del Conte Jacopo Riccati* (in-4°, Jacopo Giusti, éd.; Lucca, 1762).

Delle Corde, ovvero fibre elastiche (in-4°, Stamperia di S. Tommaso d'Acquino, Bologna, 1767). Ce Volume devait être suivi d'un autre que l'auteur composa, mais ne publia pas.

Del suono falso, dissertazione acustico-matematica (*Prodomo dell' Encicolopedia italiana*, p. 96; 1779).

Vita dell'Architetto Francesco Maria Preti (dans l'*Encicolopedia* au Volume *Architettura;* Stamperia del Seminario in Padova).

Supplemento all'elogio del P.-D. Ramiro Rampinelli, monaco benedettino della compagnia di Monte Uliveto, Celebre professore di matematica nella Università di Pavia. Il avait été inséré dans le *Giornale di Roma* (1759). On le retrouvera dans les *Nuove Memorie par servire alla Storia letteraria*, t. III, p. 181 (in-8°, Silvestro Marsili, éd.; Venise, 1760).

Informazioni intorno all'opera (*Elementa Geometricæ infinitesimorum Auctore D. Hieronymo Saladini, etc., libri tres;* Bononiae, 1760). On le retrouve dans les *Nuove Memorie per servire alla Storia letteraria*, t. V, p. 273 (in-8°, Giorgio Fossati, éd.; Venise, 1760).

Préface à l'Ouvrage : *Elementi di Architettura* de M. F.-M.

Preti (Giov. Gatti, éd.; Venise, 1780). Ces éléments sont presque tous de M. Giordano Riccati.

Lettere due del conte Giordano Riccati all'ornatissimo padre Don Francesco Maria Franceschinis Barnabita. On les retrouvera aux dernières pages de la *Dissertazione* de ce père Franceschinis qui a pour titre : *Della tensione delle funi* (Bassano, 1784).

Delle vibrazioni del tamburo. Dissertazione fisico-matematica. Inséré à la page 419 du Tome I des *Saggi scientifici e letterari dell'Accademia di Padova* pour 1786.

Riflessioni sopra la vera origine della forza centrifuga (*Raccolta d'opuscoli* publiée par Giuseppe Rocchi, in-12; Lucca, 1763).

Préface à l'Ouvrage : *Saggio intorno al sistema dell'Universo* de M. le comte Jacopo Riccati. Premier Volume des *Œuvres* de J. Riccati (in-4°; Lucca, 1762).

Annotations au *Schediasma XXIII Vera et germanæ virium elasticarum leges ex phænomenis demonstratæ* (dans le vol. III des *Œuvres* de J. Riccati).

Annotations au *Schediasma XXIV* sur la *Proporzione fra le affezioni sensibili, e la forza degli oblietti esterni, da cui vengono prodotte* (dans le vol. III, p. 283, des *Œuvres* de M. J. Riccati).

Annotation au *Schediasma LXXXVI* à défense du corollaire II de la proposition XXXVI, Livre II des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle du Chevalier J. Newton* (dans le vol. III, p. 425, des *Œuvres* de M. J. Riccati).

Préface aux discours de sujet philosophique (dans le vol. IV des *Œuvres* de M. J. Riccati).

Réflexions sur la *Schediana XXXVI* (dans le vol. III des *Œuvres* de M. J. Riccati).

Résumé de l'essai sur les lois du contre-point (dans le vol. III, n° XIII, art. III, p. 19, de *Minerva;* in-12; Venise, 1763).

Résumé de 13 discours de sujet philosophique (même revue).

Résumé de 39 *Schedianismi* mathématiques (même revue).

Les références suivantes sont dans les différents Volumes de la *Raccolta Calogeriana* (Venise, 1768) :

Annotations aux *Lettere del Sig. Conte Jacopo Riccati al Marchese Poleni sopra l'opera de Castelli, etc.,* du même M. Poleni (p. 167 du vol. XVI).

Solution de la difficulté proposée par M. *P. D. Girolamo Sala-*

dini à une proposition de l'œuvre *Sulle corde, ovvero fibre elastiche* (nº 3 de cette bibliographie; p. 287 du vol. XIX).

Explication d'une expérience de M. Giordano Riccati (dans le vol. XXI).

Della maniera di costruire un portico, etc. (dans le vol. XXIII).

Delle figure piane isoperimetriche contenenti la stessa superficie (dans le vol. XXIII).

Osservazioni sulla necessità di leggi dinamiche (dans le vol. XXV).

Che lo studio delle matematiche non favorisce la miscredenza (dans le vol. XXVIII).

Lettre sur l'opinion de la force vive (dans le vol. XXX).

Del centro di percossa (dans le vol. XXXI).

Notizie su Monsignor Agostino Steffani, Vescovo di Spigra e Vicario apostolico de gli Stati dell'Elettor Palatino, etc. (dans le vol. XXXIII).

Lettre à M. Robert Zuccareda sur les règles les plus intéressantes de l'Architecture (dans le vol. I d'un recueil d'Opuscules édité par Domenico Marzi et Cº; Florence, 1771).

Les références suivantes sont insérées dans le *Giornale dei Letterati d'Italia,* publié à Modena :

Lettera al sig. Arciprete Giambattista Nicolai, professore d'Analisi nell'Università di Padova... sulla formula colla quale Newton determina la velocità di propagazione del suono nell'aria (p. 320 du vol. XII).

Lettera I al sig. Conte Girolamo Fenarolli in cui s'indoga l'artifizio di cui si serve la natura per far si, che incitata una corda al suono, s'adatti in brevissimo tempo ad una curva bilanciata ed isocrona (dans le vol. XIII, p. 62).

Lettera II (au même)... *sull'equazione generalissima delle curve bilanciate, etc.* (dans le vol. XIV, p. 269).

Della figura e dello fiancamento degli archi. Dissertazione fisico-matematica (dans le vol. XX, p. 149).

Esame del sistema musico di M. Rameau (dans le vol. XXI).

Esame del sistema musico del sig. Giuseppe Tartini (dans le vol. XXII, p. 169).

Estratto degli Elementi d'Architettura del sig. Francesco Maria Preti (dans le vol. XXII).

Riflessioni sopra il libro primo della Scienza teorica della moderna musica del P. Francescantonio Valotti M. C., etc. (dans le vol. XXIII).

Della risoluzione Cardanica dell'equazione di 3° grado (dans le vol. XXIV, p. 170).

Della maniera di costruire le cupole (dans le vol. XL).

Risposta alle Riflessioni analitiche del sig. Abbate Gioacchido Pessuti... sopra una lettera scrittagli dal sig. Abbate Conte Vincenzo Riccati (dans un recueil de brochures imprimé à Venise, 1776, vol. XV, n° VI, p. 144).

Lettre à M. l'abbé Pellizari sur les logarithmes des nombres négatifs (même recueil, vol. XVI).

Deux *Lettres à M. le comte Fenaroli sur l'état des cordes* (même recueil, vol. XVIII, n° VIII, p. 236).

Del moto di discesa e di ascendimento dei corpi solidi immersi nei mezzi fluidi (dans le vol. IV d'un recueil *Ferrarese;* Venise, 1780, imprimerie Coleti).

Dei due generi di resistenze che nascono dalla inerzia della materia e ritardano il moto dei corpi solidi dentro dei mezzi fluidi (même recueil, vol. V).

Del movimento d'un corpo discendente lungo un lato retto d'un triangolo materiale, etc. (même recueil, vol. IX, X, XII et XVI).

Delle vibrazioni sonore dei cilindri. Memoire della Società di Matematica e Fisica delle Scienze (Società italiana delle Scienze) (vol. I, p. 444; Verona).

Della figura del gorgo che la natura forma in un vaso cilindrico ripieno di acqua, etc. (même recueil, vol. III, p. 238, Verona, 1788).

Problema : Determinare il massimo allungamento, che il peso d'un pendolo produce nella corda a cui è attaccato (même recueil, vol. III, p. 81, Verona, 1788).

Delle forza viva di alcuni corpi che rotolano in un piano, etc. (même recueil, vol. III, p. 96).

Teorema : Il nulla immaginario non si dive confondere col nulla reale (même recueil, vol. III, p. 116).

Della costruzione e quadratura di alcune volte e lunule (même recueil, vol. V, p. 48).

Lettre à M. Giuseppe Conturelli sopra alle riflessioni nella

verità di alcuni paradosti analitici creduti comunemente paralogismi (dans le *Giornale di Modena*, vol. XXVIII, p. 256).

Del centro di oscillazone. Dissertazione I (même recueil, vol. XXXIII, p. 140).

Idem. Dissertazione II (même recueil, vol. XXXIV).

Deux Lettres *Al Dotissimo padre don Giovenale Sacchi, professore di eloquenza nell'Imperial Collegio di Milano sopra i duetti dell'Handel e del Bonocini* (même recueil, vol. XXXVI).

Aggiunta alla Dissertazione della figura e dello sfiancamento degli archi (même recueil, vol XL, p. 167).

Lettere I e II intorno al risorgimento della musica al padre Giovenale Sacchi (même recueil, vol. XLI).

Plusieurs autres écrits inédits sont nommés par M. le Père Federici, Dominicain, dans son *Commentario sulla vita e gli Studi del Co. Giordano Riccati, nob. Trivigiano* (Venise, 1790, imprimerie Coletti).

Il existe, en outre, dans la Bibliothèque de Modena, 105 Lettres du Co. Giordano Riccati à M. l'abbé Joseph Contarelli sur des sujets de mathématique de la plus haute importance.

C. Alasia (Tempio, Sardaigne).

2886. (**1905**, 50) (E.-N. Barisien). — Si M coïncide avec l'un des sommets, l'aire du triangle A'B'C' est nulle, et elle change de signe quand M franchit ce sommet. Si M_0 est tel que CM_0 soit parallèle à AB, l'aire correspondante de A'B'C' est infinie, et il y a changement de signe quand M franchit ce point M_0. Donc il n'y a ni maximum, ni minimum. *Milèse.*

2887. (**1905**, 50) (*Crut*). — Si, dans le quadrilatère ABCD, les côtés AB, CD se coupent en E, et AD, BC en F, et si l'on suppose que B et D se rapprochent indéfiniment de C, à la limite AC + BD tend vers AC, et EF tend vers o. Donc la propriété, qui « paraissait manifeste », est inexacte. *Milèse.*

Autre réponse de M. Lemaire.

2893. (**1905**, 52) (*Matito*). — *Écrits récents sur l'aviation. — Voir :*

O. Lilienthal, *Der Vogelfug als Grundlage der Fliegekunst* (Berlin, Gärtner, Schönebergerstrasse, 26; 1889).

CHANUTE, *Progress in flying machines* (New-York, Forney, 39, Cortlandt st.; 1894).

Ces deux Ouvrages sont intéressants en ce sens qu'il reflètent l'état d'esprit de ces deux aviateurs pratiquants (avant leurs essais). On voit qu'avant d'essayer ils avaient énormément étudié et expérimenté. Le second prend beaucoup de détails à l'historique de Tissandier.

MOUILLARD, *L'empire de l'air* (chez Masson, 1881). Quantité énorme d'observations sur les oiseaux auquel M. Marey, dans le *Vol des oiseaux* (Masson, 1889), se reporte souvent. M. Marey est le premier savant « officiel » qui ait osé protéger les aviateurs de son autorité.

GOUPIL (*Bulletin technologique des Arts et Métiers*, sept. 1904). Troisième édition de l'Ouvrage théorique, le meilleur qui ait paru jusqu'à présent.

Le colonel RENARD a publié quantité de choses malheureusement éparses dans la *Revue de l'Aéronautique*, dans l'*Aérophile* et dans les *Comptes rendus*.

CHANUTE, *Glidings experiments* (*Cassier's Magazine*, juin 1901). C'est le récit des expériences de Chanute en 1896.

WRIGHT (*Journal of the Western Society of Engineers*, déc. 1901 et août 1903). C'est le récit des expériences avec l'appareil sans moteur. Il n'a rien publié depuis.

Capitaine FERBER, *Les progrès de l'aviation par le vol plané, de* 1891 *à* 1903 (Berger-Levrault) (1). C'est l'historique de ce qui s'est passé depuis qu'on fait expérimenter. La suite paraîtra cette année.

SOREAU (*Mémoires et compte rendu des Ingénieurs civils*, oct. 1902). Très important au point de vue de l'écoulement des fluides le long des surfaces.

La *Revue de l'Aéronautique*, l'*Aéronaute*, l'*Aérophile*.

Prof. BRYAN, *Stability of aerial gliders*. C'est une étude mathématique de la stabilité longitudinale des planeurs. Excellente méthode.

FERBER.

---

(1) 44 figures dans le texte et 55 pages; 1904. L'auteur y rend compte des essais les plus récents d'appareils d'aviation et, en particulier, de ses expériences personnelles. Les nombreuses gravures rendent très claire l'intelligence du texte. E. M.

AVIS.

ASSOCIATION INTERNATIONALE DES ACADÉMIES.

Préparation d'une édition complète des Œuvres de Leibniz.

La Commission chargée par les Académies des Sciences et des Sciences morales et politiques de l'Institut de France de collaborer à la préparation de l'édition inter-académique des Œuvres de Leibniz prie Messieurs les directeurs de Bibliothèques et Messieurs les propriétaires de collections privées de France, Angleterre, Amérique, Pays-Bas, Suisse, Italie, Russie, qui posséderaient des manuscrits de Leibniz ou d'écrits de Leibniz de vouloir bien les lui indiquer.

Adresse : *Comité Leibniz, Institut de France, Paris.*

QUESTIONS.

2906. **[I17b]** Je désirerais une démonstration simple et directe soit du théorème suivant, soit de son premier corollaire :

Théorème. — *Tout nombre entier* $8m+4$ $(m=4, 6$ ou $\geqq 8)$ *est somme de quatre carrés impairs supérieurs à l'unité.*

Corollaire I. — *Tout nombre entier (sauf* 1, 2, 3, 5 *et* 7*) est somme de* 4 *triangulaires non nuls.*

Corollaire II. — *Tout nombre entier* N *est somme de* n *triangulaires non nuls si* $N + 4 - n$ *est différent de* 1, 2, 3, 5 *ou* 7.

[*Voir* ma réponse à **2688** (**1905**, 134).]

P.-F. Teilhet.

2940. [I13f] Soient

$$x = \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad f(x) = X_1 = \cos(2n+1)\alpha$$

et considérons l'équation

$$(1) \qquad 2f(X_m) - 2 = Y_m^2.$$

1° Cette équation a une infinité de solutions entières;

2° Les valeurs entières de x sont les mêmes pour toutes les équations (1), quels que soient n et m;

3° L'expression $\dfrac{f(X_m)-1}{x-1}$ est un carré pour toute valeur de x;

4° Si x_s est une valeur de x qui vérifie l'équation (1) et si A est le plus petit nombre entier tel que $x^2 - Ay^2 = 1$ admette x_s comme solution, l'équation $t^2 - Au^2 = -1$ a des solutions entières;

5° Inversement, si $t^2 - Au^2 = -1$ a des solutions entières, et si les valeurs de x qui vérifient $x^2 - Ay^2 = 1$ sont 1, $x_1, \ldots, x_n$, les nombres $x_1, x_3, \ldots, x_{2k+1}$ vérifient l'équation (1);

6° Il en résulte que les valeurs de x, qui vérifient l'équation (1), peuvent être groupées de façon que les termes de chaque groupe forment des séries récurrentes telles que

$$\alpha_1 = x_1, \qquad \alpha_2 = 4x_1^2 - 3x_1, \qquad \ldots,$$
$$\alpha_r = 2h\alpha_{r-1} - \alpha_{r-2}, \qquad \ldots \qquad (h = 2x_1^2 - 1).$$

Je possède une démonstration reposant sur les propriétés

de l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$; je désirerais qu'un correspondant m'en fît connaître une qui résultât de l'étude directe des équations (1).

Exemples de ces équations :

$$8x^3 - 6x - 2 = y_1^2,$$
$$32x^5 - 40x^3 + 10x - 2 = y_2^2.$$

G. Ricalde (Mérida, Yucatan).

2941. [L¹10] Si l'on élimine φ entre les équations

$$x = a \cos^4 \varphi, \qquad y = b \sin^4 \varphi,$$

on a l'équation d'une parabole

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1.$$

Je désirerais connaître l'interprétation géométrique de l'angle φ.

Même question au sujet des coordonnées

$$x = a \cos^2 \varphi, \qquad y = b \sin^4 \varphi,$$

qui représentent une parabole

$$(x - a)^2 = \frac{a^2 y}{b}.$$

E.-N. Barisien.

2942. [V8] Dans le texte de la question **2047** (**1901**, 60) on trouve ce passage :

« ... Cette question me paraît avoir quelque analogie avec le fameux problème de la citerne dont se sont occupés les géomètres du xviiie siècle.... »

Quel est le problème auquel il est fait allusion ici?

Fitz-Patrick.

2943. [V9] Je retrouve une Note d'après laquelle M. Ritter, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, aurait

publié un Mémoire, ou des Mémoires, sur Viète et ses travaux.

Où serait-il possible de se procurer ce travail?

FITZ-PATRICK.

2944. **[V9]** M. A. Labosne a fait paraître, en 1872, si je ne me trompe, un *Journal des Sciences mathématiques*.

Ce journal paraît-il toujours? Nom de l'éditeur. Où serait-il possible de se procurer les numéros parus?

FITZ-PATRICK.

2945. **[V9]** Je serais reconnaissant au correspondant qui pourrait m'indiquer où et chez qui a été édité un travail de M. Brocard intitulé : *Notes de bibliographie des courbes géométriques*. Je ne le trouve dans aucun catalogue.

FITZ-PATRICK.

2946. **[Bd]** Connaît-on le théorème suivant :

S'il existe entre les éléments horizontaux ou verticaux a_{ik} d'un déterminant du sixième ordre des relations bilinéaires de la forme

$$a_{i1}a_{i4}+a_{i2}a_{i5}+a_{i3}a_{i6}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, 6),$$

les mineurs adjoints α_{ik} sont liés par des relations analogues de la forme

$$\alpha_{i1}\alpha_{i4}+\alpha_{i2}\alpha_{i5}+\alpha_{i3}\alpha_{i6}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, 6).$$

E. JAHNKE.

2947. **[R1]** Je désire avoir une bibliographie, aussi complète que possible, des travaux relatifs aux *courbes de poursuite*. T. HAYASHI (Tokyo).

2948. **[V8 et 9]** Je désirerais savoir où il est possible d'avoir des renseignements sur la vie de Monge, aussi bien sur ses actes politiques que sur ses travaux scientifiques.

A. GRÉVY.

RÉPONSES.

729. (**1896**, 30; **1905**, 99) (L. Raffy). — *Groupes de points sur une courbe algébrique.* — La propriété dont il s'agit est établie au moyen de la théorie des intégrales abéliennes, par Ed. Weyr (*Inaugural-Dissertation,* Göttingue, 1876; *Wiener Berichte,* t. LXIX, 1874, p. 399). *Voir* également : E. Picard, *Traité d'Analyse,* t. II, p. 429.

Elle est prise comme définition du genre p, par Weierstrass (*Werke,* t. IV, p. 69). Elle a été établie géométriquement par M. Bertini [*voir* la *Geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* (*Annali di Matematica,* 2e série, t. XXII, p. 1)] et par M. Segre [voir *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (*Annali di Matematica,* 2e série, t. XXII, p. 41)].

L. Berzolari (Pavie).

741. (**1896**, 33; **1905**, 99) (J. Duran-Loriga). — *Détermination d'une fonction entière de degré $m-1$.* — Ce problème, comme l'observe l'auteur de la question, dépend de la résolution d'un système de m équations linéaires; mais, si l'on suppose qu'aux valeurs données de la variable x correspondent des valeurs données de la fonction seulement, la formule de Lagrange détermine explicitement cette fonction et ce qu'il s'agirait d'obtenir, c'est un résultat plus ou moins analogue pour le cas général.

Bien que n'étant point en mesure d'indiquer ce résultat, je remarquerai du moins que le nombre d'équations linéaires à résoudre peut être réduit à celui des valeurs, soit de la dérivée, soit de la fonction, qui sont données d'avance, en choisissant toujours le plus petit de ces deux nombres.

Soient, en effet, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les valeurs de x qui font prendre à $f(x)$ les valeurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$; soient de même $b_1, b_2, \ldots, b_{m-n}$,

les valeurs de x qui font prendre à $f'(x)$ les valeurs $B_1, B_2, \ldots, B_{m-n}$: je poserai d'abord

$$\mu(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$
$$\nu(x) = (x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_{m-n});$$

puis

$$f(x) = g(x) + h(x)\,\mu(x),$$

en désignant par $g(x)$ un polynome entier de degré $n-1$ en x et par $h(x)$ un autre polynome de degré $m-n-1$, tous deux demeurant à déterminer. Or, pour ce qui concerne $g(x)$, il est clair qu'il prend pour $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$, les mêmes valeurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que $f(x)$ et il ne s'agit que d'une application de la formule de Lagrange; au contraire, en ce qui concerne $h(x)$, on obtient après différentiation et en supposant $x = b_1, b_2, \ldots, b_{m-n}$, un système de $m-n$ équations contenant linéairement les coefficients de $h(x)$,

$$B_j = g'(b_j) + \mu(b_j)\,h'(b_j) + \mu'(b_j)\,h(b_j),$$

sans aucune simplification apparente.

Cela suppose $m-n < n$: si le contraire arrive on posera

$$f'(x) = p(x)\,\nu(x) + q(x),$$

$p(x)$ et $q(x)$ étant de nouveaux polynomes en x de degré $n-2$ et $m-n-1$. Cette fois c'est $q(x)$ qui se trouve déterminé par la formule de Lagrange et c'est le polynome $p(x)$ dont les coefficients ainsi que la constante d'intégration doivent être calculés au moyen d'un système de n équations linéaires dont le type est

$$A_i = \left(\int_0^x p(x)\,\nu(x)\,dx\right)_{x=a_i} + \left(\int_0^x q(x)\,dx\right)_{x=a_i} + C.$$

E.-A. Majol.

767. (**1896**, 54; **1905**, 101) (E. Barbette). — *Carrés magiques.* — J'ai appelé *carrés magiques eulériens* ceux qui, écrits dans le système de numération de la base n du carré, présentent dans toutes les lignes horizontales et verticales et les deux diagonales les n premiers nombres, de 0 à $n-1$, pour les premiers chiffres et pour les seconds chiffres.

Il est clair qu'en remplaçant les n premiers chiffres et les n seconds chiffres par n régiments différents et n grades différents, ou bien par

des cartes de n couleurs différentes et de n valeurs différentes, on obtient une solution du problème des n^2 officiers, ou bien un carré magique construit par la méthode de M. Barbette, et réciproquement.

Par conséquent, la question posée revient à celle-ci :

Est-on arrivé à construire tous les carrés magiques eulériens de base quelconque n?

Je m'adonne actuellement à l'étude de ces carrés particuliers, et j'écris chaque année un Mémoire sur ce sujet, qui paraît dans les *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences;* j'ai commencé en 1903 et je poursuis mes recherches. Je résume les résultats déjà obtenus :

1° *n est un nombre impair.* — On peut toujours construire un carré non seulement magique, mais encore panmagique (diabolique), sauf pour $n = 3$, avec cette restriction que, si n est divisible par 3, ma méthode ne peut donner de suites eulériennes dans les diagonales.

De plus, si n n'est pas un nombre premier, la somme des carrés du nombre est la même, au moins dans toutes les lignes horizontales et verticales.

2° *n est impairement pair.* — Le problème paraît impossible, mais l'impossibilité n'a été démontrée que pour $n = 6$.

Je crois devoir ajouter que la démonstration de l'impossibilité du problème des 36 officiers, donnée par M. Petersen dans l'*Annuaire des Mathématiciens,* est incomplète. Dans ce Mémoire, on ne considère qu'un seul des 17 cas qui peuvent se présenter, celui que j'ai désigné sous le n° 7bis. M. Petersen a reconnu lui-même ce défaut d'énumération des cas possibles.

3° *n est pairement pair.* — La construction est toujours possible. Mais il y a beaucoup mieux.

Quand n est divisible par 8, on peut toujours construire un carré cabalistique eulérien, c'est-à-dire un carré panmagique eulérien dans lequel la somme des carrés des nombres est la même dans toutes les lignes horizontales et verticales et les deux diagonales centrales.

Ce résultat est obtenu à l'aide d'un transformateur, formule algébrique d'un carré de base 8, qui permet de transformer

immédiatement un carré de base n en un carré cabalistique de base $8n$.

Je suis même arrivé à construire des carrés trimagiques eulériens, présentant l'égalité aux trois premiers degrés dans toutes les lignes horizontales et verticales et les deux diagonales centrales.

La théorie des transformateurs, qui n'est encore qu'ébauchée, constituera la partie intéressante de mes études au point de vue de la magie supérieure au premier degré. G. TARRY.

1660. (**1899**, 244) (E.-B. ESCOTT). — *Formes quadratiques représentant les nombres m et* m^2-2 (**1905**, 77). — Dans la réponse de M. Werebrusow s'est glissée une erreur, qui entache le résultat (*voir* **1905**, 53).

La relation $\left(\frac{m}{P}\right) = +1$ (dans le sens adopté dans la théorie des nombres), si P n'est pas premier, n'est pas une condition suffisante pour que m soit résidu quadrique de P.

La forme

$$mx^2 + 2nxy + (m^2-2)y^2$$

est une solution de la question. Existe-t-il une solution plus générale? E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

[(Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

2130. (**1901**, 187) (H. BROCARD). — *Canon de perspective* (**1902**, 280). — Les auteurs ont émis des opinions assez différentes dont les principales semblent être citées par J. de la Gournerie dans son *Traité de perspective linéaire* (Paris, 1859, p. 180) et par F. Bossuet dans son *Traité de perspective linéaire* (Paris, J. Baudry, 1870, p. 11 et suiv.).

Ces deux auteurs sont d'accord pour affirmer que la distance principale doit être comprise entre une fois et trois fois la largeur du Tableau, ce qui revient à affirmer que l'angle visuel doit être compris entre 20° et 50° (*voir* J. DE LA GOURNERIE, *loc. cit.*, p. 180, n° 259, et F. BOSSUET, *loc. cit.*, p. 7 et suiv.).

Bossuet était professeur à l'Académie royale des Beaux-Arts; il était d'ailleurs un peintre de talent et je transcris ici le passage important qui, dans l'Avant-Propos de son Ouvrage, s'occupe de la question soulevée par M. Brocard :

« C'est en nous appuyant sur les lois de l'Optique, sur les

tableaux des grands maîtres et sur ce que nous avons observé nous-même pendant nos études, que nous croyons avoir résolu cet important problème. » F. Chomé (Bruxelles).

2182 et **2183**. (**1901**, 249) (S. de la Campa). — *Travaux sur la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers* (**1904**, 97). — La seule méthode pratique pour construire des Tables de nombres premiers semble être celle d'Eratosthène. Pour les détails, *voir* l'Introduction à *Factor Tables for the* 4th, 5th *and* 6th *millions,* par J. Glaisher.

Pour la décomposition en facteurs de nombres simples, la meilleure méthode générale semble être celle d'Euler. *Voir :*

Th. Pepin, S. J., *Sur une Table auxiliaire de Gauss* (*N. L. A.*, t. XLII, 1889, p. 135); *Sur la décomposition des grands nombres en facteurs premiers* (*N. L. A.*, t. XLIII, 1890, p. 163; *N. L. M.*, t. XVII, 1900, p. 321-344); *Extension de la méthode d'Euler pour la décomposition des grands nombres en facteurs premiers* (*N. L. M.*, t. IX, 1re Partie, 1893, p. 47-76).

C.-F. Gauss, *Höhere Arithmetik* (*Disquisitiones arithmeticae*) (articles **323-326**, **329-334**).

P. Seelhoff (*A. J. M.*, t. VII, 1885, p. 264; t. VIII, 1885, p. 26, 39; *Z. S.*, t. XXXI, 1886, p. 116; *A. Gr.*, 2e série, t. II, 1885, p. 329).

P. Tchebichef (*J. M.*, 1re série, t. XVI, 1851, p. 257).

Encyk. der Math. Wiss., t. I, p. 576-578, 1075, Note **623**.

Pour décomposer en facteurs des nombres de forme spéciale tels que $2^n - 1$, *voir :*

E. Lucas, *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* (*A. J. M.*, t. I, 1878, p. 184-289).

E.-B. Escott (Ann Arbor).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

2248. (**1901**, 310) (E. Maillet). — *Additions à l'Encyklopädie der math. Wiss.*, Bd. I (**1905**, 17). — *Erratum :* à la page 577, Note **59**, l'identité

$$2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)$$

est due à Euler, non à Aurifeuille [*voir* réponse à **2485** (**1903**, p. 245)].

Équation de Pell (ou Fermat). — M.-A. Stern (*Cr.*, t. 2, 1834, p. 331). — G.-W. Tenner, *Einige Bemerkungen über die Gleichung* $ax^2 \pm 1 = y^2$ (Prog., Merseburg, 1841), qui continue la Table de Degen jusqu'à 1020. — G. Lazzeri (*P. M. R.*, t. XIX, 1903, p. 1). — Pistor, *Ueber die Auflösung der unbestimmten Gleichung 2. Grades in ganzen Zahlen* (Prog., Hamm., 1833). — E. Meissel, *Beitrag zur Pell'schen Gleichung höherer Grade* (Prog., Kiel, 1891). — K.-E. Hoffmann (*A. Gr.*, t. LXIV, 1879, p. 1-8). — W. Berkhan, *Lehrbuch der unbestimmten Analytik*, Bd. II (Halle, 1855). — J.-L. Lagrange (*Œuvres*, t. I, p. 669, 722; t. III, p. 377, 655; t. VII, p. 3; t. VIII, p. 73).

Décomposition de grands nombres en facteurs (*Encyklopädie der math. Wiss.*, Bd. I, p. 576, et p. 1075, Note 623). — Th. Pepin (*N. L. A.*, t. XLII, 1889, p. 135; t. XLIII, 1890, p. 163; *N. L. M.*, t. IX, 1893, Ire Partie, p. 47; t. XVII, 1900, p. 321). — P. Tchebicheff (*J. M.*, 1re série, t. XVI, 1851, p. 257). — F. Landry, *Aux mathématiciens de toutes les parties du monde : Communication sur la décomposition des nombres en leurs facteurs simples* (Paris, 1867) (*A. F.*, 1880, p. 165.) — V. Bouniakowsky (*A. P. M.*, 6e série, t. II, 1841, p. 447-469). — E. Lucas (*N. A.*, 2e série, t. XIV, 1875, p. 523-526; *A. J. M.*, t. I, 1878, p. 184, 289). — Fr.-J. Studnička (*Casopis*, t. XIV, 1885, p. 120, en langue bohémienne). — A. Cunningham (*M. M.*, 2e série, t. XX, 1890, p. 37-45). — D. Seliwanow (*Mosk. Math. Samml.*, t. XVI, 1892, p. 469-482, en russe; *St. Petersb. Math. Ges.*, t. XII, 1899). — J.-G. Birch (*M. M.*, 2e série, t. XXII, 1892, p. 52-55). — F.-W. Lawrence (*M. M.*, 2e série, t. XXIV, 1894, p. 100; *Q. J.*, t. XXVIII, 1896, p. 285-311). — W.-P. Workmann (*M. M.*, 2e série, t. XXIV, 1894, p. 67). — G. Speckmann (*A. Gr.*, 2e série, t. XII, 1894, p. 435; 2e série, t. XIV, 1896, p. 441). — M. Neumann (*Z. H.*, t. XXVII, 1896, p. 493; t. XXVIII, 1897, p. 248). — G. Wertheim (*Z. H.*, t. XXVII, 1896, p. 256). — D. Biddle (*M. M.*, 2e série, t. XXVIII, 1898, p. 116-149; *M. M.*, 2e série, t. XXX, 1901, p. 190; *E. T. R.*, t. LXXIV, 1901, p. 147). — J. Tennant (*Q. J.*, t. XXXII, 1901, p. 322-342). — L. Euler (*A. P. N. A.*, t. XII, 1794, p. 22; *Comm. Arith.*, t. II, p. 249). D'autres Mémoires d'Euler se rapportent au même sujet (voir *Index* analytique aux *Commentationes Arithmeticæ Collectæ*. — F.-J. Vaes, *Ontbinding in factoren* (Amsterdam, 1904) (*Aka-*

demie van Wetenschappen te Amsterdam, t. X, 1904, p. 374, 474, 623).

Facteurs de nombres de formes particulières $2^n \pm 1$. — Père Mersenne, *Cogitata physico-mathematica* (*Praefatio generalis*, 1644, p. 11. — C.-N. de Winsheim (*Novi Comm. Acad. Petrop.*, t. II, 1751, p. 78). — G. Plana, *Mémoire sur la théorie des nombres* (*M. A. T.*, 2ᵉ série, t. XX, 1859, p. 87, 109, 113, 130; 2ᵉ série, t. XXII, 1863, p. 139). — F. Landry, *Décomposition des nombres $2^n \pm 1$ en leurs facteurs premiers de $n = 1$ à $n = 64$ moins quatre* (Paris, 1869). — F. Landry (*C. R.*, t. XCI, 1880, p. 138; *N. C.*, t. VI, 1880, p. 417. — A. Genocchi (*A. A. T.*, t. XI, 1875-1876, p. 811-829). — E. Lucas (*N. A.*, 2ᵉ série, t. XIV, 1875, p. 523; 2ᵉ série, t. XV, 1875, p. 525; *C. R.*, t. LXXXII, 1876, p. 167; *B. Bon.*, t. X, 1877, p. 129, 239; *A. J. M.*, t. I, 1878, p. 184, 289; *M.*, t. VII, 1887, p. 45-46; *Théorie des nombres*, p. 375). — G. de Longchamps (*C. R.*, t. LXXXV, 1877, p. 950). — V. Bouniakowsky (*A. P. B.*, t. XXIV, 1878; t. XXV, 1878). — Pervouchine (*A. P. M.*, 1883). — P. Seelhoff (*Z. S.*, t. XXXI, 1886, p. 166, 174, 306, 320; *A. Gr.*, 2ᵉ série, t. V, 1887, p. 221-223; 2ᵉ série, t. III, 1886, p. 325-329). — W. Omschenétzky et V. Bouniakowsky (*A. P. B.*, 1887). — W.-W.-R. Ball (*M. M.*, 2ᵉ série, t. XXI, 1891, p. 34, 120). — A. Cunningham (*N.*, t. LI, 1895, p. 533; *R. B. A.*, 1895, p. 614; 1899, p. 653; *P. L. M. S.*, 1903; *M. M.*, t. XXXV, 1905, p. 34). — C.-E. Bickmore (*M. M.*, 2ᵉ série, t. XXV, 1895, p. 1-44; 2ᵉ série, t. XXVI, 1896, p. 1-38). — F.-N. Cole (*S. M. Am.*, t. X, 1903, p. 134). — *Voir* aussi *Bibliographie des nombres parfaits* (**1905**, 19).

Nombres de la forme $10^n - 1$ [voir *Tables des nombres dont 10 est racine primitive* (**1905**, 18)]. — W. Looff (*N. A.*, t. XIV, 1855, p. 115; *A. Gr.*, 1851, p. 54). — E. Lucas (*J. E.*, 1886, p. 160). — Lelasseur (*M.*, t. IV, 1884, p. 38; t. VI, 1886, p. 153; t. VII, 1887, p. 73). — Brocard (*P. M. S.*, 1892, p. 25, 89, 114). — A. Rieke, *Versuch über die periodischen Brüche* (Prog., Riga, 1887). — J. Mayer, *Ueber die Grösse der Periode eines unendlichen Dezimalbruches oder die Congruenz* $10^x \equiv 1 \pmod{P}$ (Prog., Burghausen, 1888). — C.-E. Bickmore, *On the numerical factors of $a^n - 1$* (*M. M.*, 2ᵉ série, t. XXV, 1895, p. 1-44; 2ᵉ série, t. XXVI, 1896, p. 1-38). — D. Biddle (*M. M.*, 2ᵉ série, t. XXXI, 1901, p. 34).

Preuve inexacte du fait que $\frac{1}{9}(10^{17}-1)$ est premier. Lelasseur trouve que ce nombre est le produit de deux facteurs premiers (*J. E.*, 1886, p. 160).

FACTEURS DE NOMBRES AYANT D'AUTRES FORMES. — P. SEELHOFF (*Z. S.*, t. XXXI, 1886, p. 380). — A. CUNNINGHAM (*P. L. M. S.*, t. XXIX, 1898, p. 381). — TH. PEPIN (*N. L. A.*, t. LIV, 1901, p. 89). — D. BIDDLE (*M. M.*, 2e série, t. XXXI, 1901, p. 116). — De nombreux problèmes ont été publiés dans *E. T. R.* sur ce sujet. — LELASSEUR (*N. C.*, t. VI, 1880, p. 147).

DÉTERMINATION DE GRANDS NOMBRES PREMIERS. — A. CUNNINGHAM (*P. L. M. S.*, t. XXVIII, 1897, p. 377). — F.-W. LAWRENCE (*P. L. M. S.*, t. XXVIII, 1897, p. 465). — A. CUNNINGHAM et H.-J. WOODALL (*R. B. A.*, 1903, p. 561; *M. M.*, 2e série, t. XXXI, 1901, p. 165; *R. B. A.*, 1901, p. 553).

SÉRIES RÉCURRENTES (voir *Encyk. der math. Wiss.*, Bd. I, p. 576, Note 57). — H. SIEBECK (*Cr.*, t. 33, 1846, p. 71). — E. LUCAS (*A. J. M.*, t. I, 1878, p. 184, 289; *C. R.*, t. LXXXII, 1876, p. 165, 1303; t. LXXXIII, 1876, p. 1287; *B. Bon.*, t. X, 1877, p. 129, 239; *N. C.*, t. III, 1878, p. 369, 401; t. IV, 1878, p. 1, 33, 65, 97, 129, 225; *A. A. T.*, t. XI, 1876, p. 928; *N. C.*, t. II, 1876, p. 201, 214; *Théorie des nombres*, p. 299). — G. DE LONGCHAMPS (*N. C.*, t. IV, 1878, p. 83). — D. ANDRÉ (*A. E. N.*, 2e série, t. VII, 1878, p. 375; *B. D.*, t. XII, 1877, p. 350; *A. E. N.*, 2e série, t. IX, 1880, p. 209; *C. R.*, t. LXXXVII, 1878, p. 973; t. LXXXVII, 1878, p. 1017; *S. M.*, t. VI, 1878, p. 166). — M. D'OCAGNE (*N. A.*, 3e série, t. III, 1884, p. 65; *S. M.*, t. XIV, 1886, p. 20; *C. R.*, t. CIV, 1887, p. 419; *N. A.*, 3e série, t. IX, 1890, p. 93; 3e série, t. XI, 1892, p. 526; *S. M.*, t. XX, 1892, p. 121; *J. E. P.*, Cahier LXIV, 1894, p. 151). — W. SCHEIBNER (*B. G. L.*, t. XVI, 1864, p. 44). — A. GENOCCHI (*A. A. T.*, t. XI, 1876, p. 924; *C. R.*, t. XCVIII, 1884, p. 411). — J. NEUBERG (*M.*, 2e série, t. VI, 1896, p. 88; *Archivo de Mat.*, t. I, 1896, p. 230). — A. TAGIURI (*P. M. R.*, 2e série, t. III, 1900, p. 1, 97). — C.-A. LAISANT (*S. M.*, t. XXIX, 1901, p. 145, 278). — J. WASTEELS (*M.*, 3e série, 1902, p. 60). — M. CIPOLLA (*A. A. N.*, 1904).

TABLES DE FACTEURS (*Encyk. der math. Wiss.*, Bd. I, p. 578, 951). — *Voir* réponses à 191, 1208, 2182, 2183, 2667, 2847. — *Voir* aussi :

Report on mathematical Tables (*R. B. A.*, art. 8, 1873, p. 34); article *Tables* dans l'*Encyclopedia britannica.*

TABLES DE MULTIPLICATION [*Encyk. der math. Wiss.*, Bd. I, p. 945 (Note 27), p. 956 (Notes 93 et 96)]. — HENRY KNIGHT, *Multiplication tablets derived from a theorem of S. Slonimsky* (Birmingham, 1847). — CH.-Z. SLONIMSKY, *Allgemeine Bemerkungen über Rechenmaschinen, und Prospectus eines neu erfundenen Rechen-Instruments* (*Cr.*, t. 28, 1844, p. 184-190).

Dans le Livre publié en 1847, Henry Knight mentionne que les instruments relatifs à l'addition de M. Slonimsky ont été brevetés en Angleterre au nom de D. Barnett, de Birmingham.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

2667. (**1903**, 257) (V. AUBRY). — *Tables des facteurs de nombres* (**1903**, 328; **1904**, 103). — Référence :

V.-A. LEBESGUE, *Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers* (Paris, Gauthier-Villars, 1864).

Cette Table donne les facteurs de nombres jusqu'à 115499, mais on peut condenser cette Table en vingt pages (*voir* questions **1208**, **2847**).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

2837. (**1904**, 259) (H. BROCARD). — *Suite arithmétique.* — Un nombre quelconque N_{p-1} de la suite sera compris entre deux carrés consécutifs A^2 et $(A+1)^2$. Si le nombre suivant N_p était un carré, on aurait les deux égalités suivantes :

$$A^2 + x = N_{p-1}, \qquad N_{p-1} + x = (A+1)^2,$$

d'où l'on tire

$$2x = 2A + 1,$$

ce qui est absurde.

Si l'on forme une première suite en prenant pour base le nombre 2, puis une deuxième en prenant pour base 7, qui est le plus petit nombre non carré non contenu dans la première suite, puis une troisième, une quatrième, etc., en prenant chaque fois comme base le plus petit nombre non compris dans les suites précédentes, on démontre facilement :

1° Que toutes ces suites sont distinctes;

2° Que les nombres qui leur servent de base sont donnés par la formule $B = n^2 - 2$;

3° Que, dans chaque suite, le nombre dont la valeur est immédiatement supérieure à un carré donné A^2 est de parité contraire à A, les nombres suivants, plus petits que $(A+1)^2$, étant de même parité que A. MATHIEU (Saïgon).

Autre réponse de M. E.-B. ESCOTT.

2846. (**1904**, 262) (*Rudis*). — *Nombres qui sont la somme de deux carrés.* — I. L'identité

$$(s^2+t^2)(u^2+v^2) = (su \mp tv)^2 + (sv \pm tu)^2$$

était probablement connue de Fermat et peut-être avant lui. Euler l'a généralisée pour les sommes de quatre carrés et Cayley pour 2^n carrés.

II. La démonstration de ce théorème est, je crois, due à Euler (*voir* ses *Opusc. analyt.*, t. I, p. 64; *Comm. Arith. Coll.*, t. I, p. 477).

III. Une preuve est contenue implicitement dans LEJEUNE-DIRICHLET, *Zahlentheorie* (4e édit., p. 164, § 68).

H.-J.-S. SMITH, *De compositione numerorum primorum formæ* $4\lambda+1$ *ex duobus quadratis* (*Cr.*, t. 50, 1855, p. 91; *Coll. Math. Papers,* Vol. I, p. 33; une traduction en anglais se trouve dans *G. Chrystal's Algebra*, Part II, p. 471) et contient une démonstration simple.

J.-A. SERRET, *Algèbre supérieure* (5e édit., 1885, t. I, p. 31, et *J. M.,* 1re série, t. XIII, 1848, p. 12) contient une démonstration très simple, ne faisant pas appel à la Théorie des nombres.

A.-M. LEGENDRE, *Théorie des nombres*, t. I, p. 203.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).
[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

2847. (**1904**, 262) (*Rudis*). — *Tables des facteurs des nombres.* — Cette question est analogue aux questions 191 et 2667. *Voir* aussi 1208. E.-B. ESCOTT (Ann Arbor).

2856. (**1905**, 5) (MANNHEIM). — *Définition du conoïde de Plücker comme lieu de points.* — Je considère une surface S et un point O

de cette surface; j'imagine un plan P passant en O; soit C le centre de courbure de la section déterminée sur la surface S par le plan P; je joins OC et sur cette droite je détermine un point M par la condition

$$OC \times OM = K^2,$$

K étant une constante.

Le lieu du point M ainsi défini, lorsque le plan P se déplace en passant toujours par le point O, est un conoïde de Plücker; ce lieu est, en effet, la transformée par inversion (O étant le pôle) de la surface Σ lieu du point C; or la surface Σ est une surface du quatrième ordre dont j'ai exposé quelques propriétés (*A. F.*, Congrès de Besançon, 1893) et dont la transformée par inversion est un conoïde de Plücker. F. Michel.

2859. (**1905**, 5) (Nazarevsky). — *Sur une congruence* (**1905**, 91). — Dans sa réponse (**1905**, 93) M. Sadier dit :

« $N = a + b\sqrt{c}$ vérifie alors $\left[\text{en supposant } \left(\frac{c}{p}\right) = -1\right]$ la congruence $N^{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. »

Cette assertion est inexacte; par exemple,

$$(1+\sqrt{2})^4 + 1 = 18 + 12\sqrt{2} \not\equiv 0 \pmod{5}.$$

Dans ce cas, nous avons

$$(a + b\sqrt{c})^{p+1} \equiv a^2 - b^2 c \pmod{p},$$

par exemple

$$(1+\sqrt{2})^6 = 99 + 70\sqrt{2} \equiv -1 \pmod{5}.$$

Nazarevsky.

2861. (**1905**, 6) (T. Lemoyne). — *Généralisation du théorème de Brianchon pour les courbes planes.* — Références :

W.-C. Clifford, *Analogues of Pascal's Theorem* (*Q. J.*, Vol. VI, 1864, p. 216), donne le théorème suivant :

Si parmi les mn points communs à deux courbes de degrés m et n, pn sont sur une courbe de degré p, les (m — p) n autres sont sur une courbe de degré m — p ($p < m$ *et* $n > m$).

Si $m = n$, on retrouve le théorème indiqué dans *Higher Plane Curves*, de Salmon (Chap. II, § I, art. **24**).

Le théorème généralisé de Brianchon, déduit dualistiquement du précédent, serait :

Si parmi les mn tangentes communes aux courbes de $m^{ième}$ et $n^{ième}$ classes, pn touchent une courbe de $p^{ième}$ classe, $(m-p)n$ autres toucheront une courbe de $(m-p)^{ième}$ classe ($p < m$ et $n > m$). E.-B. Escott (Ann Arbor).

2874. (**1905**, 26) (L. Dujardin). — *Méthode graphique générale pour la résolution de n équations linéaires.* — Il pourra être utile de consulter : *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. I, p. 1014-1017 (Mehmke, *Numerische Rechnen*).

T. Hayashi (Tokio).

Voir : *Solution graphique de n équations linéaires avec n variables*, par F.-J. Vaes (*N. A.*, 1899, p. 74). N. Plakhowo.

2882. (**1905**, 28) (E.-N. Barisien). — *Lieu de centres d'ellipses.* — Prenant des axes rectangulaires dont l'origine est le milieu de la droite joignant les deux points distants de $2a$, l'équation du lieu est

$$\begin{aligned}4(x^2+y^2-m^2a^2y^2)(1-2m^2y^2)\\ =(n^4-m^4)[a^2-2(x^2+y^2)]^2y^2,\end{aligned}$$

où m^2 et n^2 sont la somme et la différence des inverses des carrés des demi-axes de l'ellipse. T. Hayashi (Tokio).

En prenant pour axe des x la droite qui joint les deux points fixes M et N et pour axe des y la perpendiculaire élevée au milieu du segment $2d$ déterminé par ces deux points, l'équation générale des ellipses passant en M et N est

$$x^2+2\lambda xy+\mu y^2+2\nu y-d^2=0. \tag{1}$$

Chacune de ces courbes rapportée à ses axes de symétrie aurait une équation de la forme

$$Ax^2+Cy^2+F=0, \tag{2}$$

et j'exprimerai qu'elles sont de grandeur constante en égalant les

trois invariants des formes (1) et (2), ce qui donne les relations

$$A + C = 1 + \mu, \qquad AC = \mu - \lambda^2, \qquad ACF = -\nu^2 - (\mu - \lambda^2)d^2,$$

d'où l'on tire

$$F = -\frac{\nu^2 + (\mu - \lambda^2)d^2}{\mu - \lambda^2},$$

A et C sont les racines de l'équation

$$X^2 - (1 + \mu)X + \mu - \lambda^2 = 0.$$

Dès lors, en désignant par a et b ($a > b$) les longueurs constantes des demi-axes des ellipses, j'ai

$$(3) \qquad \frac{(1+\mu)(\mu - \lambda^2)}{\nu^2 + (\mu - \lambda^2)d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \qquad \frac{(\mu - \lambda^2)^3}{\nu^2 + (\mu - \lambda^2)d^2} = \frac{1}{a^2 b^2}.$$

D'autre part, les équations du centre des ellipses (1) sont

$$(4) \qquad x + \lambda y = 0, \qquad \lambda x + \mu y + \nu = 0.$$

L'élimination de λ, μ, ν entre les relations (3) et (4) donne l'équation du lieu des centres cherché

$$a^2 b^2 y^2 (x^2 + y^2 - d^2)^2$$
$$- [a^2 b^2 - (a^2 + b^2)y^2][d^2(a^2 + b^2)y^2 - a^2 b^2 (x^2 + y^2)] = 0.$$

Le lieu est une sextique fermée, symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées, ayant cinq points doubles, dont l'un, à l'origine, est réel si $b < d < a$, et les quatre autres, équidistants de l'origine, déterminés par les équations

$$(a^2 + b^2)y^2 - a^2 b^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - d^2 = 0,$$

sont réels si $d < \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

F. MICHEL.

Choisissons les deux points sur OX de part et d'autre de l'origine à une distance a. Exprimons que l'ellipse

$$\left(\frac{(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha}{m}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{(x - x_0)\sin\alpha - (y - y_0)\cos\alpha}{n}\right)^2 = 1$$

passe par les deux points

$$\left(\frac{(a-x_0)\cos\alpha-y_0\sin\alpha}{m}\right)^2+\left(\frac{(a-x_0)\sin\alpha+y_0\cos\alpha}{n}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{(a+x_0)\cos\alpha+y_0\sin\alpha}{m}\right)+\left(\frac{(a-x_0)\sin\alpha-y_0\cos\alpha}{n}\right)^2=1.$$

En les ajoutant et en les retranchant on obtient les deux équations suivantes :

$$\frac{x_0}{m^2}\cos^2\alpha+\frac{x_0}{n^2}\sin^2\alpha+y_0\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha=0,$$

$$\left(\frac{a^2}{m^2}+\frac{y_0^2}{n^2}+\frac{x_0^2}{m^2}-1\right)\cos^2\alpha+\left(\frac{y_0^2}{m^2}+\frac{a^2}{n^2}+\frac{x_0^2}{n^2}-1\right)\sin^2\alpha$$
$$+2x_0y_0\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha=0.$$

Divisant par $\cos^2\alpha$, on a deux équations en $\operatorname{tang}\alpha$ entre lesquelles l'élimination de α est des plus simples et donne

$$y^2\left(\frac{y^2}{m^2}-\frac{x^2}{n^2}+\frac{a^2}{n^2}-1\right)\left(\frac{y^2}{n^2}-\frac{x^2}{m^2}+\frac{a^2}{m^2}-1\right)$$
$$+x^2\left[y^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)-1\right]^2=0,$$

équation d'une sextique dont la forme dépend essentiellement des valeurs relatives de a^2, m^2 et n^2. MATHIEU (Saïgon).

Soient M_1, N_1 les deux points fixes et, dans la position de l'ellipse que l'on voudra considérer, soient $\overline{OB'}=b'$ le demi-diamètre parallèle à $\overline{MN}$, $\overline{OA'}=a'$ le demi-diamètre conjugué; soit enfin θ l'angle $\widehat{A'OB'}$: l'équation de l'ellipse rapportée au couple de diamètres considérés sera

$$b'^2x^2+a'^2y^2-a'^2b'^2=0,$$

et si 2β est la longueur de la corde $\overline{MN}$, de milieu P, ρ la distance $\overline{OP}$, on aura

$$b'^2\rho^2+a'^2\beta^2=a'^2b'^2.$$

Les théorèmes d'Apollonius donnent d'ailleurs

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,$$
$$a'b'\sin\theta=ab,$$

a et b étant les longueurs des demi-axes, et l'on en conclura la condition

$$\frac{a^2b^2(\rho^2-\beta^2)^2}{\sin^2\theta}+\left(\frac{a^2b^2}{\sin^2\theta}-(a^2+b^2)\rho^2\right)\left(\frac{a^2b^2}{\sin^2\theta}-(a^2+b^2)\beta^2\right)=0.$$

C'est l'équation en coordonnées polaires du lieu cherché, l'origine étant le point P et l'axe de la droite $\overline{\text{MPN}}$; il y aurait cependant lieu de changer θ en $\pi-\theta$, mais, comme l'équation contient seulement le sinus de θ, cela même est inutile. En passant aux coordonnées cartésiennes, il vient

$$\begin{aligned}&a^2b^2(x^2+y^2)^2y^2\\&\quad-\left\{a^2b^2(a^2+b^2+2\beta^2)x^2+[(a^2+b^2)a^2b^2-(a^4+b^4)\beta^2]y^2\right\}y^2\\&\qquad\qquad+a^2b^2[a^2b^2x^2+(a^2-\beta^2)(b^2-\beta^2)y^2]=0.\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une sextique bicirculaire présentant à l'origine un point double à tangentes réelles lorsque la distance des points fixes M et N est intermédiaire entre les longueurs du grand axe et du petit axe, et un point double à tangentes imaginaires dans le cas contraire. Un point tacnodal isolé existe à l'infini sur la droite $\overline{\text{MN}}$.

E. Malo.

Réponse analogue de M. *E.-A. Majol.*

2885. (1905, 50) (E.-N. Barisien). — *Aire de la podaire de l'hyperbole.* — La tangente à l'hyperbole peut être représentée par l'équation

$$bx-ay-2ab\theta+(bx+ay)\theta^2=0,$$

où θ est un paramètre variable : l'expression de la distance ρ du point (α, β) à cette tangente est alors

$$\rho=\frac{(b\alpha-a\beta)-2ab\theta+(b\alpha+a\beta)\theta^2}{\sqrt{a^2+b^2-2(a^2-b^2)\theta^2+(a^2+b^2)\theta^4}}.$$

L'élément de surface est $\frac{1}{2}\rho^2\,d\varphi$, en appelant $d\varphi$ l'angle de contingence, c'est-à-dire la différentielle de l'angle

$$\varphi=\text{arc tang}\,\frac{b}{a}\,\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2};$$

il vient donc

$$d\varphi=\frac{4ab\theta\,d\theta}{a^2+b^2-2(a^2-b^2)\theta^2+(a^2+b^2)\theta^4}$$

et

$$dS = \left(\frac{(b\alpha - a\beta) - 2ab\theta + (b\alpha + a\beta)\theta^2}{a^2 + b^2 - 2(a^2 - b^2)\theta^2 + (a^2 + b^2)\theta^4}\right)^2 2ab\theta\, d\theta.$$

La sommation doit s'étendre à toutes les valeurs réelles de θ de $-\infty$ à $+\infty$; mais en décomposant l'intégrale totale en deux autres, de $-\infty$ à o et de o à $+\infty$, et en prenant pour variable dans la première $-\theta$ à la place de θ, on aura

$$-S = \frac{16a^2b^2}{r^4}\int_0^\infty \frac{(b\alpha + a\beta)\theta^4 + (b\alpha - a\beta)\theta^2}{(\theta^4 - 2\theta^2\cos 2\omega + 1)^2}\, d\theta,$$

si l'on pose pour abréger

$$a = r\cos\omega, \qquad b = r\sin\omega,$$

$$a^2 + b^2 - 2(a^2 - b^2)\theta^2 + (a^2 + b^2)\theta^4 = r^2(1 - 2\theta^2\cos 2\omega + \theta^4).$$

La quantité sous le signe intégral peut du reste s'écrire, abstraction faite de la différentielle $d\theta$,

$$\frac{d}{d\theta}\,\frac{A\theta^3 + B\theta}{\theta^4 - 2\theta^2\cos 2\omega + 1} + \frac{A\theta^2 - B}{\theta^4 - 2\theta^2\cos 2\omega + 1},$$

les coefficients A et B vérifiant les relations

$$A\cos 2\omega + B = -\frac{b\alpha + a\beta}{4},$$

$$A + B\cos 2\omega = \frac{b\alpha - a\beta}{4},$$

et le dernier terme est encore susceptible de se décomposer en deux autres, en accord avec l'identité

$$\frac{A\theta^2 - B}{\theta^4 - 2\theta^2\cos 2\omega + 1}$$
$$= \frac{1}{4\cos\omega}\left(\frac{(A + B)\theta - 2B\cos\omega}{\theta^2 - 2\theta\cos\omega + 1} - \frac{(A + B)\theta + 2B\cos\omega}{\theta^2 + 2\theta\cos\omega + 1}\right).$$

C'est ce dernier terme dont il y a lieu de s'occuper, le premier, qui reste rationnel par l'intégration, étant nul aux limites. Or on a

$$\int \frac{(A + B)\theta - 2B\cos\omega}{\theta^2 - 2\theta\cos\omega + 1}\, d\theta = \frac{A + B}{2}\log\frac{\theta^2 - 2\theta\cos\omega + 1}{\sin^2\omega}$$
$$+ \frac{(A - B)\cos\omega}{\sin\omega}\,\text{arc tang}\,\frac{\theta - \cos\omega}{\sin\omega}$$

et

$$\int \frac{(A+B)\theta + 2B\cos\omega}{\theta^2 + 2\theta\cos\omega + 1}\,d\theta = \frac{A+B}{2}\log\frac{\theta^2 + 2\theta\cos\omega + 1}{\sin^2\omega}$$
$$- \frac{(A-B)\cos\omega}{\text{in}\,\omega}\,\text{arc tang}\frac{\theta + \cos\omega}{\sin\omega},$$

et, par suite,

$$\int \frac{A\theta^2 - B}{\theta^4 - 2\theta^2\cos 2\omega + 1}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4\cos\omega}\left[\frac{A+B}{2}\log\frac{\theta^2 - 2\theta\cos\omega + 1}{\theta^2 + 2\theta\cos\omega + 1}\right.$$
$$\left. + \frac{(A-B)\cos\omega}{\sin\omega}\left(\text{arc tang}\frac{\theta - \cos\omega}{\sin\omega} + \text{arc tang}\frac{\theta + \cos\omega}{\sin\omega}\right)\right].$$

Le logarithme est nul aux deux limites, et l'on trouve

$$\left(\text{arc tang}\frac{\theta - \cos\omega}{\sin\omega} + \text{arc tang}\frac{\theta + \cos\omega}{\sin\omega}\right)_0^\infty = \pi;$$

il vient donc

$$-S = \frac{4\pi(A-B)}{\sin\pi}\,\frac{a^2b^2}{r^4}.$$

D'ailleurs, les équations qui définissent A et B donnent

$$4(A-B) = \frac{b\alpha}{\sin^2\omega},$$

et l'on en conclut

$$-S = a^2\frac{\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ainsi :

L'aire de la podaire de l'hyperbole est indépendante de la distance du pôle à l'axe transverse, et son rapport à l'aire du cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre est le même au signe près que celui de l'abscisse à la demi-distance focale.

Cette conclusion suppose que, conformément aux principes de Gauss, l'aire d'un circuit fermé est la somme algébrique des aires partielles décrites, en affectant l'aire extérieure infinie du coefficient *zéro* et en attribuant à toute aire située à gauche du contour un coefficient surpassant d'une unité le coefficient relatif à l'aire située à droite. Par suite, et en raison de la symétrie, la podaire de tout point de l'axe non transverse a une aire nulle. E. Malo.

2886. (**1905**, 5o) (E.-N. Barisien). — *Maximum et minimum de l'aire du triangle autopolaire à un quadrangle inscriptible dont trois sommets sont fixes.* — Soient menées par les sommets A, B, C des parallèles aux côtés $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, et soient D, E, F les deuxièmes points de rencontre de ces parallèles avec le cercle $\widehat{ABC}$: en admettant que l'on ait $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$, le point D tombe entre A et C et les points E et F entre B et C.

Cela étant, si l'on suppose que le sommet mobile M parte de A et décrive en entier la circonférence du cercle $\widehat{ABC}$ on se rend compte aisément que la surface du triangle A'B'C', nulle lorsque M coïncide avec A, B, C, infinie lorsqu'il coïncide avec D, E, F, passe par un maximum pour une position de M intermédiaire entre A et B et par un minimum pour une position intermédiaire entre E et F.

La solution est-elle susceptible d'une construction au moyen de la règle et du compas? Pour répondre à cette question il faut recourir à l'analyse, et le plus simple est probablement d'observer que les côtés du triangle A'B'C', dont les sommets sont sur les droites $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, pivotent respectivement autour des points P, Q, R, qui sont les pôles par rapport à la circonférence $\widehat{ABC}$ des côtés $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, et qui forment un triangle homothétique inverse du triangle DEF.

On peut donc prendre l'équation du côté $\overline{B'C'}$ sous la forme

$$\begin{aligned} o &= \theta(z \sin A + x \sin C) + (x \sin B + y \sin A) \\ &= (\theta \sin C + \sin B)x + y \sin A + \theta z \sin A, \end{aligned}$$

les équations des côtés $\overline{C'A'}$ et $\overline{A'B'}$ sont alors

$$\begin{aligned} o &= (\theta \sin C + \sin B)x + y \sin A - \theta z \sin A = o, \\ o &= (\theta \sin C + \sin B)x - y \sin A + \theta z \sin A = o; \end{aligned}$$

et par l'application de la formule connue on parvient à l'expression de l'aire, savoir,

$$\frac{S}{4R^2 \sin A \sin B \sin C} = \frac{\theta(\theta \sin C + \sin B)}{(\theta \sin B + \sin C)[\theta \sin B - \sin(A - B)][\theta \sin(C - A) + \sin C]} \sin^2 A.$$

Il s'agirait par conséquent de résoudre l'équation

$$o = \frac{1}{\theta} + \frac{\sin C}{\theta \sin C + \sin B} - \frac{\sin B}{\theta \sin B + \sin C}$$
$$- \frac{\sin B}{\theta \sin B - \sin(A - B)} - \frac{\sin(C - A)}{\theta \sin(C - A) + \sin C};$$

mais celle-ci est du quatrième degré et ne paraît susceptible d'aucune réduction. Il n'y a donc pas à présumer que le problème puisse être résolu par le moyen de la règle et du compas seuls.

E.-A. Majol.

2891. (**1905**, 52) (G. de Longchamps). — *Sur les quadrilatères remarquables.* — Sur le parallélogramme isogonal d'après la propriété signalée par M. de Longchamps, que l'angle de ses diagonales égale l'angle compris entre les côtés adjacents.

Posons $a > b$ et $x > y$, où a et b sont des côtés adjacents et x, y sont les diagonales; si nous désignons par φ l'angle aigu compris entre les diagonales, l'angle aigu entre les côtés sera aussi φ, et nous aurons

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi, \qquad y^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi,$$
$$4a^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\varphi, \qquad 4b^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi,$$

dont les deux premières donnent

$$(\alpha) \qquad x^2 - y^2 = 4ab\cos\varphi,$$

et les deux dernières

$$(\beta) \qquad a^2 - b^2 = xy\cos\varphi.$$

Divisant les deux équations membre à membre, on a

$$(1) \qquad \frac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2} = \frac{4ab}{xy}, \qquad \text{d'où} \qquad xy = \frac{4ab(a^2 - b^2)}{x^2 - y^2},$$

$$(2) \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{y}\,\frac{x + y}{x}\,\frac{x - y}{y}\,\frac{a + b}{a}\,\frac{a - b}{b}.$$

La double surface du parallélogramme étant

$$xy\sin\varphi = 2ab\sin\varphi,$$

d'où

$$(3) \qquad xy = 2ab,$$

on déduit, en ayant égard à (α) et (β),

$$\frac{\tan g(x, y)}{\sin(a, b)} = \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{\tan g\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

$$\frac{\tan g(a, b)}{\sin(x, y)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{\tan g\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

En comparant ces deux valeurs

$$\frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

et, en ayant égard à la propriété (3),

$$\frac{1}{a^2 - b^2} = \frac{2}{x^2 - y^2}$$

ou

(4) $$x^2 - y^2 = 2(a^2 - b^2).$$

Dans l'expression de l'aire d'un quadrilatère quelconque

$$Q = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2},$$

posons $a = c$ et $b = d$. Nous avons, pour la surface du parallélogramme,

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{(xy + a^2 - b^2)(xy + b^2 - a^2)}.$$

Dans cette valeur, remplaçons xy par $2ab$:

(5) $$P = \frac{1}{2}\sqrt{(2ab + a^2 - b^2)(2ab + b^2 - a^2)}.$$

Si nous remplaçons $a^2 - b^2$ par $\frac{x^2 - y^2}{2}$, il vient

(6) $$\left\{\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right)\left(xy + \frac{y^2 - x^2}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{y}\sqrt{(2xy + x^2 - y^2)(2xy + y^2 - x^2)}. \end{aligned}\right.$$

Ces six propriétés, qui semblent peu connues, sont tirées de l'Ouvrage de M. Dostor : *Propriétés nouvelles des quadrilatères en général*, etc. N. PLAKHOWO.

QUESTIONS.

823. [**U**] (**1896**, 101) On a dressé des éphémérides du minimum d'éclat pour quelques étoiles variables dont la période a pu être déterminée à une minute près. L'instant du minimum est donc un phénomène absolument comparable à celui des éclipses des satellites de Jupiter, et, par suite, au moins pour les étoiles de la région zodiacale ou écliptique, on a dû évaluer l'influence du déplacement de la Terre sur son orbite et de la transmission successive de la lumière.

On demande de faire, sur les éphémérides des étoiles précitées, des vérifications numériques donnant la preuve qu'il a été tenu compte des différentes situations de la Terre, par rapport aux étoiles dans la région susmentionnée.

Arago a proposé cette méthode dans sa Notice de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* de 1842 et dans l'*Astronomie populaire*, 1857, t. IV, p. 425-430; mais l'exemple d'Algol n'était peut-être pas le plus favorable, tandis que pour des étoiles zodiacales (λ Taureau, S Ecrevisse, δ Balance, X et Y Sagittaire, etc.) il paraît indispensable d'évaluer les déplacements de la Terre. H. Brocard.

824. [**A31**] (**1896**, 101) Les journaux d'enseignement mathématique ont publié diverses Notes au sujet de l'équation

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Il serait intéressant d'établir une bibliographie de cette équation et de ses applications. H. Brocard.

829. **[B1c]** (1896, 102) Considérons le polynome complet de degré m, à deux variables x, y, qui s'écrit ainsi

$$(a, b, c, \ldots)(x, y)_m + (f, g, h, \ldots)(x, y)_{m-1} + \ldots.$$

Je prends $m+1$ valeurs distinctes de x : $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $m+1$ de y : $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m$. Dans le polynome, je mets d'abord x_0 associé successivement avec toutes les valeurs de y, puis x_1 avec les m premières valeurs de y, puis x_2 avec les $m-1$ premières valeurs de y, etc., et enfin x_m avec y_0. J'ai ainsi $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ polynomes homogènes du premier degré par rapport aux lettres coefficients a, b, c, ...; je désigne par Δ^m le déterminant total d'ordre $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ formé par les coefficients des lettres a, b, c, ... dans tous ces polynomes.

D'autre part, je désigne par D_x^m, D_y^m les déterminants de Vandermonde d'ordre $m+1$ formés avec les valeurs de x ou de y.

Dans le *J. S.*, année 1895, p. 169, j'ai démontré la formule $\Delta^m = \varepsilon . \Delta^{m-1} . D_x^m . D_y^m$, ε étant une valeur numérique.

J'ai trouvé que jusqu'à $m = 3$ on a $\varepsilon = \pm 1$. Pourrait-on reconnaître s'il en est toujours ainsi? H. DELLAC.

832. **[V7]** (1896, 104) Le mathématicien français Jean-Baptiste Chauveau a composé une *Géométrie des indivisibles* et des *Éléments coniques*, qui existe en manuscrit (Bibl. Nat., fr., 1335). Dans le *B. D.*, fév. 1895, j'ai réuni sur ce géomètre divers documents qui le montrent vivant à Paris de 1639 à 1661. Peut-on en trouver d'autres en dehors de ces limites, et notamment déterminer le lieu et la date de sa naissance et de sa mort? Peut-on savoir d'autre part s'il professait dans un collège de l'Université?

PAUL TANNERY.

834. **[A1a]** (1896, 104) La formule

$$X = a\frac{(1+r)^{n+1} - (1+r)}{r}$$

des annuités versées au *commencement* de chaque année peut être réduite, avec une grande approximation, à cette forme :

$$\frac{X - na}{X' - na} - \frac{\frac{X}{1+r}}{\frac{X'}{1+r'}} = \frac{r}{r'} - 1,$$

où r' et X' sont un intérêt approché qu'on se donne arbitrairement et le capital qui en résulte, avec la même annuité et le même nombre d'années. Alors le problème de la détermination de r, pris comme inconnue, se réduit au second degré.

On désire savoir si cette formule se trouve exposée dans quelque livre ou brochure, comme cela paraît probable.

Hispanus.

835. [S2a] (**1896**, 105) Les équations générales de l'Hydrodynamique peuvent être mises en abrégé sous cette forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} - \dfrac{k}{\mu}\Delta^2 p + X = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} - \dfrac{k}{\mu}\Delta^2 q + Y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial r}{\partial t} - \dfrac{k}{\mu}\Delta^2 r + Z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{cases}$$

où p, q, r désignent les composantes de la vitesse du fluide considéré, μ sa densité et k une constante qui dépend de sa nature. Les autres caractéristiques résultent des égalités; d'abord

$$(2)\qquad -\varpi + (h + k)\theta + \mu V + \frac{p^2 + q^2 + r^2}{2} = \mu\varphi,$$

où ϖ désigne la pression, h une autre constante relative à la nature du fluide, θ sa dilatation cubique et V le potentiel des forces appliquées à sa masse; puis

$$(3)\qquad X = 2Mr - 2N, \qquad Y = 2Np - 2Lr, \qquad Z = 2Lq - 2Mp,$$

où les fonctions L, M, N, définies par les égalités

$$(4)\quad 2L = \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}, \qquad 2M = \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}, \qquad 2N = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y},$$

sont ce qu'on appelle les *composantes de tourbillon*. S'il s'agit d'un liquide, il faut ajouter aux formules qui précèdent l'équation d'incompressibilité

$$(5)\qquad \theta = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

En vertu de cette dernière égalité, on aura

$$(6)\qquad \Delta^2\varphi = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

et

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} = 2\dfrac{k}{\mu}\Delta^2 L - 2\dfrac{\partial L}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} = 2\dfrac{k}{\mu}\Delta^2 M - 2\dfrac{\partial M}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} = 2\dfrac{k}{\mu}\Delta^2 N - 2\dfrac{\partial N}{\partial t}. \end{cases}$$

On peut rendre intégrables ces équations au moyen du théorème suivant :

« Soient trois fonctions u, v, w de x, y, z et t, telles que l'on ait

$$(8)\quad 2L = wY - vZ, \qquad 2M = uZ - wX, \qquad 2N = vX - uY;$$

si pour simplifier on pose

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} = \xi, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = \eta, \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = \zeta, \\ \Gamma = \xi u + \eta v + \zeta w, \end{cases}$$

puis qu'on fasse

$$(10)\qquad p = -\frac{\xi}{\Gamma}, \qquad q = -\frac{\eta}{\Gamma}, \qquad r = -\frac{\zeta}{\Gamma};$$

d'où il résulte

$$(11)\quad \begin{cases} 2L = \dfrac{\zeta \dfrac{\partial \Gamma}{\partial y} - \eta \dfrac{\partial \Gamma}{\partial z}}{\Gamma^2} - \dfrac{\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} - \dfrac{\partial \eta}{\partial z}}{\Gamma}, \\ 2M = \dfrac{\xi \dfrac{\partial \Gamma}{\partial z} - \zeta \dfrac{\partial \Gamma}{\partial x}}{\Gamma^2} - \dfrac{\dfrac{\partial \xi}{\partial z} - \dfrac{\partial \zeta}{\partial x}}{\Gamma}, \\ 2N = \dfrac{\eta \dfrac{\partial \Gamma}{\partial x} - \xi \dfrac{\partial \Gamma}{\partial y}}{\Gamma^2} - \dfrac{\dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial y}}{\Gamma}, \end{cases}$$

ces expressions rendront intégrables les équations (1) et vérifieront la condition d'incompressibilité (5), pourvu qu'on ait

$$(12)\quad \begin{cases} uL + vM + wN = 0, \\ u\left(\dfrac{\partial L}{\partial t} - \dfrac{k}{\mu}\Delta^2 L\right) + v\left(\dfrac{\partial M}{\partial t} - \dfrac{k}{\mu}\Delta^2 M\right) + w\left(\dfrac{\partial N}{\partial t} - \dfrac{k}{\mu}\Delta^2 N\right) = 0, \\ \xi \dfrac{\partial \Gamma}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial \Gamma}{\partial y} + \zeta \dfrac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0. \text{ »} \end{cases}$$

L'attention des Correspondants de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* a déjà été appelée sur l'utilité d'une divulgation des progrès récents de l'Hydrodynamique (q. 325, 326). Quelqu'un d'eux pourrait-il me dire s'il a connaissance d'une proposition analogue à celle que je viens d'énoncer? Voudrait-il, en même temps, signaler les travaux relatifs à l'intégration générale des équations de l'Hydrodynamique qui ont été publiées en France et à l'étranger, depuis les Œuvres classiques de Lagrange et de Cauchy?

E. Fontaneau.

2949. [**I2b**] Je désirerais savoir si le théorème suivant est connu :

« Pour qu'un nombre soit divisible par 81, il faut d'abord que la somme de ses chiffres soit divisible par 9; soit q_1 le quotient obtenu en effectuant cette division, à ce nombre q_1

ajoutons le chiffre des dizaines multiplié par 1, le chiffre des centaines multiplié par 2, et ainsi de suite; si la somme ainsi trouvée est un multiple de 9, le nombre proposé est divisible par 81.

» Si l'on prend un nombre quelconque, et si l'on fait la somme de ses chiffres, soit q_1 le quotient de cette somme divisée par 9, et appelons r_1 le reste; au nombre q_1 ajoutons le chiffre des dizaines multiplié par 1, le chiffre des centaines multiplié par 2, et ainsi de suite; si r_2 est le reste de la division de la somme ainsi obtenue par 9, le nombre $9r_2 + r_1$ est le reste de la division du nombre proposé par 81. »

Il est bon de faire remarquer la simplicité de toutes les opérations que l'on doit effectuer.

Un caractère de divisibilité tout à fait analogue s'applique au nombre 121.

« Pour qu'un nombre soit divisible par 121, il faut d'abord que la différence algébrique entre la somme des chiffres de rang impair et celle des chiffres de rang pair soit divisible par 11; soit q_1 le quotient obtenu en effectuant cette division, à ce nombre q_1 ajoutons le chiffre des dizaines multiplié par 1, le chiffre des centaines multiplié par -2, et ainsi de suite; si la somme ainsi obtenue est divisible par 11, le nombre proposé est divisible par 121. »

On trouverait le reste de la division par 121 par un procédé de même nature que celui que nous avons employé pour 81. HENRI RENAN.

2950. [V9] A la page XII de son premier Volume des *Observations astronomiques de l'observatoire de Kœnigsberg* (Kœnigsberg, 1815), Bessel démontre, d'une manière d'ailleurs assez compliquée, la propriété du cercle orthoptique d'une ellipse, et il ajoute :

« Cette proposition géométrique si simple n'était pas, autant que je puis le savoir, connue auparavant. »

Est-il vrai que ce soit la première fois que ce théorème a été énoncé?

Le théorème connu sous le nom de *sphère de Monge*, qui n'est qu'une extension de celui du cercle orthoptique, n'était-il pas connu avant cette époque? Monge est mort en 1818, mais la première édition de son *Application de l'analyse à la géométrie des surfaces du premier et du deuxième degré* a paru en l'an III, sous le titre de *Feuilles d'analyse appliquée à la Géométrie*.

HENRI RENAN.

2951. [**M'5c**γ] Les tangentes à une cubique issues d'un point de la courbe, A, rencontrent celles qui sont issues d'un autre point B, également situé sur la cubique, en seize points parmi lesquels quatre, P, Q, R, S, sont sur une conique contenant les points A et B. Je désirerais savoir :

1° Quelles particularités présentent les douze points restants;

2° Quelle est, en supposant fixe le point A et le point B variable sur la cubique, l'enveloppe des coniques ABPQRS;

3° Si, en supposant la cubique circulaire et les points A et B en coïncidence avec les points cycliques, ce qui fait des points P, Q, R, S des foyers de la cubique rangés sur un certain cercle, il s'agit bien des foyers réels;

4° Enfin, en admettant que la réponse à la question précédente soit affirmative, quelles autres relations le cercle considéré possède avec la cubique? *E.-A. Majol.*

2952. [**M'5d**] Les cubiques planes sont des courbes du premier genre dont les points sont, par conséquent, déterminables par couples. Une cubique étant donnée par neuf points, comment peut-on, géométriquement, effectuer cette détermination par couples? En particulier, comment construire la cubique circulaire donnée par sept points?

E.-A. Majol.

2953. [I13bα] La suite

$$y = x^2 - a, \qquad x = \mathrm{E}[\sqrt{a}] + 1, 2, 3, \ldots$$

ne peut évidemment renfermer aucun terme décomposable en deux carrés premiers entre eux si a est un nombre impair de la forme $4m+1$; mais, lorsque le résidu de a, relativement au module 4, est autre que l'unité, est-il exact que la suite considérée renferme nécessairement des termes de cette nature, et sait-on, *a priori*, caractériser les valeurs convenables de x? *Rudis.*

2954. [I23aα] La démonstration du théorème d'après lequel la racine d'une équation quadratique est développable en fraction continue périodique de la forme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

n'est valable que si le numérateur de chacune des fractions intégrantes est l'unité : en considérant des fractions continues de la forme

$$a_0 + \cfrac{t}{a_1 + \cfrac{t}{a_2 + \ldots}},$$

où le numérateur de chaque fraction intégrante est un nombre constant arbitrairement choisi, les mêmes raisonnements sont inapplicables. La périodicité, qui se manifeste d'elle-même dans un très grand nombre de cas, est-elle alors la règle absolue, et, s'il n'en est pas ainsi, sait-on caractériser relativement aux coefficients de l'équation les nombres t qui donnent soit une fraction périodique, soit une fraction non périodique? *Rudis.*

RÉPONSES

2897. (**1905**, 74) (*Rudis*). — *Décomposition du nombre* 12761717 *en facteurs premiers.* — Tout nombre appartenant au treizième million peut être décomposé dans le cas le plus défavorable en une journée par un calculateur ordinaire en essayant les 500 facteurs premiers qui sont inférieurs à la racine de ce nombre. Ce procédé n'est recommandé que pour la recherche des petits facteurs.

En général, la méthode suivante peut être employée pour sa simplicité et sa rapidité. Elle conduit d'autant plus vite au résultat que le nombre donné admet deux facteurs plus rapprochés. Soit

$$N = a^2 - b = (a + k)^2 - (k^2 + 2ak + b),$$

a^2 étant le carré immédiatement supérieur au nombre proposé N. Pour décomposer N en facteurs, il faut trouver une valeur de

$$k^2 + 2ak + b$$

qui soit un carré parfait

$$M^2 = P.$$

On forme donc, par additions, en employant la méthode des différences, les valeurs successives de P, en examinant celles qui ont des terminaisons susceptibles d'appartenir à un carré (pour plus de rapidité, on emploie une Table de carrés). Ici, en 5 ou 10 minutes au plus, la question est résolue :

$$N = 12761717 = \overline{3573}^2 - 4612 = \ldots = \overline{3579}^2 - \overline{218}^2 = 3361 \times 3797.$$

Avec un peu d'habileté, on arrive d'ailleurs très vite au résultat pour des nombres de huit chiffres.

On peut augmenter très sérieusement la rapidité de la décomposition en appliquant aux valeurs successives de P la méthode d'élimination par les conditions résiduelles.

Les résidus de P, à un nombre premier quelconque, sont périodiques; on peut ainsi, en barrant ceux de ces résidus qui ne sont point quadratiques, faisant intervenir la suite des nombres premiers, et sans calculer les valeurs de P, éliminer rapidement des milliers de valeurs successives de ce trinome. Si l'une de ces valeurs subsiste surtout au début, et après l'emploi de beaucoup de nombres premiers, c'est alors qu'il est probable qu'elle correspond à une décomposition.

On le vérifie en formant la valeur de P correspondante.

P.-F. Teilhet.

Le nombre 12761717 est le produit des deux nombres premiers 3361 et 3797. Voici la méthode qui a permis d'obtenir ce résultat en une heure et demie, au plus, sans l'emploi d'une Table de nombres premiers.

Si le nombre est composé, ses facteurs sont terminés par 3 et 9, ou par 1 et 7, et l'un d'eux est inférieur à 3572. On va donc essayer la division en prenant pour diviseur les nombres impairs inférieurs à 3572; mais l'essai deviendra inutile quand, le diviseur étant terminé par 3, par exemple, on aura la certitude que le quotient à une unité près n'est pas terminé par un 9. Or, aux environs de 3572, le quotient subit une variation de 2 ou 3 unités au plus quand le diviseur décroît lui-même de 2 unités; la variation ne pourra être supérieure à 3 qu'à partir d'une certaine limite facile à déterminer (quand le diviseur variable x vérifie l'inégalité

$$\frac{12761717}{x-2} - \frac{12761717}{x} > 3,$$

où $x < 2917$). On pourra donc suivre, sinon régulièrement, du moins avec une approximation suffisante d'une ou de deux unités, les variations du dernier chiffre du quotient approché, pour être assuré, sans opération, que la divisibilité ne serait pas vérifiée. On rectifiera de temps en temps le dernier chiffre du quotient en faisant une division complète. Sur l'exemple donné, on s'est borné à essayer les divisions par 3571, 3567, 3563, 3559, 3557, 3553, 3543, 3527, 3507, 3501, 3491, 3481, 3471, 3461, 3457, 3451, 3447, 3441, 3431, 3423, 3419, 3413, 3409, 3403, 3383, 3371 et 3361, en tout 27 divisions. On aurait pu réduire encore ce nombre, exagéré par la

crainte de commettre une erreur et par le manque d'entraînement dans l'application de la méthode.

Les indications qui précèdent suffiront à faire comprendre la méthode des essais effectués; s'ils n'avaient pas réussi, il aurait fallu tenir compte, à partir de $x = 2917$, de ce fait que le quotient augmente au moins de 3 unités et peut-être de 4. A partir d'une certaine limite, la méthode serait d'une application illusoire, le quotient croissant trop rapidement. Il sera nécessaire de recourir alors à une Table de nombres premiers; mais ce sont précisément les nombres inférieurs de la Table qui serviront à faire ces nouveaux essais et leur nombre en sera réduit.

Il semble qu'une journée ou deux d'essais suffiraient à donner la certitude qu'un nombre du treizième million est premier ou composé.

J. MAURIN.

MM. FABRY et JOLIVALD indiquent également les facteurs 3361 et 3797.

M. LECLERC trouve ces facteurs en appliquant la méthode d'Euler.

M. ESCOTT signale les Ouvrages suivants qui contiennent des méthodes propres à la recherche des facteurs :

TCHEBYCHEFF, *Theorie der Congruenzen.*

CAHEN, *Théorie des nombres.*

PÉPIN, *Extension de la théorie d'Euler* (*N. L. M.*, t. IX, 1893, Ire Partie, p. 47-76).

SEELHOFF (*A. J. M.*, t. VIII, 1885, p. 39).

MATHEWS, *Theory of numbers*, p. 267.

GAUSS, *Höhere Arithmetik* (art. 323-326; 329-334).

SEELHOFF (*A. J. M.*, t. VII, p. 264; t. VIII, p. 26; *Z. S.*, t. XXXI, p. 116; *A. Gr.*, 2e série, t. II, p. 329.

TCHEBICHEFF (*J. M.*, 1re série, t. XVI, p. 257-282).

LA RÉDACTION.

2901. (**1905**, 75) (E.-B. ESCOTT). — *Sur le mouvement d'un plan sur un plan.* — Le mouvement d'un plan mobile (yOx) sur un plan fixe (YOX) est parfaitement déterminé si l'on se donne à chaque instant la position d'un point (ab) du plan mobile et l'angle α de Ox avec OX.

On a entre les coordonnées d'un point les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} X = a + x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ Y = b + x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Les coordonnées du centre instantané de rotation sont données

par les relations

$$(2)\qquad \begin{cases} X_1 = a - \dfrac{db}{d\alpha}, \\ Y_1 = b + \dfrac{da}{d\alpha}, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{da}{d\alpha}\sin\alpha - \dfrac{db}{d\alpha}\cos\alpha, \\ y_1 = \dfrac{da}{d\alpha}\cos\alpha + \dfrac{db}{d\alpha}\sin\alpha. \end{cases}$$

Lorsqu'un point décrit une droite, on a

$$\frac{dY}{dX} = m,$$

ou, en remplaçant dY et dX par leurs valeurs,

$$\frac{db}{d\alpha} + X - a = m\left(\frac{da}{d\alpha} - (Y - b)\right)$$

ou encore

$$X - X_1 = - m(Y - Y_1) \qquad \text{avec} \qquad Y = mX + p,$$

ce qui exprime que le centre instantané est à chaque instant sur la perpendiculaire élevée à la droite $Y = mX + p$ au point XY.

Si un deuxième point $X'Y'$ décrit également une droite, on a de même

$$X' - X_1 = - l(Y' - Y_1) \qquad \text{avec} \qquad Y' = lX' + q.$$

Les deux points XY, $X'Y'$ restent à une distance invariable d; on a donc encore la relation

$$(X - X')^2 + (Y - Y')^2 = d^2.$$

L'élimination de XY, $X'Y'$ entre les équations précédentes donne pour le lieu du point X_1Y_1 un cercle dont le centre est au point d'intersection de deux droites et dont le rayon est le double de celui du cercle circonscrit au triangle dont deux des côtés sont formés par les deux droites données et le troisième côté par la droite qui joint les deux points XY, $X'Y'$.

Si dans la relation $dY = m\,dX$ on remplace dX et dY par leurs valeurs tirées de (1), on obtient de même

$$\frac{db}{d\alpha} - m\frac{da}{d\alpha} + (x + my)\cos\alpha + (mx - y)\sin\alpha = 0,$$

et, pour un deuxième point,

$$\frac{db}{d\alpha} - l\frac{da}{d\alpha} + (x' + my')\cos\alpha + (mx' - y')\sin\alpha = 0.$$

Mais de (3) on tire

$$\frac{da}{d\alpha} = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha,$$

$$\frac{db}{d\alpha} = y_1 \sin\alpha - x_1 \cos\alpha.$$

Portant dans les relations précédentes et éliminant α, il vient

$$\frac{y_1 - mx_1 + mx - y}{y_1 - lx_1 + lx' - y'} = \frac{x_1 + my_1 - my - x}{x_1 + ly_1 - ly' - x'}:$$

équation d'un cercle passant par les deux points donnés et l'intersection des deux droites sur lesquelles ils se meuvent.

En résumé, si dans le mouvement d'un plan mobile sur un plan fixe deux points quelconques décrivent des droites, la roulette est un cercle passant par les deux points et l'intersection des droites qu'ils décrivent, et la base est un cercle dont le centre est cette intersection et de rayon double du précédent.

On verrait de même que, si plus de deux points décrivent des droites, il faut que ces droites soient concourantes et que tous les points soient placés sur le cercle passant par le point de concours des droites et deux quelconques d'entre eux.

Pour avoir les courbes passant par des points fixes, il suffit d'éliminer α entre les équations suivantes :

$$t = a + x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$

$$s = b + x\sin\alpha + y\cos\alpha;$$

on aura ainsi l'équation des courbes du plan mobile passant par des points fixes.

Ainsi, dans le cas d'une droite de longueur constante se déplaçant entre deux droites fixes, on a

$$a = m\cos\alpha, \qquad b = -m\sin\alpha,$$

et l'on a pour l'équation des courbes

$$(x^2 + y^2 - m^2)^2 = [(m - x)t - ys]^2 + [(m + x)s - ty]^2.$$

Si le point fixe est le point d'intersection des droites, t et s sont nuls et l'on a comme courbe le cercle roulette.

Si deux droites du plan mobile passent chacune par un point fixe, la base est un cercle passant par les deux points et dont le segment déterminé par les deux points est capable d'un angle égal à celui des deux droites.

Remarque. — On a vu que les courbes du plan mobile passant constamment par un point fixe sont représentées par les équations

$$X = a + x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$Y = b + x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

dans lesquelles X et Y représentent les coordonnées d'un point du plan fixe. On peut encore les écrire

$$x = (X-a)\cos\alpha + (Y-b)\sin\alpha,$$
$$y = -(X-a)\sin\alpha + (Y-b)\cos\alpha.$$

En différentiant, il vient

$$\frac{dx}{d\alpha} = -(X-a)\sin\alpha + (Y-b)\cos\alpha - \frac{da}{d\alpha}\cos\alpha - \frac{db}{d\alpha}\sin\alpha,$$
$$\frac{dy}{d\alpha} = -(X-a)\cos\alpha - (Y-b)\sin\alpha + \frac{da}{d\alpha}\sin\alpha - \frac{db}{d\alpha}\cos\alpha$$

ou encore

$$\frac{dx}{d\alpha} = (y - y_1), \qquad \frac{dy}{d\alpha} = -(x - x_1).$$

On en déduit

$$dy(y - y_1) + dx(x - x_1) = 0,$$

ce qui montre que la normale à la courbe au point fixe passe à chaque instant par le centre instantané de rotation.

Si le mouvement est tel qu'un point (x, y) du plan mobile décrive une droite

$$X\cos\omega + Y\sin\omega - p = 0,$$

on voit sans difficulté que les équations de la roulette sont de la forme

$$x_1 = x + \delta\cos(\omega + \alpha),$$
$$y_1 = y - \delta\sin(\omega + \alpha)$$

(δ est une fonction de α).

De même, si une droite

$$x \cos \pi + y \sin \pi - q = 0$$

du plan mobile passe constamment par un point fixe (X, Y), on calcule aisément les équations de la base

$$X_1 = X + \Delta \cos(\pi + \alpha),$$
$$Y_1 = Y + \Delta \sin(\pi + \alpha)$$

(Δ est une fonction quelconque de α). MATHIEU (Saïgon).

2903. (1905, 76) (E.-B. ESCOTT). — *Équations indéterminées.* — Je remarque que

$$4mn(m^2 - n^2) + 1 = p^2$$

exige que p soit impair $= 2k + 1$. D'où

$$(1) \qquad mn(m^2 - n^2) = k(k+1).$$

On peut faire diverses hypothèses sur la décomposition du premier membre de (1). Si $m = k$,

$$n(m^2 - n^2) = k + 1$$

donne la solution presque évidente

$$m = 2, \qquad n = 1,$$

et celle-là seulement.

Les hypothèses

$$m(m^2 - n^2) = k + 1, \qquad n = k,$$
$$mn = k, \qquad m^2 - n^2 = k + 1$$

ne donnent rien d'intéressant.

Il n'en est pas de même de

$$m^2 - n^2 = k, \qquad mn = k + 1,$$

d'où l'on tire

$$m^2 = \frac{x + k}{2}, \qquad y = \frac{x - k}{2}.$$

Si

$$5k^2 + 8k + 4 = x^2,$$

cette dernière donne

$$k = \frac{-4 + \sqrt{5x^2 - 4}}{5},$$

et

$$5x^2 - 4 = y^2. \tag{2}$$

Cette équation (2) est complètement résolue par les suites

$$x = 1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 34,\ 89,\ \ldots, \qquad x_p = 3x_{p-1} - x_{p-2},$$
$$y = 1,\ 4,\ 11,\ 29,\ 76,\ 199,\ \ldots, \qquad y_p = 3y_{p-1} - y_{p-2}.$$

On constate aisément que les valeurs de x et de y de rang impair donnent pour k et pour m et n des valeurs convenables, et que ces valeurs sont des nombres récurrents :

$$m = 1,\ 3,\ 8,\ 21,\ \ldots, \qquad m_p = 3m_{p-1} - m_{p-2},$$
$$n = 1,\ 2,\ 5,\ 13,\ \ldots, \qquad n_p = 3n_{p-1} - n_{p-2}.$$

Le problème a donc une *infinité* de solutions fournies par les m et n de même rang des suites précédentes, que la formule de récurrence permet de prolonger indéfiniment.

On peut remarquer que les nombres n et les nombres x sont les mêmes et, en outre, que

$$m_p = n_p + m_{p-1} \qquad \text{et} \qquad n_p = m_{p-1} + n_{p-1}.$$

A. BOUTIN.

Les équations proposées admettent une infinité de solutions en nombres entiers : ainsi l'on peut faire, non seulement $x = 13$, $y = 11$, mais encore $x = 37$, $y = 29$; $x = 286$, $y = 241$, ...

Pour le prouver, je remarque que les équations proposées équivalent aux deux que voici :

$$x^2 = p^2 + q^2, \qquad y^2 = 4pq + 1,$$

et que l'on satisfait identiquement à la première d'entre elles en posant

$$p = 2\beta(\alpha + \beta)\delta, \qquad q = \alpha(\alpha + 2\beta)\delta,$$

α et β étant deux entiers premiers entre eux, ce qui donne

$$x = [(\alpha + \beta)^2 + \beta^2]\delta, \qquad x^2 = [\alpha^2(\alpha + 2\beta)^2 + 4\beta^2(\alpha + \beta)^2]\delta^2,$$

et ce qui change l'équation en y dans la suivante :

$$y^2 = 4\alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)\delta^2 + 1.$$

Or α et β peuvent être arbitrairement choisis; ce choix une fois fait et si l'on pose

$$\Delta = 4\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta),$$

Δ est un nombre qui ne sera généralement pas un carré parfait (en laissant entièrement de côté la question de savoir s'il peut jamais l'être). On a donc à vérifier en nombres entiers l'équation

$$y^2 = \Delta\delta^2 + 1,$$

c'est-à-dire la simple équation de Pell, dont le mode de résolution est connu. E. Malo.

Si l'on remarque que les deux relations proposées entraînent la suivante :

$$2x^2 = r^2 + s^2,$$

on obtient facilement le système de valeurs ci-après qui renferme implicitement toutes les solutions de la question

$$x = K(A^2+B^2), \qquad s = K(A^2-B^2-2AB),$$
$$r = K(A^2-B^2+2AB), \qquad y^2 = 4K^2AB(A^2-B^2)+1,$$

K est un entier déterminé par la relation qui donne y^2, A et B sont deux entiers premiers entre eux.

Si l'on suppose $K = 1$, on a l'équation

$$y^2 = 4AB(A^2-B^2)+1,$$

et l'on peut dire que, à chaque solution de cette équation, correspond une infinité de solutions du système proposé.

Exemple : $A = 3$, $B = 2$ conduit, en reprenant la valeur générale de y^2, à

$$y^2 = 120K^2 + 1,$$

et l'on a les suites

$$K = 0, \quad 1, \quad 22, \quad 483, \quad \ldots,$$
$$x = 0, \quad 13, \quad 286, \quad 6079, \quad \ldots,$$
$$y = 1, \quad 11, \quad 241, \quad 5291, \quad \ldots,$$
$$r = 0, \quad 17, \quad 374, \quad 8211, \quad \ldots,$$
$$s = 0, \quad 7, \quad 154, \quad 3381, \quad \ldots,$$

avec la formule récurrente générale

$$T_{n+1} = 22T_n - T_{n-1}.$$

Pour $B = 1$ et $A \leqq 40$, on n'a que l'équation

$$y^2 = 840K^2 + 1$$

qui fournit les suites

$$\begin{array}{llllll} K & = 0, & 1, & 58, & \ldots, \\ x & = 0, & 37, & 2146, & \ldots, \\ y & = 1, & 29, & 1681, & \ldots, \\ r & = 0, & 47, & 2726, & \ldots, \\ s & = 0, & 23, & 1334, & \ldots, \end{array}$$

avec

$$T_{n+1} = 58T_n - T_{n-1}.$$

Pour $B = 3$ et $A = 5$, on a l'équation

$$960K^2 + 1 = y^2,$$

et les suites

$$\begin{array}{llllll} K & = 0, & 1, & 62, & \ldots, \\ x & = 0, & 34, & 2108, & \ldots, \\ y & = 1, & 31, & 1921, & \ldots, \\ r & = 0, & 46, & 2852. & \ldots, \\ s & = 0, & 14, & 868, & \ldots, \end{array}$$

avec

$$T_{n+1} = 62T_n - T_{n-1},$$

etc., etc.

Il serait intéressant de renfermer, sous une formule explicite et simple, toutes les solutions du problème. Je crains qu'un tel résultat ne soit guère accessible dans l'état actuel de l'analyse.

P.-F. TEILHET.

Les équations proposées ont une infinité de solutions communes. Elles admettent toutes les solutions du système suivant :

$$\begin{aligned} x &= a(1 + 2b^2 + 2b), \\ r &= a(1 + 2b^2 + 4b), \\ s &= a(2b^2 - 1), \\ y^2 &= 4a^2 b(1 + b)(1 + 2b) + 1. \end{aligned}$$

Pour avoir des solutions entières de ce dernier système, il suffit de donner à a et b les valeurs suivantes :

$$a = 2m + 1, \qquad b = 2m^2 + 2m \pm 1;$$

à toute valeur entière de m correspond une solution entière commune des équations données.

Exemple :

$$m = 1, \qquad a = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} b = 3 \left\{ \begin{array}{l} \overline{75}^2 + \overline{55}^2 = \overline{93}^2 + 1, \\ \overline{75}^2 - \overline{55}^2 = \overline{51}^2 - 1, \end{array} \right. \\ b = 5 \left\{ \begin{array}{l} \overline{183}^2 + \overline{109}^2 = \overline{213}^2 + 1, \\ \overline{183}^2 - \overline{109}^2 = \overline{147}^2 - 1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

MATHIEU (Saïgon).

2908. (**1905**, 103) (LA RÉDACTION). — *Encyclopédie des Sciences mathématiques.* — Répondant aux désirs exprimés par quelques-uns de nos lecteurs, nous indiquons l'état d'avancement de la publication allemande de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*; la nature même de cette publication ne permettait pas de suivre rigoureusement l'ordre indiqué par les promoteurs; nous signalerons tout ce qui a paru dans les diverses branches des Sciences mathématiques.

Le premier Tome, relatif à l'Arithmétique et à l'Algèbre, est entièrement publié; il contient :

Les principes de l'Arithmétique; par M. SCHUBERT.

L'Analyse combinatoire et les déterminants; par M. NETTO.

Les nombres irrationnels, les séries et les produits infinis; par M. PRINGSHEIM.

Les nombres complexes; par M. STUDY.

Les ensembles; par M. SCHÖNFLIES.

Les groupes finis discontinus; par M. BURKHARDT.

Les fonctions rationnelles; par M. NETTO.

La théorie arithmétique des grandeurs algébriques; par M. LANDSBERG.

Théorie des invariants; par M. MEYER.

Théorie des équations; par MM. RUNGE, VAHLEN, HÖLDER, NETTO.

Théorie des nombres, substitutions; par MM. WIMAN, BACHMANN, VAHLEN, HILBERT, LANDSBERG, WEBER.

Calcul des probabilités; par MM. Czuber, Bauschinger, von Bartkiewicz, Bohlmann.

Calcul des différences; par M. Selivanof.

Calcul numérique; par M. Mehmke.

Jeux mathématiques; par M. Ahrens.

Applications des mathématiques à l'Économie politique; par M. Pareto.

Séries à termes complexes; par M. Pringsheim.

Le deuxième Tome, relatif à l'Analyse, est divisé en deux parties; ont paru les articles suivants :

Principes sur la théorie générale des fonctions; par M. Pringsheim.

Calcul différentiel et intégral; par M. Voss.

Intégrales définies; par M. Brunel.

Équations différentielles; par MM. Painlevé et Vessiot.

Équations aux dérivées partielles; par M. Weber.

Groupes continus de transformations; par MM. Maurer et Burckhardt.

Détermination des constantes arbitraires ou des fonctions arbitraires; par MM. Böcher et Sommerfeld.

Potentiel; par MM. Burckhardt et Meyer.

Calcul des variations; par M. Kneser.

Interpolation trigonométrique; par M. Burkhardt.

Fonctions sphériques, de Lamé, de Bessel; par M. Wangerin.

Théorie des fonctions analytiques; par M. Osgood.

Fonctions algébriques et leurs intégrales; par M. Wirtinger.

Le troisième Tome, relatif à Géométrie, est divisé en trois Parties; aucun fascicule n'a paru pour la première Partie; ont paru les articles suivants dans la deuxième et la troisième Parties :

Coniques; par M. Dingeldey.

Surfaces du second ordre; par M. Staude.

Applications du calcul infinitésimal aux courbes et aux surfaces; par M. Mangoldt.

Courbes tracées sur une surface; par M. Lilienthal.

Courbes transcendantes particulières; par M. Scheffers.

Surfaces particulières; par M. Lilienthal.

Surfaces applicables; déformations; par M. Voss.

Le quatrième Tome, divisé en deux Parties, est consacré à la Mécanique; ont paru les articles suivants :

Les principes de la Mécanique rationnelle; par M. Voss.

Fondements géométriques de la Mécanique du corps solide; par M. Timerding.

Cinématique; par MM. Schoenflies et Grubler.

Géométrie des masses; par M. Jung.

La statique graphique des corps solides; par M. Henneberg.

La Mécanique physique; par M. Furtwangler.

La physiologie du mouvement; par M. Fischer.

Jeux et Sports; par M. Walker.

Fondements géométriques de la Mécanique des corps déformables; par M. Abraham.

Hydrodynamique; par M. Love.

Aérodynamique; par M. Finsterwalder.

Balistique; par M. Cranz.

Mesures; par M. Runge.

Gravitation; par M. Zenneck.

Fondements de la Thermodynamique; par M. Bregau.

Du cinquième Tome, relatif à la Physique, il n'a paru qu'un fascicule, contenant :

Lois élémentaires de l'Électricité; par MM. Reiff et Sommerfeld.

Théorie de Maxwell; par M. Lorentz. A. Grévy.

Une édition française, publiée chez M. Gauthier-Villars sous la direction de M. Molk, a commencé de paraître; elle comprendra environ 50 fascicules, qui paraîtront tous les trois mois; cette édition complétera l'édition allemande et permettra de la tenir à jour.

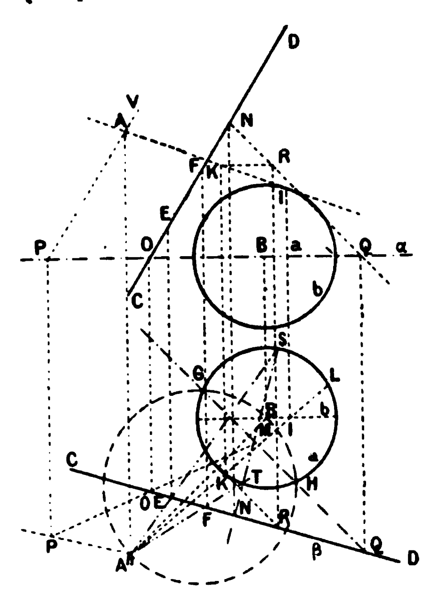
La Rédaction.

2913. (**1905**, 105) (Paulmier). — *Points de rencontre d'une droite et d'un cône circonscrit à une sphère.* — Dans l'épure qui accompagne cette réponse, j'ai désigné respectivement par A^h et A^v les projections horizontale et verticale du point A; pour les autres points et pour les lignes, j'ai désigné chaque projection par la lettre qui désigne le point ou la ligne dans l'espace, ce qui ne présente aucun inconvénient, attendu que j'ai séparé entièrement la projection horizontale de la figure de la projection verticale. Pour le

surplus, le lecteur habitué à se servir d'une ligne de terre pourra dessiner celle-ci, où il voudra, parallèlement à la droite POBQ.

B est le centre de la sphère donnée, *a* et *b* désignent respectivement le grand cercle horizontal et le grand cercle frontal de la sphère; G, H et I désignent trois points appartenant au collier de la sphère pour le point A (*voir* **1898**, p. 6, n° 1212).

Le problème posé pourra se résoudre aisément en donnant au cône



de sommet A et circonscrit à la sphère, une base qui se projette horizontalement ou verticalement suivant une circonférence.

Imaginons un cylindre vertical circonscrit à la sphère B le long de *a*. Ce cylindre et le cône AGHI se touchent en G et en H et par conséquent, en vertu d'un théorème connu, se coupent suivant deux coniques dont les plans contiennent la droite GH et passent d'ailleurs par les points d'intersection K et L de la génératrice AI du cône avec le cylindre vertical. Chacune de ces coniques a une projection horizontale circulaire et peut servir de base au cône circonscrit. Prenons, par exemple, le plan GHK pour plan de base.

Cherchons l'intersection MN du plan ACD avec le plan GHK en déterminant par exemple, sur cette intersection, les points M et N situés respectivement dans le plan horizontal α passant par GH, et

dans le plan vertical β passant par CD. Le plan α coupe le plan ACD suivant une droite OP, s'appuyant respectivement en O et P sur CD et sur la parallèle AP menée par A à CD; le point de rencontre de OP et de GH est le point M. Le plan vertical β coupe le plan GHK suivant une droite QR, s'appuyant respectivement en Q et R sur GH et sur la parallèle KR menée par K à GH; le point de rencontre de QR et de CD est le point N.

Les points de rencontre S et T de MN et de la base projetée horizontalement sur la circonférence *a* sont les points de départ de deux génératrices AS, AT, dont les intersections E et F avec CD sont les points demandés. F. Chomé (Bruxelles).

Dans la solution suivante, il n'est fait usage d'aucune rotation, ni d'aucun rabattement ou changement de plan de projection.

Soient

XY la ligne de terre (intersection du sol et du mur);
(*bb'*) les projections du centre de la sphère;
(*aa'*) celles du sommet du cône;
(*cd*, *c'd'*) la droite donnée.

Je vais déterminer la courbe d'intersection du cône et du plan tangent P'Q' à l'extrémité inférieure (bb'_1) du diamètre vertical de la sphère; cette courbe se projette horizontalement suivant une conique dont le grand axe est dirigé suivant *ab*, et dont le point *b* est un foyer.

Pour obtenir le centre de cette conique, je mène les génératrices de contour apparent vertical du cône *a'g'* et *a'h'*, lesquelles se projettent horizontalement suivant *ag* et *ah*; les projections horizontales des points d'intersection de ces droites avec le plan P'Q' sont *i* et *j*; le centre de la conique est le point de rencontre O de *ij* et de *ab*.

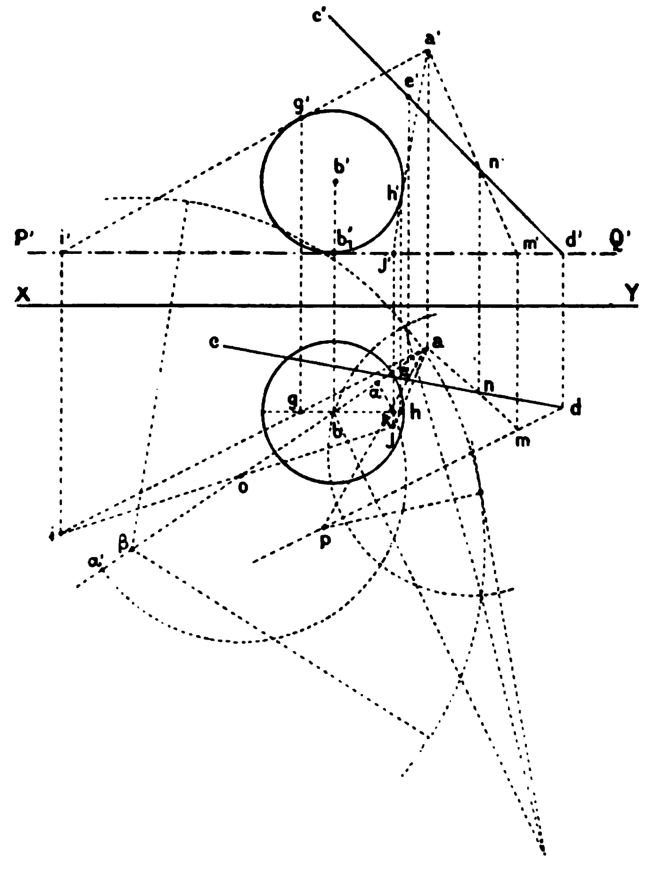
La droite *jj'* est d'ailleurs tangente en *j* à la conique; le pied *k* de la perpendiculaire abaissée du foyer *b* sur cette tangente est donc un point du cercle principal de la conique; j'obtiendrai les extrémités α et α' du grand axe de cette conique en décrivant du point O avec O*k* pour rayon un cercle qui coupe *ab* en α et α'.

Les points O, *b*, α et α' déterminent complètement la conique.

D'autre part, le plan déterminé par le sommet (*aa'*) du cône et la droite (*cd*, *c'd'*) coupe le plan P'Q' suivant une droite dont la projection horizontale est *md*.

Les points d'intersection *p* et *q* de cette droite et de la conique

déterminée ci-dessus peuvent être construits au moyen de droites et de cercles sans tracer l'ellipse (la construction est faite pour le point p sur la figure ci-contre); c'est d'ailleurs un problème clas-



sique (*voir* Rouché et Comberousse, *Traité de Géométrie*, t. II, p. 304 et 319).

Les génératrices ap et aq du cône rencontrent la droite cd, en deux points e et f dont les projections verticales sont e' et f' et qui sont les points d'intersection cherchés de la droite (cd, $c'd'$) et du cône de sommet (aa') circonscrit à la sphère. F. Michel.

AVIS.

ASSOCIATION INTERNATIONALE DES ACADÉMIES.

Préparation d'une édition complète des Œuvres de Leibniz.

La Commission chargée par les Académies des Sciences et des Sciences morales et politiques de l'Institut de France de collaborer à la préparation de l'édition inter-académique des Œuvres de Leibniz prie Messieurs les directeurs de Bibliothèques et Messieurs les propriétaires de collections privées de France, Angleterre, Amérique, Pays-Bas, Suisse, Italie, Russie, qui posséderaient des manuscrits de Leibniz ou d'écrits de Leibniz de vouloir bien les lui indiquer.

Adresse : *Comité Leibniz, Institut de France, Paris.*

QUESTIONS.

837. **[V1a]** (1896, 107) A quel auteur doit-on rapporter la proposition suivante, qui est d'un usage courant en Mathématiques : « Si un sujet A ne peut être que a, b, c, ... et si chacune des hypothèses A est a, A est a', A est a'', ... conduit à une conclusion différente, B est b, B est b', B est b'', ..., toutes les réciproques sont vraies » ?

E. FRANCKEN (Liège).

840. [**K9a**] (**1896**, 108) Quelle est la détermination la plus générale de deux systèmes de n points, P_1, P_2, P_3, ..., P_n; p_1, p_2, p_3, ..., p_n, tels que la distance $P_i P_j$ de deux points quelconques du premier système soit une fonction donnée de la distance correspondante $p_i p_j$ du second système.

Ch. Rabut.

843. [**R7bδ**] (**1896**, 126) Un correspondant pourrait-il me dire si l'on a étudié la courbe définie par les équations

$$x_0 - x = e\,R[(z - b\sin z) - \sin 2z],$$
$$y_0 - y = h\,R\left[(1 - b\cos z) - \left(1 + \frac{bc}{z}\cos^2 z\right)\right]$$

qui ont une grande importance en Balistique?

R. Guimaraes (Lisbonne).

846. [**A3d**] (**1896**, 128) Je désirerais savoir si la proposition suivante est connue :

Soient $f(x) = 0$ une équation de degré m, l et L les limites entre lesquelles les racines réelles sont toutes comprises, et h une quantité moindre que la différence des deux racines inégales les plus rapprochées.

Substituons à x, dans le polynome $f(x)$, une suite de nombres en progression arithmétique

$$l,\quad l+h,\quad l+2h,\quad \ldots,\quad l+(n-1)h,\quad l+nh,$$

dont le premier est *au plus* égal à la limite inférieure des racines et le dernier *au moins* égal à la limite supérieure de ces mêmes racines.

Écrivons le résultat de ces substitutions en une colonne verticale, que nous désignerons par u; formons dans les colonnes suivantes le tableau des différences des divers ordres Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n, ..., Δ_m; puis indiquons par V_n le nombre de variations de signes que renferme chaque colonne Δ_n du tableau ainsi formé.

Ceci posé, si chaque colonne contient une variation de plus que la colonne suivante, on a pour chacune d'elles la relation $V_n = m - n$ et les racines de la proposée sont toutes réelles et inégales. Si, pour une colonne quelconque, on trouve $V_n < m - n$, c'est-à-dire $V_n + d = m - n$, on aura, pour toutes les colonnes u, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_{n-1}, qui précèdent Δ_n, la relation $V_{n'} + d = m - n'$ et la proposée possédera d racines imaginaires.

Si, indépendamment des variations d perdues par une colonne quelconque, Δ_n, une colonne de différences, d'ordre inférieur $\Delta_\nu (\nu < n)$, perd un nouveau nombre d' de variations, les racines imaginaires de la proposée s'élèveront à $d + d'$, et ainsi de suite.

Si, enfin, la colonne Δ_1 présente plus de variations que la colonne u, la proposée a, pour chaque signe (ou couple de variations), perdu deux racines doubles ou deux racines imaginaires, ce que l'on sait distinguer.

F. Delastelle.

847. **[R9bα]** (**1896**, 129) 1° A propos du Traité de Coriolis, existe-t-il des expériences plus modernes sur les pertes de force vive et les frottements dans le jeu de billard?

2° Je trouve, dans le Chapitre de Coriolis sur le choc horizontal, que la limite de a, pour que la bille se sépare de la queue après le choc, est

$$a = \sqrt{\frac{5}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\left(1 - \theta - \theta\frac{M}{m}\right)}$$

et non la valeur indiquée à la page 94 par l'éminent auteur.

D'ailleurs, la valeur ci-dessus vérifiant l'équation donnée plus loin (p. 99) pour la vitesse maximum de rotation R_r, il en résulte ce théorème pour le choc horizontal d'une bille par la queue :

« La limite d'excentricité pour le choc sans contact ultérieur correspond au maximum de la vitesse tangentielle de

rotation », ou analytiquement, en gardant les notations de Coriolis,

$$\frac{dR_r}{da} = 0 \quad \text{pour} \quad W_1 = W_1'.$$

Ces résultats sont-ils connus? A. GANDILLON.

850. **[V7]** (**1896**, 130) Quels renseignements peut-on avoir sur un Blondeau (Roch), constructeur d'instruments de mathématiques et d'astronomie à Paris, vers le milieu du XVII[e] siècle? PAUL TANNERY.

852. **[V5a]** (**1896**, 149) Cossali et Libri font mention d'un mathématicien italien nommé GUGLIELMO DE LUNIS, probablement du XIII[e] siècle. On demande une Notice sur la vie et les travaux de ce mathématicien, et en particulier sur la traduction faite par lui d'un Traité d'Algèbre arabe, dont il existe une copie manuscrite dans la Bibliothèque nationale de Florence. G. ENESTRÖM (Stockholm).

2955. **[D4]** Dans ma thèse, qui vient de paraître (*Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes,* Paris, Gauthier-Villars, et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*), j'ai eu l'occasion, à propos de mes recherches sur les fonctions à croissance régulière, de démontrer que les fonctions entières de la forme

$$e^{P(z)},$$

P(z) désignant un polynome, jouissent de la propriété suivante :

L'ensemble (A) *des points de la circonférence de rayon r, qui satisfont à l'inégalité*

$$|e^{P(z)}| > e^{qr^{\rho-\epsilon}}$$

est équivalent à l'ensemble (a) *des points, qui satisfont à l'inégalité*

$$|e^{P(z)}| < e^{-qr^{\rho-1}},$$

ρ *désignant le degré du polynome* P(z) *et* q *un nombre positif fini.*

J'entends par là que, S *désignant la mesure de l'ensemble* (A) *et* s *celle de l'ensemble* (a), *le rapport* S : s *tend vers l'unité, lorsque* r *croît indéfiniment.*

Je propose d'étendre ce théorème, si c'est possible, à toutes les fonctions entières d'ordre fini. A-t-on fait des recherches dans cette voie? Un tel résultat aurait un intérêt visible et entraînerait de nombreuses applications.

RÉMOUNDOS.

2956. [J2e] Dans les levés topographiques, on accorde une tolérance de e par mètre; autrement dit, on accepte un triangle ABC dont les côtés théoriques a, b et c ont pour mesures effectives des valeurs respectivement comprises entre

$$a(1-e) \quad \text{et} \quad a(1+e),$$
$$b(1-e) \quad \text{et} \quad b(1+e),$$
$$c(1-e) \quad \text{et} \quad c(1+e).$$

Quelle est, en fonction de e ou en fonction du degré, la tolérance accordée *ipso facto* aux angles A, B et C?

G. LEMAIRE.

2957. [J2e] Il est d'usage, dans les calculs géodésiques, de répartir *également* l'erreur totale commise dans la mesure des trois angles d'un triangle.

Serait-il moins judicieux et moins exact, surtout quand il s'agit d'angles très aigus ou très obtus, d'établir une répartition *proportionnelle?*

Exemple :

Angles mesurés.....	A = 140°	B = 29°	C = 14°
Compens. égale.....	A = 139°	B = 28°	C = 13°
Compens. proport...	A = 137°,7	B = 28°,5	C = 13°,8

G. Lemaire.

2958. [**J2e**] Si les questions d'instruments et de méthodes sont généralement bien étudiées dans les Ouvrages de topographie, les questions de calcul, au contraire, sont rarement approfondies.

J'entreprendrais donc volontiers une théorie des coordonnées rectilignes appliquées à la topographie. Mais je serais heureux des conseils, notes, solutions, etc. qu'on voudrait bien m'adresser ou me signaler.

(Il s'agirait, si j'ose m'exprimer ainsi, d'écrire une Mathématique rigoureuse et complète à l'usage des opérateurs qui n'ont que faire des traités trop savants ou trop élémentaires.)

G. Lemaire.

2959. [**V7**] Un correspondant pourrait-il me donner la bibliographie des études faites sur les travaux scientifiques de Pascal?

Carevyge.

2960. [**V4b**] Un correspondant pourrait-il donner quelques renseignements au sujet des *Tables des* 8 *cova du prince philosophe Fohi*, dont l'explication aurait été donnée par le P. Bouvet, missionnaire en Chine, et correspondant de Leibniz.

G. Lemaire.

RÉPONSES.

687. (**1895**, 1905) (*Anonyme*). — *Formule approchée du périmètre de l'ellipse* (**1896**, 7, 137, 234; **1897**, 64, 202; **1900**, 409; **1902**, 239; **1903**, 281; **1904**, 193; **1905**, 151). — Parmi les nombreuses formules qui ont été données dans ces numéros, je ne vois pas figurer la suivante, que je retrouve dans mes Notes, et que je crois due à M. Hoüel,

$$\text{D (développement du quadrant)} \\ = \frac{\pi}{2}\,\frac{a+b}{2}\left\{\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right]^2+\frac{1}{256}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6\right\}.$$

Le maximum de l'erreur commise se produit pour $b=0$; elle est de $\frac{1}{243}$ environ pour ce cas. Elle n'est déjà plus que de $\frac{1}{2500}$ environ pour $\frac{b}{a}=0,2$. Au delà, elle devient insignifiante, et elle est rigoureusement nulle pour $b=a$.

Cette formule est donc remarquablement précise.

DUJARDIN.

795. (**1896**, 78; **1905**, 121) (ENESTRÖM). — *Sur la quadrature du cercle.* — Ces deux assertions de Larousse sont dénuées de tout fondement historique sérieux. BOSMANS.

1293. (**1898**, 124; **1905**, 102) (*Hadé*). — *Aire commune à un cercle et à une ellipse* (**1899**, 17). — Les équations de l'ellipse et du cercle sont, en coordonnées cartésiennes,

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0, \qquad x^2+y^2-r^2=0.$$

Elles s'écrivent, en coordonnées polaires,

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}, \qquad \rho^2=r^2.$$

L'angle θ_1 correspondant à l'un des points d'intersection des deux courbes est donné par l'équation

$$r^2(b^2\cos^2\theta_1 + a^2\sin^2\theta_1) = a^2b^2.$$

D'où

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang}\theta_1 = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-r^2}{r^2-b^2}}.$$

Le quart de l'aire U demandée se compose d'un secteur circulaire de rayon r et d'angle θ_1, et d'un secteur elliptique compris entre $\theta = \theta_1$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

On a donc ainsi

$$\frac{U}{4} = \frac{r^2\theta_1}{2} + \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2b^2\,d\theta}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}.$$

Or, on sait que

$$\int \frac{d\theta}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tang}\theta\right).$$

Il en résulte

$$\int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} = \frac{1}{ab}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tang}\theta_1\right)\right].$$

Donc

$$U = \pi ab + 2r^2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-r^2}{r^2-b^2}}\right) - 2ab\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{a^2-r^2}{r^2-b^2}}.$$

E.-N. Barisien.

La corde commune à l'ellipse et au cercle, du côté des x positifs, a pour équation

$$X = a\sqrt{\frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}}.$$

La partie de l'aire comprise dans le premier quadrant se compose :

1° D'une portion d'ellipse

$$A_E = \int_0^X y\,dx, \qquad \text{où} \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};$$

or

$$A_E = \int_0^X \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{2a}\left(X\sqrt{a^2 - X^2} + a^2 \arc\sin\frac{X}{a}\right).$$

2° D'un demi-segment de cercle

$$A_C = \int_X^r y\, dx, \qquad \text{où} \qquad y = \sqrt{r^2 - x^2};$$

or

$$A_C = \int_X^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{1}{2}\left(X\sqrt{r^2 - X^2} + r^2 \arc\sin\frac{X}{r}\right).$$

Ajoutant la valeur de A_E et A_C, en tenant compte de celle de X, on trouve

$$A_E + A_C = \frac{\pi r^2}{4} + \frac{1}{2}\left(ab \arc\sin\frac{X}{a} - r^2 \arc\sin\frac{X}{r}\right).$$

L'aire cherchée est égale au quadruple de cette expression, c'est-à-dire à

$$\pi r^2 + 2\left(ab \arc\sin\frac{X}{a} - r^2 \arc\sin\frac{X}{r}\right)$$

ou

$$\pi r^2 + 2\left(ab \arc\sin\sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}} - r^2 \arc\sin\frac{a}{r}\sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}}\right).$$

Michel.

On établit dans les traités de Calcul intégral que l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{\sin mz \sin nz}{z^2}\, dz$$

a pour valeur le produit par $\frac{\pi}{2}$ du plus petit des nombres m, n : par suite, l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\infty \frac{\sin r^2 z \sin \dfrac{a^2 b^2 z}{a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega}}{z^2}\, dz$$

est formellement une expression exacte de l'aire du cercle

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

comprise à l'intérieur de l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Quant à la valeur de l'aire et, par conséquent, de l'intégrale considérée, elle résulte de considérations géométriques faciles. En posant

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{c}, \qquad \cos\omega = \frac{a\sqrt{r^2 - b^2}}{rc},$$

elle s'écrira

$$2(ab\theta + r^2\omega),$$

se réduisant bien, comme il le faut, à l'aire de l'ellipse, πab, pour $r = a$, et à celle du cercle construit sur le petit axe comme diamètre, πb^2, pour $r = b$. *E.-A. Majol.*

1749. (**1900**, 46) (*Crut*). — *Étude des cubiques*

$$y = Kx\sqrt{\frac{\lambda x + a}{\mu x + b}},$$

$$y = A\sqrt{\frac{\lambda x + a}{\mu x + b}}.$$

— Nous pensons que les éléments de cette étude pourront se trouver dans l'Ouvrage de M. F. Dumont, récemment paru : *Introduction à la Géométrie du troisième ordre.* Annecy, 1904.

La Rédaction.

1771. (**1900**, 79) (E.-N. Barisien). — *Étude des cubiques*

$$x(x^2 + Ky^2) = ax^2 + by^2.$$

— Même observation que pour la question **1749**, *voir* ci-dessus.

La Rédaction.

2402. (**1902**, 205) (Petrovitch). — *Formule sommatoire d'Abel* (**1905**, 39, 154). — La formule d'Abel

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) + \ldots \\ &\quad = \frac{1}{2}\varphi(0) + 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\,\frac{\varphi(ti) - \varphi(-ti)}{2i}\end{aligned}\right.$$

est la conséquence d'une formule de Cauchy :

$$(2) \qquad -\frac{\pi}{2}\varphi(n) = \int_0^\infty \frac{t\,dt}{n^2+t^2}\,\frac{\varphi(ti)-\varphi(-ti)}{2i}$$

et pour $n = 0$

$$-\frac{\pi}{2}\varphi(0) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\,\frac{\varphi(ti)-\varphi(-ti)}{2i}.$$

Il suffit de multiplier (2) par $\cos(n\pi)$, de sommer de $n=1$ à $n=\infty$ et de remarquer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t\cos(n\pi)}{n^2+t^2} = -\frac{1}{2t} + \pi\frac{1}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}$$

pour tirer de la formule de Cauchy la formule (1) d'Abel qui est, par conséquent, valable sous les mêmes restrictions : c'est-à-dire que $\varphi(x)$ doit rester *finie* et *continue* dans toute la partie du plan située à droite de l'axe complexe, ainsi que sur cet axe.

V. Williot.

Une réponse satisfaisante vient d'être donnée dans le Chapitre III du *Calcul des résidus* (Gauthier-Villars, Paris, 1905) de M. Lindelöf.

Petrovitch.

2593. (**1903**, 149) (J. Amodeo). — *Sur le mathématicien Jourdan* (**1903**, 272; **1904**, 219; **1905**, 158). — Un jeune Napolitain Giordano di Ottajano n'a jamais existé. L'auteur du Mémoire : *Risoluzioni di alcuni difficilissimi Geometrici problemi,* dans lequel le soi-disant problème d'Ottajano a été traité, s'appelait *Annibale Giordano.* Il est né à Ottajano, ville assez importante, voisine du Vésuve. On peut consulter, à ce sujet, l'étude de M. J.-M. Brückner : *Das Ottajano'sche Problem* (Zwickau, 1892) et *Z. S.,* t. XXXVII, p. 216-217 (Leipzig, 1892).

M. Cantor.

2782. (**1904**, 117) (E. Weber). — *Propriété du centre de la conique des pieds des médianes et des symédianes.* — Cette propriété et plusieurs autres se trouvent exposées dans une intéressante Notice de M. E. Weber, intitulée : *Sur quelques coniques associées au triangle* (*M.,* 1905, p. 148-151, 170-174).

La Rédaction.

2827. (**1904**, 139) (E.-N. Barisien). — *Lieu des centres des cercles tangents à une conique donnée et qui passent par un point fixe* (**1904**, 303; **1905**, 60). — Appelons x, y les coordonnées du centre du cercle; $a\cos\varphi$ et $b\sin\varphi$ celles d'un point de l'ellipse; R le rayon du cercle.

En posant $\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = A$ les équations du problème seront

$$\frac{y - b\sin\varphi}{\frac{a\sin\varphi}{A}} = \frac{x - a\cos\varphi}{\frac{b\cos\varphi}{A}} = R,$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Tirant x et y de la première et portant dans la seconde, il vient

$$\frac{2R}{A}(ab - bx_0\cos\varphi - ay_0\sin\varphi)$$
$$+ (a\cos\varphi - x_0)^2 + (b\sin\varphi - y_0)^2 = 0.$$

On a, par suite, les équations suivantes :

$$x = a\cos\varphi + \frac{1}{2}b\cos\varphi\frac{(a\cos\varphi - x_0)^2 + (b\sin\varphi - y_0)^2}{bx_0\cos\varphi + ay_0\sin\varphi - ab},$$

$$y = b\sin\varphi + \frac{1}{2}a\sin\varphi\frac{(a\cos\varphi - x_0)^2 + (b\sin\varphi - y_0)^2}{bx_0\cos\varphi + ay_0\sin\varphi - ab}.$$

Mathieu.

2850. (**1905**, 283) (E.-N. Barisien). — *Intégrales définies* (**1905**, 86). — 1° On a identiquement

$$\frac{1}{(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^2(C\sin^2\theta + D\cos^2\theta)}$$
$$= \frac{m\cos^2\theta + n\sin^2\theta}{(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^2} + \frac{p}{C\sin^2\theta + D\cos^2\theta}$$

avec

$$m = \frac{1}{D} + \frac{B^2(D - C)^2}{D(AD - BC)^2},$$

$$n = \frac{1}{C} + \frac{A^2(D - C)^2}{C(AD - BC)^2},$$

$$p = \frac{(D - C)^2}{(AD - BC)^2}.$$

La dernière intégrale est immédiate :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p\,d\theta}{C\sin^2\theta + D\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{p}{D}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{C}{D}\,\text{tang}^2\theta + 1} = \frac{p}{\sqrt{CD}}\left(\text{arc tang}\sqrt{\frac{C}{D}}\,\text{tang}\,\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{p}{\sqrt{CD}}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

On a de même

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A\sin^2\theta + B\cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{AB}}\left(l\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Différentions par rapport à A, puis par rapport à B :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\,d\theta}{(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^2} = \frac{1}{2}\left(l\pi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{A\sqrt{AB}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\,d\theta}{(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^2} = \frac{1}{2}\left(l\pi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{B\sqrt{AB}},$$

et en les combinant,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(m\cos^2\theta + n\sin^2\theta)\,d\theta}{(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^2} = \frac{1}{2}\left(l\pi + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{n}{A} + \frac{m}{B}\right)\frac{1}{\sqrt{AB}}.$$

2° On a identiquement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta}{(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^2\,(C\sin^2\theta + D\cos^2\theta)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(m\cos^2\theta + n\sin^2\theta)\,d\theta}{(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p}{C\sin^2\theta + D\cos^2\theta}$$

avec

$$m = \frac{CB^2}{(BC - AD)^2}, \qquad n = \frac{A^2D}{(BC - AD)^2}, \qquad p = \frac{DC}{(BC - AD)^2}.$$

3° On a identiquement, posant $\operatorname{tang}\theta = z$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\, d\theta}{(\mathrm{A}\sin^2\theta + \mathrm{B}\cos^2\theta)^2(\mathrm{C}\sin^2\theta + \mathrm{D}\cos^2\theta)}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{z^4\, dz}{(\mathrm{A}z^2 + \mathrm{B})^2(\mathrm{C}z^2 + \mathrm{D})(1 + z^2)^2},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^4\, dz}{(\mathrm{A}z^2 + \mathrm{B})^2(\mathrm{C}z^2 + \mathrm{D})(1 + z^2)^2}$$

$$= \frac{-\mathrm{AB}[2\mathrm{A}^2\mathrm{D} - \mathrm{BC}(\mathrm{A}+\mathrm{B})]}{(\mathrm{AD}-\mathrm{BC})^2(\mathrm{A}-\mathrm{B})^3}\int_0^{\infty}\frac{dz}{\mathrm{A}z^2+\mathrm{B}}$$

$$+ \frac{\mathrm{B}^2}{(\mathrm{AD}-\mathrm{BC})(\mathrm{A}-\mathrm{B})}\int_0^{\infty}\frac{dz}{(\mathrm{A}z^2+\mathrm{B})^2}$$

$$+ \frac{\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2}{(\mathrm{AD}-\mathrm{BC})^2(\mathrm{C}-\mathrm{D})^2}\int_0^{\infty}\frac{dz}{\mathrm{C}z^2+\mathrm{D}}$$

$$+ \frac{\mathrm{BC}-2\mathrm{BD}+\mathrm{AC}}{(\mathrm{B}-\mathrm{A})^3(\mathrm{D}-\mathrm{C})^2}\int_0^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}$$

$$+ \frac{1}{(\mathrm{B}-\mathrm{A})^2(\mathrm{D}-\mathrm{C})}\int_0^{\infty}\frac{dz}{(1+z^2)^2}$$

$$= \frac{-[2\mathrm{A}^2\mathrm{D} - \mathrm{BC}(\mathrm{A}+\mathrm{B})]\sqrt{\mathrm{AB}}}{(\mathrm{AD}-\mathrm{BC})^2(\mathrm{A}-\mathrm{B})^3}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{\mathrm{B}}{2(\mathrm{AD}-\mathrm{BC})(\mathrm{A}-\mathrm{B})\sqrt{\mathrm{AB}}}\left(k'\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{\mathrm{CD}\sqrt{\mathrm{CD}}}{(\mathrm{AD}-\mathrm{BC})^2(\mathrm{C}-\mathrm{D})^2}\left(k''\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{\mathrm{BC}-2\mathrm{BD}+\mathrm{AC}}{(\mathrm{B}-\mathrm{A})^3(\mathrm{D}-\mathrm{C})^2}\left(k'''\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2(\mathrm{B}-\mathrm{A})^2(\mathrm{D}-\mathrm{C})}\left(k^{\mathrm{iv}}\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

MATHIEU.

2853. (**1904**, 283) (G. LORIA). — *Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que les expressions*

$$y = \varphi(x)\int \frac{dx}{\varphi_1(x)\displaystyle\int \frac{dx}{\varphi_2(x)\dots}}$$

et

$$z = \cfrac{\varphi(x)}{\cfrac{d}{dx}\left\{\cfrac{\varphi_1(x)}{\cfrac{d}{dx}\left[\cfrac{\varphi_2(x)}{\cfrac{d}{dx\ldots}}\right]}\right\}}$$

aient des significations déterminées. — Sans aborder la question générale posée par M. Loria, je me borne à traiter un cas particulier où il est bien facile de trouver la valeur limite des expressions précédentes : c'est le cas où $\varphi(x) = \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \ldots.$ En effet, on a alors

$$y = \varphi(x)\int \cfrac{dx}{\varphi(x)\displaystyle\int \cfrac{dx}{\varphi(x)\ldots}}, \qquad z = \cfrac{\varphi(x)}{\cfrac{d}{dx}\left\{\cfrac{\varphi(x)}{\cfrac{d}{dx}\left[\cfrac{\varphi(x)}{\cfrac{d}{dx\ldots}}\right]}\right\}},$$

qui peuvent être écrites

$$(1) \qquad y = \varphi(x)\int \frac{dx}{y},$$

$$(2) \qquad z = \frac{\varphi(x)}{\frac{dz}{dx}}.$$

De la formule (1) on tire

$$\frac{d}{dx}\frac{y}{\varphi(x)} = \frac{1}{y} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\varphi(x)}\right)^2 = \frac{2}{\varphi(x)},$$

c'est-à-dire

$$y = \varphi(x)\sqrt{2\int \frac{dx}{\varphi(x)}}.$$

De la formule (2) on tire

$$\frac{1}{2}\frac{d(z^2)}{dx} = \varphi(x)$$

ou bien

$$z = \sqrt{2\int \varphi(x)\,dx}.$$

T. Boggio.

2860. (**1905**, 6) (E.-N. Barisien). — *Polygones inscrits et circonscrits à deux ellipses* (**1905**, 119). — Rapportons une des ellipses à ses axes et choisissons sur cette courbe deux points $M_1(\varphi_1)$ et $M_2(\varphi_2)$. La droite qui les joint a pour équation

$$bx\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+ay\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}-ab\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}=0.$$

Exprimons qu'elle est tangente à la seconde ellipse

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Il vient

$$\begin{aligned}a^2(D^2-AF)\sin^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}&+b^2(E^2-CF)\cos^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\\&+2ab(BF-ED)\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\\&+2a^2b(BD-AE)\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\\&+2ab^2(EB-DC)\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\\&\qquad+a^2b^2(B^2-AC)\cos^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}=0.\end{aligned}$$

En posant :

$$\text{tang}\frac{\varphi_1}{2}=x_1,\qquad \text{tang}\frac{\varphi_2}{2}=x_2,$$

$$\begin{aligned}\alpha&=b^2(E^2-CF)-2ab^2(EB-DC)+a^2b^2(B^2-AC),\\ \beta&=-2ab(BF-ED)+2a^2b(BD-AE),\\ \gamma&=a^2(D^2-AF),\\ \delta&=-2b^2(E^2-CF)+2a^2b^2(B^2-AC),\\ \varepsilon&=2ab(BF-ED)+2a^2b(BD-AE),\\ \pi&=b^2(E^2-CF)+2ab^2(EB-DC)+a^2b^2(B^2-AC),\end{aligned}$$

elle se transforme en la relation suivante :

$$\begin{aligned}\alpha x_1^2x_2^2&+\beta x_1x_2(x_1+x_2)\\&+\gamma(x_1+x_2)^2+\delta x_1x_2+\varepsilon(x_1+x_2)+\pi=0.\end{aligned}$$

Chaque côté du polygone donnera une relation semblable. On aura donc en tout n relations entre n inconnues $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Si l'on élimine $n-1$ de ces quantités, la relation restante, qui ne contiendra plus qu'une des quantités x, devra être identiquement nulle

si l'on veut qu'il y ait une infinité de polygones inscrits à l'une des coniques et circonscrits à l'autre. En conduisant l'élimination de façon à supprimer le facteur

$$\alpha x_1^4 + 2\beta x_1^3 + 4\gamma x_1^2 + \delta x_1^2 + 2\varepsilon x_1 + \pi$$

qui ne convient qu'au cas où les valeurs des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont toutes égales, l'équation finale en x_1 se réduit à son terme constant. En l'égalant à zéro, on a la relation cherchée.

Dans le cas du triangle, cette relation est

$$\alpha\pi - \varepsilon\beta + \gamma(\gamma + \delta) = 0.$$

Dans le cas du quadrilatère :

$$\pi(\beta^2 - 2\alpha\gamma - \alpha\delta) - \varepsilon(\beta\gamma - \alpha\varepsilon) + \gamma(2\gamma^2 + \gamma\delta - \varepsilon\beta) = 0.$$

Dans ce dernier cas, si les deux ellipses se réduisent à des cercles, on a entre les rayons et la distance des centres la relation

$$(d^2 - R^2)^2 - 2r^2(d^2 + R^2) = 0.$$

Mathieu (Saïgon).

2879. (1905, 27) (*Belga*). — *Division approchée d'un arc en n parties égales.* — On trouve des indications sur ce sujet dans *A. Gr.*, 3e série, t. IV, 1903, p. 128-133; A. Schœler, *Angenäherte n-Theilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal;* E. Lampe, *Bemerkungen über einige angenäherte n-Theilungen von Winkeln.*

T. Hayashi (Tokio).

2898. (1905, 74) (*Quemquæris*). — *Équations différentielles des courbes algébriques.* — L'équation différentielle des courbes d'ordre n est donnée par : G. Halphen, *Thèse sur les invariants différentiels* (Paris, 1878); J.-J. Sylvester (Paris, *C. R.*, t. CIII, 1886, p. 408; *Nature* (t. XXXIV, 1886, p. 365); *American Journal of Math.* (t. IX, 1887, p. 345); M. Philippoff (*Dissertation,* Heidelberg, 1892).

Dans la *Thèse* de Halphen on étudie en particulier le cas de $n = 3$.

Berzolari (Pavie).

Voir : H. Laurent, *Équation différentielle des courbes du troisième ordre* (avec généralisation) (*N. A.*, 1905, p. 211-213).

L'équation demandée est aisée à établir sous forme de déterminant.

La Rédaction.

2907. (**1905**, 103) (La Rédaction). — Nous prions nos Collaborateurs non résidents à Paris de vouloir bien nous signaler les monuments élevés à la mémoire de savants français (particulièrement de mathématiciens) dans les localités de leur région, ou qu'ils ont remarqués dans celles qu'ils ont habitées, visitées ou traversées.

Nous pensons que ce petit plébiscite facilitera la statistique proposée dans la question **2907**. La Rédaction.

2909. (**1905**, 103) (Berdellé). — *Systèmes de numération.* — Voici les renseignements historiques et bibliographiques donnés par le *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique de Saverien* (Paris, Rollin et Jambert, 1753) :

« I. Si l'on veut savoir le but et la fin de l'arithmétique binaire, je répondrai, après M. de Lagni, qu'elle est d'un grand usage pour rectifier les logarithmes; après M. d'Angicourt, qu'elle sert à découvrir les lois des progressions, et cela par la raison qu'on n'y emploie que deux caractères; et, après M. Leibnitz, je rapporterai une histoire courte qui la rendra peut-être plus recommandable.

» Dans le temps que M. Leibnitz cherchait l'utilité de l'arithmétique binaire dont il est l'inventeur, il apprit qu'elle renfermait le sens d'une énigme chinoise laissée depuis plus de 400 ans par l'empereur Fohi, fondateur et des Sciences de la Chine et de cet Empire. Depuis 1000 ans qu'on cherchait à deviner ce sens, on avait désespéré d'y parvenir, et en conséquence on n'y avait plus pensé. Il fallait que la chose fût difficile. Les Chinois sont intelligents et âpres au travail. Ce travail était même soutenu par un avantage réel, puisqu'on savait que, cette énigme développée, ils recouvreraient la clef de leur ancienne Science. L'arithmétique binaire de M. Leibnitz coupa le nœud gordien et, si l'on aime mieux, le défit. Le P. Bouvet, missionnaire dans la Chine, à qui M. Leibnitz l'avait communiquée, expliqua par son moyen les Tables des 8 cova du prince philosophe Fohi, et crut qu'on pouvait se flatter de trouver jour à l'origine de l'écriture chinoise. Sur une si agréable nouvelle, dont le missionnaire ne tarda pas à faire part à l'auteur de la nouvelle arithmétique, celui-ci se détermina à la communiquer au public (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1703). Je ne connais pas d'autres savants qui aient écrit sur l'arithmétique binaire, que ceux que j'ai cités. La vérité m'oblige d'ajouter que M. de Lagni, sans connaître l'arithmétique binaire de M. Leibnitz, en avait imaginé une semblable.

» II. M. Weigel, professeur en Mathématique à Genève, est l'inventeur de l'arithmétique tétractique, qu'il a donnée dans son *Aretologistica sive Logistica virtutum genitrix*, écrite en allemand et publiée à Nuremberg l'an 1687 (in-8°). Cependant elle ne saurait servir ni dans la vie commune, où nous sommes accoutumés de compter jusqu'à dix, ni dans les Sciences, où l'arithmétique binaire lui disputerait le pas, puisqu'elle découvre mieux la loi des progressions des nombres. Toutes ces raisons lui ont nui auprès des mathématiciens qui ne lui ont pas fait un grand accueil. (*Voir* encore la dissertation de Weidler, intitulée : *De prestantia arithmeticæ decadicæ qua tetracticam et dyadicam antecellit.*) »

G. Lemaire.

2910. (**1905**, 103) (T. Lemoyne). — *Propriété de la strophoïde.* — Dans ma réponse à diverses questions de M. T. Lemoyne, relatives aux cubiques planes (**1904**, 174), j'ai indiqué une construction du foyer double (ou singulier) valable pour toutes les cubiques circulaires, nodales ou non nodales. Lorsqu'on se limite au premier cas, cette construction, déjà fort simple, peut se ramener à une autre, plus simple encore, qui consiste à prendre le centre du cercle circonscrit au triangle formé par l'asymptote et par les tangentes au point double, à tirer le rayon aboutissant au point double et à le prolonger d'une longueur égale ([1]). Cela étant, on voit que le foyer singulier, extérieur à la courbe lorsque l'angle des tangentes au point double est moindre qu'un droit, intérieur dans le cas contraire, vient s'y placer lorsque l'angle est droit, c'est-à-dire dans le cas de la strophoïde.

([1]) On arrive aussi directement que possible à cette conséquence en partant de la description générale des cubiques nodales circulaires que j'ai eu antérieurement l'occasion de signaler dans l'*Intermédiaire* (sans pouvoir donner ici une référence précise, n'ayant en ce moment à ma disposition que les années postérieures à 1900), savoir :

Par un point O (*le point double*) *pris sur un cercle coupant aux points* A, B *une droite donnée* (*l'asymptote*) *mener un vecteur rencontrant le cercle en* M *et la droite* $\overline{AB}$ *en* N *et prendre sur* $\overline{NO}$, *dans le sens opposé à* $\overline{OM}$, *une longueur égale* $\overline{Nm}$.

Cette description, lorsqu'on la combine avec la construction de la tangente indiquée dans la *Géométrie analytique* de M. de Longchamps, renferme toute la théorie de cette espèce particulière de courbes.

Si la strophoïde est la seule cubique nodale circulaire qui contienne son foyer double, cette circonstance peut se trouver réalisée à l'égard d'une infinité de cubiques circulaires. Par exemple, en menant par un point arbitrairement choisi, O, une droite quelconque $\overline{OMN}$ et la coupant par un cercle assujetti à passer par deux points fixes, A et B, en l'un desquels, A, si l'on veut, la tangente doit être parallèle à $\overline{OMN}$, on obtient deux points M, N, dont le lieu est une cubique circulaire à laquelle appartiennent les points O, A, B, et pour laquelle le point A est le foyer double. E. Malo.

2911. (**1905**, 104) (E. Maillet). — *Sur l'interprétation de l'article* 758 *du Code civil.* — Dans les *Exercices d'Arithmétique*, par Fitz-Patrick et A. Chevreuil (p. 335), il y a une interprétation très détaillée de l'article 757 du Code civil qui est ainsi conçu :

« Le droit de l'enfant naturel sur les biens de ses père ou mère décédés est réglé ainsi qu'il suit : Si le père ou la mère a laissé des descendants légitimes ce droit est d'un tiers de la portion héréditaire que l'enfant naturel aurait eue s'il eût été légitime. »

Probablement le Code civil a changé depuis 1876, et c'est justement cette question que M. Maillet désire interpréter, alors il pourra en tirer les solutions justes, en faisant de petits changements dans les résultats. Il y a même à la page 343 un Tableau qui montre la part de 1, 2, 3, 4, 5, 6 enfants naturels. N. Plakhowo.

2914. (**1905**, 106) (Paulmier). — *Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde.* — Une construction très simple des points d'intersection est indiquée dans le *Traité de Géométrie descriptive* de E. Lebon (IIe Volume, p. 313); il n'y est fait usage ni de rotation, ni de rabattement. F. Michel.

On peut voir les *Exercices de Géométrie descriptive*, par F. J., p. 582, n° 979 (Mame et Poussielgue, éditeurs). *Gem.*

2921. (**1905**, 127) (E.-N. Barisien). — *Lieu des sommets des coniques bitangentes à deux cercles donnés.* — Les cercles bitangents à une conique étant répartis en deux systèmes, selon que leurs centres appartiennent au grand axe ou au petit axe, le lieu cherché est différent selon que, par rapport à la conique variable, les deux cercles donnés sont d'un même système ou de deux systèmes

différents; mais dans l'un comme dans l'autre cas la détermination en est facile.

Pour l'effectuer il suffit, considérant la conique à centre

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

de chercher, pour chaque cercle bitangent, la relation qui existe entre le rayon et l'abscisse (ou l'ordonnée) du centre. On trouve pour les cercles du premier système (rayon = R, abscisse = ξ)

$$b^2\xi^2 - c^2(b^2 - R^2) = 0,$$

et pour ceux du second système (rayon = R', ordonnée = η),

$$a^2y^2 - c^2(R'^2 - a^2) = 0.$$

Cela posé, soient

$$0 = x^2 + y^2 - R^2$$

et

$$0 = x^2 + y^2 - 2Sx + S^2 - R'^2$$

les équations des cercles donnés. Si on les considère comme étant d'un même système, du premier par exemple, on aura les équations simultanées

$$b^2\xi^2 - c^2(b^2 - R^2) = 0,$$
$$b^2(\xi - S)^2 - c^2(b^2 - R'^2) = 0,$$

entre lesquelles il s'agit simplement d'éliminer a^2, c'est-à-dire c^2, ce qui donne (en changeant ξ en x et b en y)

$$x^2(y^2 - R'^2) - (x - S)^2(y^2 - R^2) = 0,$$

et, bien que cette équation soit formellement du quatrième ordre, elle se réduit aussitôt au troisième par l'annulation des termes en x^2y^2.

Au contraire, si l'on considère les cercles comme étant de systèmes différents, on mènera par l'origine O une droite quelconque faisant un angle ω avec l'axe des x, et par le centre du second cercle une perpendiculaire à cette droite : l'intersection de ces droites étant le centre d'une certaine conique bitangente à chacun des cercles, on aura

$$\xi = S\cos\omega, \qquad \eta = S\sin\omega,$$
$$b^2S^2\cos^2\omega - (a^2 - b^2)(b^2 - R^2) = 0,$$
$$a^2S^2\sin^2\omega - (a^2 - b^2)(R'^2 - a^2) = 0,$$

et entre les deux dernières équations il s'agit d'éliminer a ou b. Si

c'est b qu'on élimine on arrive à la relation

$$(a^2 - R^2 \sin^2\omega - R'^2 \cos^2\omega)(a^2 - R'^2) + (a^2 - R'^2 \cos^2\omega) S^2 \sin\omega = 0;$$

et en remplaçant a par $\rho - S\cos\omega$ on a l'équation en coordonnées polaires de la courbe cherchée, qui est du huitième ordre et qui n'admet aucun point à l'infini en dehors des points cycliques.

En éliminant a, ce qui conduit à l'égalité

$$(b^2 - R^2 \sin^2\omega - R'^2 \cos^2\omega)(b^2 - R^2) + (b^2 - R^2 \sin^2\omega) S^2 \cos^2\omega = 0.$$

on poserait

$$ib = (x + iy)e^{-i\omega} - S\cos\omega,$$

et l'on obtiendrait deux équations en x, y, entre lesquelles il resterait à éliminer ω.

E.-A. Majol.

La question peut être résolue très aisément par la méthode suivante :

Soient

$$C = x^2 + y^2 + 2Dx + f = 0,$$
$$c = x^2 + y^2 + 2dx + f = 0$$

les équations des cercles rapportés à leur ligne des centres et à leur axe radical.

Premier cas (cordes de contact parallèles). — En posant

$$\lambda(x^2 + y^2 + 2Dx + f) + (x - H)^2 = 0,$$
$$\mu(x^2 + y^2 + 2dx + f) + (x - h)^2 = 0,$$

l'identification de ces deux équations donne

$$\lambda = \mu = \frac{H - h}{D - d} \qquad (h = \pm H).$$

En éliminant H avec les équations des axes, on obtient, pour le lieu des sommets :

1° La ligne des centres;

2° Une infinité de couples de droites coïncidantes, perpendiculaires à la ligne des centres;

3° Une cubique jouissant des propriétés indiquées par M. Barisien.

Second cas (cordes de contact rectangulaires). — On pose

$$\lambda(x^2+y^2+2Dx+p^2)+[y-m(x-H)]^2=0,$$
$$\mu(x^2+y^2+2dx+p^2)+(my+x-h)^2 \quad =0.$$

Ici le carré p^2 est substitué à f, parce que l'on reconnaît promptement, à l'identification, que la conique ne peut être réelle pour des valeurs négatives de f. Il est donc nécessaire, pour que le problème soit possible, que les cercles donnés soient extérieurs ou intérieurs, même tangents, mais non sécants.

En identifiant ces équations, on trouve

$$\lambda=\frac{(d\pm p)(1+m^2)}{D-d}, \qquad \mu=-\frac{(D\pm p)(1+m^2)}{D-d}$$
$$(H=h;\ h=\pm p).$$

On a donc deux systèmes différents, suivant qu'on prend $h=+p$ ou $h=-p$.

Dans chacun de ces systèmes, tous les groupes de cordes rectangulaires ont leur centre au même point de la ligne des centres ($y=0$, $x=\pm p$).

m est la variable indépendante.

L'équation de la conique affecte l'une des deux formes identiques :

Pour $h=\pm p$,

$$\frac{d\pm p}{D-d}(x^2+y^2+2Dx+p^2)+[-m(x\mp p)+y]^2=0;$$

pour $h=\mp p$,

$$\frac{D\pm d}{D-d}(x^2+y^2+2dx+p^2)-[(x\mp p)^2+my]^2=0.$$

Les axes de la conique bitangente étant parallèles aux cordes de contact, et passant respectivement par les centres des cercles donnés, leurs équations sont connues immédiatement, et, en faisant usage, tour à tour, des équations identiques des coniques bitangentes, on trouve les quartiques suivantes, lieux des sommets appartenant deux à deux au même axe :

Premier système ($h=+p$),

$$[y^2+(x+d)^2]C+(D-d)(p+d)y^2=0,$$
$$[y^2+(x+D)^2]c-(D-d)(p+D)y^2=0.$$

Second système $(h = -p)$,

$$[y^2 + (x+d)^2]C + (D-d)(-p+d)y^2 = 0,$$
$$[y^2 + (x+D)^2]c - (D-d)(-p+D)y^2 = 0.$$

La question de M. Barisien conduit à constater une légère incorrection dans un Ouvrage qui fait autorité.

Salmon donne en effet (*Sections coniques*, Ch. XIV, p. 443; 2e édit.) l'équation *générale* des coniques ayant un double contact avec des coniques données, et étudie particulièrement le cas de deux cercles. Il donne, comme *équation générale*, la conique

$$\mu^2 - 2\mu(C+c) + (C-c)^2 = 0,$$

dans laquelle les cordes de contact avec C et c sont :

$$C - c + \mu = 0, \qquad C - c - \mu = 0$$

parallèles entre elles. C'est le premier cas considéré ci-dessus.

Mais son équation *n'est pas générale*, puisqu'il omet les coniques bitangentes à cordes de contact rectangulaires.

Il suffit d'ailleurs, pour les trouver, d'appliquer la méthode qu'il indique lui-même à l'article précédent (p. 442) et de tenir compte des autres couples de cordes communes aux deux cercles; ce sont, suivant nos notations, les droites

$$y^2 + (x-p)^2 = 0, \qquad y^2 + (x+p)^2 = 0,$$

dont les points réels sont

$$y = 0, \qquad x = \pm p.$$

Si l'on prend par exemple le système correspondant à $+p$, et qu'on donne à μ (de l'équation de Salmon) des valeurs $\dfrac{1 - m\sqrt{-1}}{1 + m\sqrt{-1}}$, on reproduit exactement, après quelques transformations, les équations données ci-dessus. De même pour $-p$. DUJARDIN.

Réponse analogue de M. MICHEL.

QUESTIONS.

853. [**V8**] (**1896**, 149) M. Marie, dans le Tome VII de l'Ouvrage : *Histoire des Sciences mathématiques et physiques* (Paris, Gauthier-Villars, 1885) signale (p. 215) que Montmort « a donné, le premier, la formule remarquable dont on se sert pour exprimer la somme de p termes d'une suite dont les différences finissent par s'annuler », c'est-à-dire la formule

$$S = pa + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta a + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^2 a + \ldots.$$

M. Marie ajoute que « la démonstration de cette formule a été insérée, en 1718, dans le Recueil publié par la Société Royale de Londres ».

Il me semble que cette indication n'est pas exacte; en effet, je n'ai pu trouver la formule mentionnée dans le Mémoire de Montmort : *De seriebus infinitis tractatus*, inséré aux *Philosophical Transactions*, 1717, n° 353, p. 633-675. En revanche, elle se trouve déjà dans l'Ouvrage de Montmort : *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (2e édit., p. 63-66, Paris, 1713).

D'autre part, la formule citée a été indiquée en 1718, par Goldbach, dans le Mémoire : *Specimen methodi ad summas serierum* (cf. *B. M.*, 1884, col. 15-16), et le cas spécial $\Delta^4 a = 0$ en est traité déjà par Jacques Bernoulli (voir *Ars conjectandi*. Basilæ, 1713, p. 98-99).

On demande une recherche critique sur l'invention de la formule ci-dessus mentionnée.

G. Eneström (Stockholm).

2961. **[L'16b]** Je désirerais une démonstration géométrique des deux théorèmes suivants :

Lorsqu'une conique variable est bitangente à deux cercles fixes, de façon que chacun de ses axes passe par un des centres des deux cercles :

1° *La conique reste semblable à elle-même;*

2° *Les cordes de contact passent par un point fixe de la ligne des centres des cercles.* MATHIEU.

2962. **[A1c]** Si l'on représente par S_p la somme des puissances p des n premiers nombres entiers, on a

$$4(s_1 + s_3) = n(n+1)\ (n^2 + n + 2),$$
$$6(s_3 + s_5) = n^2(n+1)^2\,(n^2 + n + 1),$$
$$8(s_5 + s_7) = n^3(n+1)^3\,(n^2 + n).$$

Ces relations sont-elles connues? G. LEMAIRE.

2963. **[J2e]** Pour déterminer l'intersection I de deux droites AB et CD, les arpenteurs procèdent par jalonnement et chaînage.

En général, ils se contentent de mesurer la distance du point *empirique* I à l'une des quatre extrémités A, B, C ou D; mais quelquefois ils mesurent les quatre distances IA, IB, IC et ID.

Quelle est, dans les deux hypothèses, la probabilité d'inexactitude théorique de cette méthode?

G. LEMAIRE.

2964. **[V]** Je désirerais connaître la date exacte de l'invention de la stadia et de la découverte de l'anallatisme. Quelques renseignements sur leurs auteurs respectifs, Green et Porro, seraient aussi bienvenus. G. LEMAIRE.

2965. **[I23aα]** L'une des deux racines α et β de l'équation

$$x^2 + bx = a$$

est donnée par la fraction continue

$$\alpha = \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{b + \cdots}}$$

dont les réduites sont égales à

$$\alpha_n = a\,\frac{P_{n-1}}{P_n}, \qquad \text{où} \qquad P_n = b\,P_{n-1} + a\,P_{n-2}$$

avec les valeurs initiales $P_{-1} = 0$, $P_0 = 1$, $P_1 = b$, ...

On peut facilement exprimer P_n par une fonction symétrique des racines α et β et l'on trouve :

1° *Cas de racines réelles*. — En posant

$$P_n = \frac{(-1)^n}{\beta - \alpha}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}),$$

on a

$$\alpha_n = \alpha\beta\,\frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}} = \frac{\alpha - \beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}.$$

Si donc α est en valeur absolue la plus petite racine, α_n tend vers α pour $n = \infty$ quels que soient a et b.

2° *Cas de racines imaginaires*. — En posant

$$\alpha = re^{\theta i}, \qquad \beta = re^{-\theta i},$$

on a

$$P_n = (-r)^n\,\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad \alpha_n = r\,\frac{\sin n\theta}{\sin(n+1)\theta}.$$

On en conclut que :

Si l'on peut trouver deux nombres entiers p et q premiers entre eux, tels que $\theta = \frac{p}{q}\pi$, la suite des réduites $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ admet la période q, et dans chacune de ces périodes il y a une valeur de la suite qui devient infinie.

Si le rapport $\frac{\theta}{\pi}$ est incommensurable, on pourra toujours trouver un nombre assez grand q tel que α_{n+q} et α_n diffèrent

d'aussi peu que l'on veut et qu'il y ait un terme de la suite compris entre les deux précédents qui tende vers l'infini.

Ces résultats sont-ils connus? H. Koechlin.

2966. [V8] Dans l'histoire de la Géométrie descriptive le *Traité de Stéréotomie* de Frégier occupe une place très importante, car il précède et prépare le célèbre Ouvrage de Monge. A l'aide de M. Brocard, il m'a été possible de consulter la première édition (1738) de cet Ouvrage. Or, quelque correspondant pourrait-il m'informer si les deux éditions suivantes en diffèrent beaucoup? Si je trouvais un exemplaire de la troisième édition (1769) je serais disposé à l'acheter. Gino Loria (Gênes).

2967. [D6cδ] La notation des nombres de Bernoulli varie d'un auteur à l'autre et M. d'Ocagne (¹) en indique six différentes sans en avoir épuisé la variété.

Si chaque auteur doit rester libre de sa notation, il n'en est pas moins désirable que les résultats de son étude soient, en définitive, traduits dans une notation unique adoptée à cet effet par les mathématiciens et à laquelle seraient réservés le nom de *nombre de Bernoulli* et le symbole B_n.

Le choix à faire entre les divers systèmes de notation ne peut être que l'œuvre d'un prochain congrès; mais il ne serait pas inutile qu'une discussion préalable fût ouverte à ce sujet dans l'*Intermédiaire*.

Si j'avais qualité pour émettre un avis à ce sujet, je pencherais pour donner la préférence à la notation de M. Cesáro, résultant du développement

$$\frac{x}{e^x-1} = e^{-Bx} = B_0 - B_1\frac{x}{1} + B_2\frac{x^2}{2!} - B_3\frac{x^3}{3!} + B_4\frac{x^4}{4!} - B_5\frac{x^5}{5!} + B_6\frac{x^6}{6!} - B_7\frac{x^7}{7!} + B_8\frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\left(B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0,\ B_8 = -\frac{1}{30}\right)$$

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1904, p. 30.

avec les relations symboliques

$$(B+1)^n - B^n = n, \qquad (B-1)^n - B_n = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, 5, \ldots).$$

La raison de cette préférence est que les nombres de Bernoulli ainsi définis *sont interpolés* par la branche réelle négative de la fonction holomorphe de Riemann

$$(s-1)\zeta(0) = B_{1-s} \qquad \text{pour} \qquad 1-s = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots.$$

V. Williot.

2968. [**R8a**α] Je désirerais savoir si les équations du mouvement relatif d'un solide autour d'un point fixe sont connues sous cette forme

$$A\frac{dp}{dt} + qr(C-B) = L - (C-B)q_1 r_1 + qr_1(A+B-C) - rq_1(A+C-B),$$

$$B\frac{dq}{dt} + rp(A-C) = M - (A-C)r_1 p_1 + rp_1(B+C-A) - pr_1(A+B-C),$$

$$C\frac{dr}{dt} + pq(B-A) = N - (B-A)p_1 q_1 + pq_1(A+C-B) - pq_1(B+C-A),$$

où

$$A = \Sigma m(y^2+z^2), \qquad B = \Sigma m(z^2+x^2), \qquad C = \Sigma m(x^2+y^2)$$

sont les moments d'inertie du corps par rapport aux axes mobiles Ox, Oy, Oz (liés aux corps); L, M, N sont les moments des forces données, par rapport aux axes mobiles; p, q, r sont les projections sur les axes mobiles de la rotation instantanée; p_1, q_1, r_1 les projections sur les mêmes axes des composantes de la rotation ω_1 autour d'un autre axe fixe.

Je trouve les équations du mouvement en appliquant le théorème des quantités de mouvement projetées :

$$\frac{da}{dt} + (Qc - Rb) = \Sigma x + Q,$$

$$\frac{db}{dt} + (Ra - Pc) = \Sigma y + Q_1,$$

$$\frac{dc}{dt} + (Pb - Qa) = \Sigma z + Q_2$$

et

$$a = \Sigma m(Qz - Ry), \qquad P = p + p_1,$$
$$b = \Sigma m(Rx - Pz), \qquad Q = q + q_1,$$
$$c = \Sigma m(Py - Qc), \qquad R = r + r_1.$$

Les angles d'Euler θ, φ, ψ, entre les axes fixes Ox_1, Oy_1, Oz_1 et les axes mobiles Ox, Oy, Oz liés au corps, sont donnés par les équations connues

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi,$$
$$q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi,$$
$$r = \psi' \cos\theta \qquad + \varphi'.$$

Stoïanvich (Belgrade).

2969. [I13f] Soit A un entier tel que les deux équations

$$x^2 - Ay^2 = 1, \qquad t^2 - Au^2 = -1$$

admettent des solutions entières et désignons ces solutions respectives par

$$1, \ x_1, \ x_2, \ \ldots; \qquad 0, \ y_1, \ y_2, \ \ldots;$$
$$t_1, \ t_2, \ \ldots; \qquad u_1, \ u_2, \ \ldots.$$

Démontrer que :

1° Si $\dfrac{x_{2n+1} - 1}{x_1 - 1} = \varphi(x_1)$, $\varphi(1) = (2n+1)^2$;

2° $\dfrac{x_{2n+1} - 1}{x_1 - 1} = \left(\dfrac{t_{n+1}}{t_1}\right)^2 =$ un entier;

3° $t_2 = (2x_1 + 1)t_1$, $u_2 = (2x_1 - 1)u_1$;

4° $x_{2n+1} = t_{n+1}^2 + Au_{n+1}^2$, $y_{2n+1} = 2t_{n+1}u_{n+1}$ ou

$$t_{n+1} = \sqrt{\frac{x_{2n+1} - 1}{2}}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{\frac{x_{2n+1} - 1}{2A}};$$

5° Si $t^2 - Au^2 = -1$ n'a pas de solutions, l'égalité (1°) subsiste; $\dfrac{x_{2n+1} - 1}{x_1 - 1}$ est un carré, quel que soit n, et les valeurs de sa racine carrée forment une série récurrente soumise à la même loi que x.

G. Ricalde (Mérida).

[Traduit de l'espagnol. (La Réd.)]

RÉPONSES.

1945. (**1900**, 333) (G. de Rocquigny). — *Procédés pour déterminer le rayon d'une sphère* (**1901**, 283; **1902**, 133). — I. Il y a lieu d'ajouter, aux procédés déjà indiqués, la construction très simple donnée par H.-Ch. de la Frémoire dans ses *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire* (1844, p. 352). On construit sur la surface de la sphère, au moyen du compas sphérique, trois points A, B, C, également distants de deux autres points quelconques pris comme pôles; les points A, B, C déterminent sur la sphère un grand cercle circonscrit au triangle ABC, et, si l'on construit dans un plan un triangle A'B'C' égal au triangle ABC, le rayon de la sphère est égal au rayon du cercle circonscrit à A'B'C'.

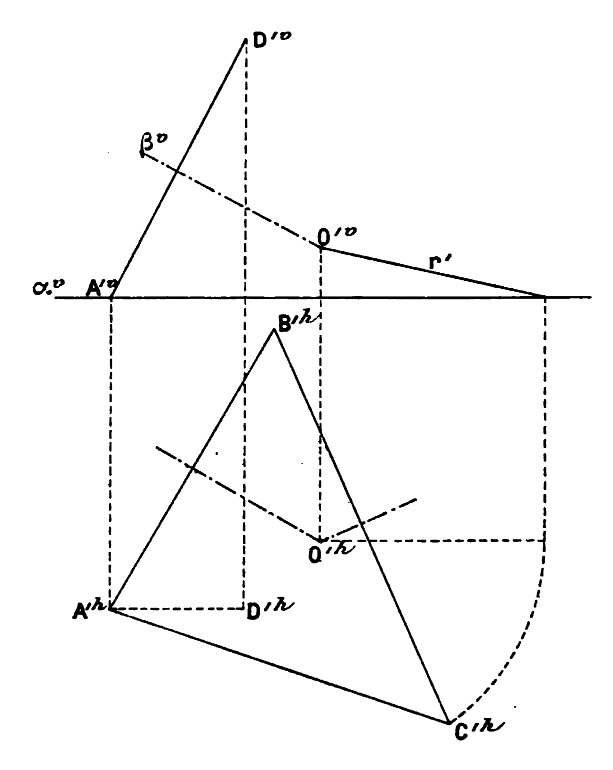
II. Mais, parmi tous les procédés déjà indiqués, je m'étonne de ne pas trouver celui qui est peut-être le plus universellement connu et qui consiste à chercher le centre de la sphère circonscrite à quatre points pris au hasard sur la surface et à prendre la distance de ce centre à l'un des quatre points choisis.

On dira peut-être que ce procédé est inapplicable quand il s'agit d'une sphère matérielle, parce que, comme la plupart des constructions indiquées en Géométrie, il fait abstraction de l'impénétrabilité de la matière. Mais, si la solution connue d'un problème relatif à une figure ne peut être obtenue sur cette figure même, elle peut être obtenue sur une figure identique ou semblable que l'on aurait, au préalable, construite à part dans l'espace, au moyen d'éléments géométriques pris dans la figure donnée et dont les plus simples sont, en général, les distances mutuelles des points.

Il est vrai que la reproduction d'une figure pourrait être très difficile et très coûteuse, s'il fallait la faire effectivement; mais on ne peut oublier que les méthodes de la Géométrie descriptive permettent cette reproduction sans difficulté et à peu de frais, non pas effectivement, mais indirectement, au moyen du dessin géométrique sur un plan (épure).

Dès que la figure considérée est reproduite idéalement, indépendamment du corps matériel auquel elle appartient, ou indépendamment d'autres conditions quelconques qui empêchent l'exécution des constructions exigées par la Géométrie, comme par exemple l'inaccessibilité, on pourra résoudre le problème.

Reprenons l'exemple d'une sphère matérielle dont il faut chercher le rayon. Prenons sur la surface trois points quelconques A, B, C



qui déterminent un triangle. Représentons, dans une épure, un triangle A'B'C' égal au triangle ABC, ce qui peut se faire d'une infinité de manières; pour plus de facilité, nous avons placé le triangle A'B'C' dans un plan horizontal α. Prenons sur la sphère un quatrième point D; mesurons les distances DA, DB, DC et représentons, dans l'épure, de la manière connue, un point D' tel que

$$D'A' = DA, \qquad D'B' = DB, \qquad D'C' = DC;$$

nous avons pris, pour la direction de la ligne de terre, la direction de D′A′. Cherchons enfin le centre O′ de la sphère circonscrite au tétraèdre D′A′B′C′, ce centre a sa projection horizontale O'^h au centre de la circonférence circonscrite au triangle A′B′C′ et sa projection verticale O'^v sur la projection verticale du plan debout β mené par le milieu de A′D′, perpendiculairement à cette droite. La distance r' du point O′ au point C′, par exemple, est égale au rayon r de la sphère donnée.

Les considérations précédentes peuvent être étendues à bien d'autres problèmes dont les solutions géométriques exigent l'immatérialité des figures; c'est en cela que consiste leur intérêt. Ainsi, on déterminera aisément le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet d'un tétraèdre ou d'un cône matériel sur la base, la hauteur d'un segment de sphère, ... M. le général de Jilly a vu cette importance de la Géométrie descriptive, mais il n'est pas nécessaire, comme il l'a pensé (*N. C. M.*, t. IV, 1878), de déterminer, avant de passer à l'épure, deux plans de projection sur la surface même du corps matériel.

III. Enfin, il importe peut-être de signaler, sans insister sur les grandes simplifications possibles au point de vue pratique, que l'on peut aussi employer les théories de la Géométrie analytique et calculer le rayon d'une sphère donnée, dès que l'on aura choisi un système d'axes coordonnés par rapport auquel on aurait déterminé les coordonnées de quatre points de la sphère, les coordonnées d'un des quatre points pouvant, du reste, se calculer en fonction des distances de ce point aux trois autres et des coordonnées de ces trois derniers points. F. Chomé (Bruxelles).

2371. (**1903**, 102) (*Rudis*). — *Solutions de l'équation*

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

(**1903**, 224, 319; **1904**, 156, 242; **1905**, 53). — Soit (α, β) la solution entière positive minimum de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - ay^2 = 1.$$

La condition nécessaire et suffisante de l'existence de solutions entières de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - ay^2 = -1$$

est que l'équation

$$(x_0 + ry_0)^2 = \alpha + \beta r \qquad (r = \sqrt{a})$$

admette une solution entière; x_0, y_0 est alors la solution positive minimum de l'équation (2).

On a

$$x_0^2 = \frac{\alpha + \varepsilon}{2}, \qquad ay_0^2 = \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Il faut, pour cela : 1° que α soit impair, et 2° que l'un des nombres $\frac{\alpha \pm 1}{2}$ soit divisible par a. Les nombres $\frac{\alpha + \varepsilon}{2}$ et $\frac{\alpha - \varepsilon}{2a}$ étant premiers entre eux, chacun d'eux sera carré parfait, puisque leur produit qui a pour valeur β^2 est lui-même carré parfait.

Voici quelques remarques sur les équations (1) et (2) :

1° L'équation $x^2 - ay^2 = -1$ n'est possible que si le nombre a ne renferme que des facteurs premiers $4q + 1$ (les autres étant exclus, même s'ils s'y trouvent avec des exposants pairs);

2° On peut supposer que a ne renferme que des facteurs premiers distincts, de la forme $4q + 1$, sans tenir compte de ceux qui sont à une puissance paire;

3° Si a est un nombre premier $4q + 1$, l'équation (2) est toujours possible;

4° Si $a = 4q + 1$, les ordonnées (valeurs de y) sont paires et les abscisses impaires; les valeurs de $\frac{\alpha \pm 1}{2}$ sont donc entières;

5° Si $a = p_1 p_2 \ldots p_n$, chacun de ces facteurs divise l'un des nombres $\frac{\alpha \pm 1}{2}$; pour que l'équation (2) soit possible, il faut que ces facteurs se trouvent tous dans l'un de ces nombres; ce qui n'a pas lieu, en général, pour a composé;

6° La connaissance d'une solution quelconque de $x^2 - ay^2 = N$ (N entier positif ou négatif) et celle de la solution positive minimum de $x^2 - ay^2 = 1$ permettent d'obtenir, par une formule symbolique, toutes les solutions de l'équation $x^2 - ay^2 = N$;

7° Pour obtenir une solution de $x^2 - ay^2 = N$, il suffit d'en avoir une de chacune des équations

$$x^2 - ay^2 = p_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

p_i étant les facteurs premiers distincts de N.

J. Sadier.

2744. (**1904**, 67) (G. Picou). — *Congruence* $x^2 \equiv N \pmod{p}$ (**1904**, 180, 263; **1905**, 81, 135). — Ayant une racine $\pm x$ de la congruence

$$x^2 \equiv N \quad (\mathrm{mod}\, abc),$$

où a, b, c sont des nombres premiers impairs, on aura les autres racines

$$am - bcn, \quad bm' - acn', \quad cm'' - abn'',$$

en déterminant m, n, m', n', m'', n'' de façon que

$$am + bcn = bm' + acn' = cm'' + abn'' = x.$$

A. Werebrusow (Theodosia, Crimée).

2839. (**1905**, 5) (Nazarevsky). — *Sur une congruence* (**1905**, 91, 183). — La remarque de M. Nazarevsky est juste.

La formule

$$N^{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

(**1905**, 93, ligne 7) doit être supprimée. Elle est due à une inadvertance inexplicable. Elle ne se trouve pas dans la Note personnelle, d'où la réponse à la question a été extraite. J. Sadier.

Note analogue de M. Escott, qui rectifie en indiquant la forme

$$(a + \sqrt{b})^{p+1} \equiv a^2 - b \pmod{p}.$$

2879. (**1905**, 27) (*Belga*). — *Division approchée d'un arc en n parties égales* (**1905**, 233). — Ce problème a fait l'objet de la question 1988 (**1900**, 405) à laquelle il a été donné deux réponses (**1901**, 126; **1904**, 216). H. Brocard.

2882. (**1905**, 28) (E.-N. Barisien). — *Lieu des centres d'ellipses constantes passant par deux points fixes* (**1905**, 184). — Question traitée par J. Koehler : *Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure.* Tome I, p. 305-306. Paris, 1886.

H. Brocard.

2888. (**1905**, 51) (Stéphanos). — *Sur les trajectoires d'un point.* — Différentiant les équations de la courbe

(1) $$Ax + By + Cz + D = 0,$$

(2) $$\varphi = Af_1 + Bf_2 + Cf_3 = 0$$

par rapport au temps t, on aura, en tenant compte des valeurs données des accélérations, les équations suivantes :

$$(3)\qquad A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0,$$

$$(4)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0,$$

$$(5)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2}=\sum_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f_1+\frac{\partial\varphi}{\partial y}f_2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}f_3=0,$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{d^3\varphi}{dt^3}=\;&\sum_{ijk}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx_k}{dt}\\&+\sum_{ij}\left(3\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}f_i+\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial t}=0.\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, des quatre dernières équations on peut déduire les égalités

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f_1,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=f_2,\qquad \frac{d^2z}{dt^2}=f_3;$$

car, en différentiant (3), (4) et (5), on aura trois équations qui, retranchées de (2), (5) et (6) respectivement, conduisent au système linéaire homogène

$$A\left(f_1-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+B\left(f_2-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+C\left(f_3-\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(f_1-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(f_2-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(f_3-\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0,$$

$$\begin{aligned}&2\sum_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}\left(f_1-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\\&+2\sum_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}\left(f_2-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\ldots=0,\end{aligned}$$

dont le déterminant n'est pas nul, en général.

Il suffit donc que les quatre équations (3), (4), (5), (6) soient compatibles en $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. On éliminera ces trois fonctions en

tirant leurs valeurs proportionnelles des équations (3) et (4)

$$\frac{dx}{dt} = \theta\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial z} - C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \theta L_1,$$

$$\frac{dy}{dt} = \theta\left(C\frac{\partial\varphi}{\partial x} - A\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \theta L_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \theta\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial y} - B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \theta L_3.$$

Substituant ces expressions dans (5) et (6), on en déduit deux valeurs de θ lesquelles, égalées, donnent les conditions

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{aligned} -\theta^2 &= \frac{\sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} f_i}{\sum\sum_{ij} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j} L_i L_j} \\ &= \frac{\sum\sum\left(3\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j} f_i L_j + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j} L_j\right)}{\sum\sum\sum \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k} L_i L_j L_k}. \end{aligned} \right.$$

Il faut que cette égalité soit une conséquence des équations de la courbe, et cela quelles que soient les constantes A, B, C et D; donc, si l'on élimine deux de ces constantes, A et B par exemple, les autres devront s'éliminer d'elles-mêmes. Des équations (1) et (2) on tire des expressions de A et de B qui sont linéaires et homogènes en C et D; en remplaçant ces valeurs de A et de B dans l'équation (α), qui est homogène et du huitième degré en A, B, C, on obtiendra une relation homogène du huitième degré en C et D qui devra être identiquement satisfaite; pour cela il faut que tous les coefficients en soient nuls. Donc *il existe neuf relations entre les fonctions* f_1, f_2, f_3 *et leurs dérivées des premier, second et troisième ordres.*

Ces relations ne sont pas simples. A.-L. Jerrold.

2899. (**1905**, 74) (A. Pellet). — *Nombre des racines réelles d'une équation.* — La question demande à être un peu précisée.

Soit l'équation

$$(1)\qquad f(x) - \lambda = 0$$

de degré *m*. La dérivée $f'(x) = 0$ a *n* racines distinctes, d'ordre de

multiplicité impaire. (On ne doit pas compter les racines d'ordre pair et les autres doivent être comptées comme racines simples.)

L'équation (1) a $n+1$ racines réelles, au maximum. Ce maximum peut-il toujours être atteint, lorsqu'on donne à λ une valeur convenablement choisie?

La réponse est négative, en général.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n racines distinctes considérées, rangées par ordre de grandeur décroissante.

Soit de plus

$$A_i = f(x_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

$A_1, A_3, A_5, \ldots$ sont des minimums de $f(x)$, $A_2, A_4, A_6, \ldots$ des maximums.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $n+1$ racines réelles pour l'équation (1) est

$$A_1 - \lambda, \quad A_3 - \lambda, \quad A_5 - \lambda, \quad \ldots \quad < 0,$$
$$A_2 - \lambda, \quad A_4 - \lambda, \quad A_6 - \lambda, \quad \ldots \quad > 0.$$

Ce qui exige

$$A_1, \quad A_3, \quad \ldots \quad < A_2, \quad A_4, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire que les minimums doivent tous être inférieurs aux maximums.

Si cette condition est remplie, il suffira de prendre pour λ une valeur comprise entre le plus grand minimum et le plus petit maximum de $f(x)$.

1° Lorsque $n = 3$, la condition est toujours remplie; soient $a > b > c$ les trois racines de $f'(x)$; A, B, C les valeurs correspondantes de $f(x)$.

On prendra A, C $< \lambda <$ B.

2° Lorsque $n = 4$; la seule condition sera A $<$ D.

Dans le cas général, on trouvera de même des réductions analogues dans le nombre des inégalités à vérifier. J. Sadier.

Un exemple suffit à montrer que la question doit être résolue par la négative. Soit

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x - a:$$

la dérivée

$$f'(x) = 5x^4 - 9x^2 + 4 = (x^2 - 1)(5x^2 - 4)$$

a quatre racines réelles, et cependant $f(x)$ n'a au plus que trois racines réelles, lorsque a est en valeur absolue compris entre 2 et $\frac{112}{25\sqrt{5}}$, intervalle moindre que deux dixièmes. *Anonyme.*

2909. (**1905**, 103) (Berdellé). — *Systèmes de numération* (**1905**, 234). — On trouve à Paris, chez Dunod, une brochure in-8° de 166 pages intitulée : *Le système octaval ou la numération et les poids et mesures réformés*, par Colenne (1845), 2fr, 50.

G. Lemaire.

2911. (**1905**, 104) (E. Maillet). — *Interprétation de l'article* 758 *du Code civil* (**1905**, 236). — Un de nos correspondants nous adresse la note suivante :

Bien avant la réforme de l'article 758 (autrefois 757) du Code civil, E. Catalan a publié à son sujet une curieuse étude intitulée :

L'article 757. *Application de l'Algèbre au Code civil* (2e édition). Bruxelles, Hayez, 1871.

Catalan cite une formule de Cournot parue au *Bulletin de Férussac* (t. XVI).

Ainsi la question est bien ancienne. La Rédaction.

2915. (**1905**, 106) (E. Landau). — *Sur une équation indéterminée.* — Nous croyons devoir rappeler que c'est par inadvertance que cette question a été posée; elle n'est que la reproduction de la question **2241** (**1901**, 309; **1902**, 111, 283; **1903**, 108), extension d'une question posée en 1901 par M. Landau.

La Rédaction.

2925. (**1905**, 129) (Fitz-Patrick). — *Sur l'affaire Vrain-Lucas.* — Une liste assez complète des Notes relatives à cette affaire se trouve dans la *Bibliographie générale de l'Astronomie,* par J.-C. Houzeau et A. Lancaster, Tome II, col. 55-60. Bruxelles, 1882.

G. Eneström.

On trouve un récit circonstancié de toute cette affaire dans : *Une fabrique de faux autographes ou récit de l'affaire Vrain-Lucas, par M. Henri Bordier, avocat, ancien archiviste aux*

Archives nationales, et M. Émile Mabille, attaché au département des Manuscrits de la Bibliothèque impériale, accompagné de quatorze fac-simile des principaux documents mis en cause dans le procès. Paris, Léon Techener, 1870. Gr. in-4°.

H. Braid.

2928. (**1905**, 130) (G. Lemaire). — *Erreur commise dans l'évaluation d'une longueur.* — 1° L'expression de « longueur mathématique » est peut-être un peu ambitieuse, car on ne saurait fixer avec exactitude une valeur forcément incertaine. Tout ce que l'on peut dire c'est que la valeur la plus plausible de la longueur est la moyenne des mesures obtenues quand celles-ci sont de nature à inspirer le même degré de confiance et que l'on s'est mis à l'abri des erreurs systématiques.

2° Si l'on désigne par $\pm\varepsilon$ l'erreur à craindre sur une mesure isolée, on admet que l'erreur à craindre sur la moyenne de n mesures a pour expression $\pm \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

La détermination de l'erreur moyenne ε est délicate; il subsiste toujours une incertitude sur sa valeur quand on ne dispose pas d'un très grand nombre d'observations.

Disons d'abord que le fait, dans la question actuelle, de mesurer dans les deux sens peut avoir pour but d'éliminer certaines erreurs systématiques et ne comptons comme mesure élémentaire que la moyenne de deux mesures consécutives de sens contraires. Nous avons par suite n mesures élémentaires. Prenons la moyenne de ces n mesures et faisons la différence entre cette moyenne et chacune des mesures élémentaires, nous obtiendrons n résultats positifs ou négatifs. Faisons la somme des carrés de ces différences et divisons par $n-1$; le quotient sera le carré de l'erreur moyenne ou ε^2.

Supposons, par exemple, 10 paires de mesures consécutives ne différant que par les décimètres $925^{m},4$, 3, 6, 5, 3, 2, 4, 3, 5, 4.

La moyenne sera $925^{m},39$.

Les écarts des mesures seront en centimètres : $+1$, -9, $+21$, $+11$, -9, -19, $+1$, -9, $+21$, $+1$.

La somme des carrés est 1610 dont le quotient par 9 donne 179, carré de l'erreur moyenne. La racine carrée de ce nombre est 13,3. L'erreur moyenne d'une mesure serait donc $\pm 0^{m},13$.

Appliquant la règle précédemment énoncée, nous obtiendrons,

pour l'erreur à craindre sur la moyenne de 10 mesures :

$$\pm \frac{0^m,13}{\sqrt{10}} = \pm 0^m,04.$$

Il convient d'ajouter que le choix des mesures d'après leur écart de la moyenne est à proscrire à moins toutefois que l'écart ne soit tel qu'il y ait manifestement une erreur grossière dans l'appréciation de la mesure. Mais, sauf ce cas, on ne doit pas éliminer d'observation quand on n'a pas de raison de s'en défier *a priori* et que le cahier d'observations ne mentionne pas cette incertitude. Ph. Hatt.

2929. (**1905**, 130) (Lemaire). — *Sur la mesure d'une longueur.* — Remarquons d'abord que le résultat ne saurait être théoriquement exact, car on ne peut obtenir une certitude avec une combinaison, quelle qu'elle soit, d'incertitudes.

Pour obtenir avec le ruban d'acier une mesure de base (car il s'agit sans doute de cette opération) pratiquement acceptable, il faut l'exécuter une fois, deux fois au plus, dans des conditions choisies, de manière à s'affranchir de toutes les causes d'erreur : erreur sur l'addition des portées, erreur sur la longueur du ruban, provenant soit de son échauffement inconnu, soit de la tension variable à laquelle il est soumis, erreur de réduction à l'horizon d'une portée inclinée. Il convient, je crois, d'élonger le ruban sur des planches alignées ou mieux des bancs, de substituer à la portée fixe, obtenue en reboutant les extrémités du ruban, une portée variable dont la longueur résultera de la lecture de repères fixes du ruban vis-à-vis de divisions tracées sur les bancs extrêmes. La tension constante du ruban peut être obtenue au moyen de deux poids de 8^{kg} ou 10^{kg}, chacun suspendu à des cordes qui agissent horizontalement sur le ruban après avoir passé sur des poulies. *Il est essentiel de prendre le point d'appui des poulies en dehors des bancs.* L'inclinaison de la portée se mesure facilement par une opération ordinaire de nivellement.

Reste la température, qui est ici le facteur essentiel; si l'on ne peut opérer à l'ombre, il faut se résigner à ne mesurer que très tôt le matin ou très tard le soir, afin que le soleil ne puisse échauffer le ruban. Il est impossible de connaître à 10° près la température d'un objet irrégulièrement chauffé et sur 20^m de longueur. L'allongement de l'acier est de 2^{mm} pour cette différence de température. Du reste,

même en opérant avec cette restriction, il est difficile de connaître la température du ruban si l'on ne se décide pas à l'enfermer dans une gaine d'étoffe (laine ou coton blanc) à l'intérieur de laquelle on fait passer la boule du thermomètre.

Avec toutes ces précautions. on pourra, si le ruban est bien étalonné, obtenir une valeur acceptable; mais elles sont si minutieuses et demandent tellement de temps qu'il est pratiquement impossible de répéter l'opération plus de deux fois.

Du reste, on ne gagnerait probablement rien à réitérer plus souvent une semblable opération, quitte à négliger certaines précautions et comptant sur le hasard pour compenser partiellement les erreurs traitables; la question posée ne comporte donc pas de réponse pratique autre que celle qui précède. Mais théoriquement, on peut, je crois, la résoudre de la manière suivante :

Soit posé $\frac{L}{l} = \nu$ et supposons pour la facilité du raisonnement que ν soit un nombre entier.

Si ε est l'erreur à craindre sur la mesure d'une portée, l'erreur à craindre sur la somme de ν portées sera $\pm\,\varepsilon\sqrt{\nu}$ et, si l'opération est répétée n fois, l'erreur de la moyenne sera $\pm\,\varepsilon\sqrt{\frac{\nu}{n}}$.

Mais il arrive ici, comme pour la question **2928** (**1905**, 256), qu'il faut recourir à une sorte de pétition de principe pour déterminer ε ou plutôt $\varepsilon\sqrt{\nu}$, c'est-à-dire l'erreur de la mesure totale. On fera la différence entre la moyenne et les résultats individuels, on fera la somme des carrés de ces écarts et l'on divisera par le nombre des observations moins 1; le quotient sera le carré de l'erreur à craindre sur la mesure totale, c'est-à-dire $\nu\varepsilon^2$; en extrayant la racine carrée, on obtient le résultat cherché.

PH. HATT.

2933. (**1905**, 146) (NAZAREVSKY). — *Valeurs résiduelles de* $(a+\sqrt{b})^{\frac{p\pm 1}{2}}$ (mod$p$). — La question posée par M. Nazarevsky sous le n° 2933 constitue simplement une extension de celle qu'il avait précédemment posée sous le n° **2859** (**1905**, 5) et la démonstration donnée dans ma réponse à cette question (**1905**, 91) n'exige non plus qu'une légère modification pour s'appliquer à l'énoncé un peu plus général dont il a demandé que l'on confirmât l'exactitude.

Soit

$$(a+\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} = \mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{b},$$

A et B étant deux entiers dont l'expression, fournie par le développement du premier membre, ne nécessite point d'être prise en considération ; j'aurai de même

$$(a-\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} = \mathrm{A}-\mathrm{B}\sqrt{b}$$

et, par suite,

$$(a^2-b)^{\frac{p-1}{2}} = \mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2 b. \tag{1}$$

Il vient encore

$$(a+\sqrt{b})^{\frac{p+1}{2}} = (a+\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}}(a+\sqrt{b}) = \mathrm{A}a+\mathrm{B}b+(\mathrm{A}+\mathrm{B}a)\sqrt{b} = m+n\sqrt{b},$$

$$(a-\sqrt{b})^{\frac{p+1}{2}} = (a-\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}}(a-\sqrt{b}) = \mathrm{A}a+\mathrm{B}b-(\mathrm{A}+\mathrm{B}a)\sqrt{b} = m-n\sqrt{b},$$

en employant deux abréviations évidentes d'elles-mêmes, et enfin

$$(a+\sqrt{b})^{p-1} = \left[(a+\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}}\right]^2 = \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2 b+2\mathrm{AB}\sqrt{b}.$$

Cette dernière égalité, se scindant dans les deux suivantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2 b = a^{p-1} &+ \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}a^{p-3}b \\ &+ \frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1.2.3.4}a^{p-5}b^2+\ldots,\end{aligned}$$

$$2\mathrm{AB} = \frac{p-1}{1}a^{p-2}+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}a^{p-4}b+\ldots.$$

donne lieu aux congruences $(\bmod p)$

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2 b \equiv a^{p-1}+a^{p-3}b+a^{p-5}b^2+\ldots+a^2 b^{\frac{p-3}{2}}+b^{\frac{p-1}{2}},$$

$$-2\mathrm{AB} \equiv a^{p-2}+a^{p-4}b+a^{p-6}b^2+\ldots+ab^{\frac{p-3}{2}},$$

et l'on en déduit aussitôt celles-ci :

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2 b+2\mathrm{AB}a \equiv b^{\frac{p-1}{2}},$$

$$(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2 b)a+2\mathrm{AB}b \equiv a^p \equiv a,$$

lesquelles, moyennant les abréviations employées un peu plus haut, deviennent

$$(2)\qquad An + Bm \equiv b^{\frac{p-1}{2}},$$

$$(3)\qquad Am + Bbn \equiv a.$$

Il convient d'en rapprocher l'expression déjà remarquée de $(a^2 - b)^{\frac{p-1}{2}}$, que l'on écrira ici

$$(1\ bis)\qquad An - Bm = (a^2 - b)^{\frac{p-1}{2}}.$$

La congruence (2) et l'égalité (1 *bis*) donnent

$$2An \equiv b^{\frac{p-1}{2}} + (a^2 - b)^{\frac{p-1}{2}},$$

$$2Bm \equiv b^{\frac{p-1}{2}} - (a^2 - b)^{\frac{p-1}{2}},$$

et l'on est conduit à envisager deux cas :

I. b résidu quadratique du module premier p;

II. b non-résidu.

Chacun de ces deux cas se subdivisant lui-même en deux autres selon que la différence $(a^2 - b)$ est relativement à p un résidu quadratique ou un non-résidu :

I. Lorsque b est un résidu quadratique de p, c'est-à-dire lorsqu'il existe un certain nombre x vérifiant la congruence $x^2 \equiv b \pmod p$, le produit AB est divisible par p : en effet la congruence précédemment considérée,

$$-2AB \equiv a^{p-2} + a^{p-4}b + a^{p-6}b^2 + \ldots + ab^{\frac{p-3}{2}},$$

devient alors

$$-2AB \equiv a^{p-2} + a^{p-4}x^2 + a^{p-6}x^4 + \ldots + ax^{p-3} \equiv \frac{a(a^{p-1} - x^{p-1})}{a^2 - x^2},$$

et le second membre est congru à zéro $(\bmod p)$, d'après le théorème fondamental de Fermat, du moment que l'on a $a \not\equiv x^2$, c'est-à-dire $a^2 \not\equiv b$, ce qui a été essentiellement supposé dès le principe.

Ainsi donc l'un ou l'autre des deux nombres A, B est divisible

par p, car ils ne peuvent l'être simultanément, vu qu'autrement on aurait

$$o \equiv A^2 + B^2 b \equiv a^{p-1} + a^{p-3}x^2 + a^{p-5}x^4 + \ldots + x^{p-1}$$
$$\equiv \frac{a^{p+1} - x^{p+1}}{a^2 - x^2},$$

c'est-à-dire

$$a^{p+1} - x^{p+1} \equiv o,$$

congruence contradictoire avec la congruence nécessaire

$$a^{p-1} - x^{p-1} \equiv o,$$

sauf dans l'hypothèse $a^2 - x^2 \equiv a^2 - b \equiv o$, qui précisément est exclue.

Cela posé et supposant $a^2 - b$ résidu quadratique de p, il viendra

$$An \equiv 1, \qquad Bm \equiv o,$$

c'est donc B qui est divisible par p, et m ne peut l'être, car, par la congruence (3), a le serait aussi. En conséquence, on déduit l'égalité (1)

$$A^2 \equiv 1, \qquad A \equiv \pm 1.$$

Au contraire, si $a^2 - b$ est un non-résidu, j'aurai

$$An \equiv o, \qquad Bm \equiv 1,$$

et c'est A qui est un multiple de p, n ne pouvant pas l'être en même temps, à cause de la congruence (3) qui devient

$$Bbn \equiv a.$$

L'égalité (1) donne alors

$$B^2 b \equiv 1.$$

II. Le nombre b étant maintenant supposé un non-résidu, soit $a^2 - b$ un résidu. On trouvera

$$An \equiv o, \qquad Bm \equiv -1,$$

et l'on est amené à considérer, exclusivement l'une de l'autre pour un motif déjà invoqué, les congruences $A \equiv o$, $n \equiv o$. Cette fois c'est la congruence $A \equiv o$ qui est impossible, car elle entraînerait comme conséquence

$$n \equiv Ba, \qquad a \equiv Am + Bbn \equiv B^2 ab, \qquad B^2 b \equiv 1,$$

tandis que par l'égalité (1) on a au contraire

$$B^2 b \equiv -1.$$

On ne saurait donc que faire $n \equiv 0$, c'est-à-dire

$$A + Ba \equiv 0,$$

d'où, multipliant par m,

$$Am \equiv a.$$

D'autre part, en multipliant par m l'égalité de définition

$$m = Aa + Bb,$$

il vient

$$m^2 = (Am)a + (Bm)b,$$

c'est-à-dire, d'après les résultats qui viennent d'être obtenus,

$$m^2 \equiv a^2 - b \pmod{p}.$$

Si enfin $a^2 - b$ est, comme b, un non-résidu, on a

$$An \equiv -1, \qquad Bm \equiv 0$$

et un raisonnement analogue à celui qu'on a employé dans l'hypothèse précédente, $\left(\frac{a^2-b}{p}\right) = 1$, montrerait que c'est m et non B qui est divisible par p. La congruence (3) donne alors

$$Bbn \equiv a.$$

Mais aussi de l'égalité

$$n = A + Ba$$

on tire

$$n^2 b = (An)b + (Bbn)a,$$

$$n^2 b \equiv a^2 - b \pmod{p}.$$

Les propositions avancées par M. Nazarewsky sont donc parfaitement exactes.

E. Malo.

Soit

$$(1) \quad \begin{cases} (a+\sqrt{b})^p = a^p + pa^{p-1}\sqrt{b} + \ldots + pab^{\frac{p-1}{2}} + b^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{b} \\ \equiv a^p + b^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{b} \pmod{p}. \end{cases}$$

I. Supposons $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$. On a, par le théorème de Fermat,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} & (a+\sqrt{b})^p \equiv a+\sqrt{b} \quad (\text{mod}\, p) \\ \text{ou} & \\ & (a+\sqrt{b})^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p). \end{array} \right.$$

De même

$$(3) \qquad (a-\sqrt{b})^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p).$$

Si l'on pose

$$(4) \qquad (a+\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \equiv j + k\sqrt{b} \quad (\text{mod}\, p),$$

on a aussi

$$(a-\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \equiv j - k\sqrt{b} \quad (\text{mod}\, p)$$

et

$$(5) \qquad (a^2-b)^{\frac{p-1}{2}} \equiv j^2 - k^2 b \quad (\text{mod}\, p).$$

De (4) on déduit

$$(6) \qquad (a+\sqrt{b})^{p-1} \equiv j^2 + k^2 b + 2jk\sqrt{b} \quad (\text{mod}\, p)$$

et, par suite, de (2),

$$j^2 + k^2 b \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p),$$
$$2jk \equiv 0 \quad (\text{mod}\, p).$$

Premier cas :

$$k \equiv 0, \qquad j \equiv \pm 1 \quad (\text{mod}\, p);$$

d'après (5),

$$\left(\frac{a^2-b}{p}\right) = 1;$$

et, d'après (4),

$$(a+\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \quad (\text{mod}\, p).$$

Second cas :

$$j \equiv 0, \qquad k^2 b \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p);$$

d'après (5),

$$\left(\frac{a^2-b}{p}\right) = -1;$$

et, d'après (4),

$$(a+\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \equiv k\sqrt{b} \pmod{p}.$$

II. D'après (1), si $\left(\dfrac{b}{p}\right) = -1$, on a

$$(7)\qquad \begin{cases} (a+\sqrt{b})^{p} \equiv a - \sqrt{b} & \pmod{p}, \\ (a+\sqrt{b})^{p+1} \equiv a^2 - b & \pmod{p}. \end{cases}$$

Soit

$$(8)\qquad \begin{cases} (a+\sqrt{b})^{\frac{p+1}{2}} \equiv m + n\sqrt{b} & \pmod{p}, \\ (a+\sqrt{b})^{p+1} \equiv m^2 + n^2 b + 2mn\sqrt{b} & \pmod{p}; \end{cases}$$

par suite, d'après (7),

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 b &\equiv a^2 - b && \pmod{p}, \\ 2mn &\equiv 0 && \pmod{p}. \end{aligned}$$

Premier cas :

$$n \equiv 0, \qquad m^2 \equiv a^2 - b \pmod{p}$$

et

$$\left(\frac{a^2-b}{p}\right) = +1;$$

d'après (8),

$$(a+\sqrt{b})^{\frac{p+1}{2}} \equiv m \pmod{p}.$$

Second cas :

$$m \equiv 0, \qquad n^2 b \equiv a^2 - b \pmod{p}$$

et, par suite,

$$\left(\frac{a^2-b}{p}\right) = -1;$$

d'après (8),

$$(a+\sqrt{b})^{\frac{p+1}{2}} \equiv n\sqrt{b} \pmod{p}.$$

Voir : E. LUCAS, *Théorie des nombres*, et *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* [*A. J. M.*, Vol. I (1878), p. 289].

E.-B. ESCOTT (Ann. Arbor).

QUESTIONS.

2970. **[V9]** La Rédaction de *Wiskundig Tydschrift* propose de publier une nouvelle édition de la célèbre Notice de Feuerbach : *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks* (Nürnberg, 1822).

Dans quelle bibliothèque se trouve un exemplaire ou quel mathématicien veut prêter le sien?

N. Quint (La Haye).

2971. **[K6a]** Je désire connaître la formule donnant la distance de deux points de coordonnées normales

$$(x, y, z)(x', y', z),$$

pour trouver, en particulier, la distance du barycentre d'un triangle à son point de Lemoine en fonction des côtés du triangle.

E.-N. Barisien.

2972. **[M¹7c]** J'ai été frappé de voir que les lieux géométriques étaient plus souvent de *degré pair* que de *degré impair*. Cependant les lignes droites et les cubiques se trouvent assez fréquemment. Mais déjà les courbes du 5ᵉ degré sont moins fréquentes. On a donné, dans ce Recueil, des listes de courbes du 5ᵉ degré, résultats de lieux géométriques. Je désirerais en connaître des 7ᵉ, 9ᵉ, 11ᵉ et 13ᵉ degrés. Je n'ai jamais rencontré de courbes des 11ᵉ et 13ᵉ degrés, tandis que j'en ai vu fréquemment du 12ᵉ, du 16ᵉ, du 20ᵉ. Quelle en peut être la raison?

E.-N. Barisien.

2973. [V] Je serais reconnaissant aux correspondants qui voudraient bien me signaler une série d'applications de l'Analyse aux travaux publics (construction, hydraulique, machines, etc.) :

1° Courbes (en dehors des coniques, de la spirale d'Archimède, de la chaînette, de l'hélice, de la caténoïde) au point de vue de la quadrature, de la rectification, de la courbure.

2° Surfaces (en dehors des quadriques et des hélicoïdes).

3° Intégrales définies ou indéfinies.

4° Équations différentielles (en dehors des équations linéaires ou à coefficients constants) et aux dérivées partielles $\left(\text{en dehors de } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0\right)$.

J'en connais bien quelques-unes ([1]), mais je voudrais augmenter ma collection.

Je demande qu'on veuille bien indiquer sommairement l'application, l'équation de la courbe ou de la surface, l'intégrale, l'équation différentielle, et soit un recueil où je pourrai vérifier le renseignement, soit quelques détails complémentaires si le recueil n'existe pas.

Je ne vise pas ici les applications d'ordre trop exclusivement scientifique. E. MAILLET.

2974. [V] Quel est le premier Ouvrage, classique ou professionnel, qui parle du problème de la Carte?

G. LEMAIRE.

2975. [**P5** et **X7**] *L'Intermédiaire* (**1897**, 231; **1898**, 101) signale un appareil Bauernfeind pour la solution mécanique du problème de la Carte.

Si cet appareil n'est pas un rapporteur à trois alidades, je serais curieux d'en avoir une description sommaire.

G. LEMAIRE.

([1]) Exemples : lemniscate, clothoïde.

2976. [V] Je désirerais connaître les principes, les auteurs et les dates de toutes les solutions numériques, graphiques ou mécaniques du problème de la Carte.

Une histoire, même résumée, mais précise, de la question, ne serait pas inutile; car on a peine aujourd'hui, en lisant les Ouvrages spéciaux, à reconnaître la part d'invention, de perfectionnement ou de vulgarisation qui revient à chacun des nombreux mathématiciens cités : Bégat, Delambre, Estignard, Gauss, Petersen, Pothenot, Pritz, Snellius, etc.

G. Lemaire.

2977. [A3] Je désirerais une solution simple du système d'équations :

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha,$$
$$b^2 = z^2 + x^2 - 2zx\cos\beta,$$
$$c^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma,$$

où α, β et γ sont les angles sous lesquels, d'un point S, on aperçoit les côtés a, b et c d'un triangle donné ABC.

Personnellement, je résous en m'aidant des relations :

$$\frac{ax}{\sin(\alpha - \mathrm{A})} = \frac{by}{\sin(\beta - \mathrm{B})} = \frac{cz}{\sin(\gamma - \mathrm{C})};$$

mais je voudrais m'affranchir de cet artifice.

G. Lemaire.

2978. [P5] Voici comment se présente le problème de la Carte dans les opérations topographiques :

Connaissant les coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2) *et* (x_3, y_3) *de trois points trigonométriques* A, B *et* C, *ainsi que les angles* α, β *et* γ *sous lesquels, d'un point* S, *on aperçoit les côtés* BC, CA *et* AB *du triangle* ABC, *déterminer :* 1° *les azimuts* φ_1, φ_2 *et* φ_3 *des points* A, B *et* C *par rapport au point* S (*les azimuts se comptent, à partir du nord, suivant le sens trigonométrique, de* 0° *à* 360°); 2° *les coordonnées* (x, y) *du point* S.

J'ai la solution du problème d'après ces données; mais,

voulant éviter le calcul de tang φ_1, tang φ_2, tang φ_3, j'obtiens pour x et y des formules directes tellement chargées que je n'ose m'en servir pratiquement; et je demande à l'amabilité d'un correspondant de m'en indiquer de plus expéditives.

G. Lemaire.

2979. **[J2e]** Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n points donnés ($OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$, $\ldots$, $OA_n = a_n$) d'une droite donnée ON, dirigée suivant le méridien.

Voulant y repérer la position d'un point M, on observe les azimuts $NA_1M = \alpha_1$, $NA_2M = \alpha_2$, $\ldots$, $NA_nM = \alpha_n$, ce qui fournit, évidemment, $(n-2)$ mesures surabondantes.

On demande les coordonnées les plus probables du point M.

(Je crois savoir que Gauss a traité la question; mais j'ignore comment et dans quel Ouvrage. Il peut se faire, d'ailleurs, que d'autres mathématiciens l'aient traitée plus simplement; et c'est une solution pratique que je recherche.)

G. Lemaire.

2980. **[I20b]** Ayant deux sommes égales de cubes, on en aura quatre par la relation

$$x^3+y^3=x'^3+y'^3=\left(\frac{x'^2y-x^2y'}{xy-x'y'}\right)^3+\left(\frac{xy'^2-x'y^2}{xy-x'y'}\right)^3$$
$$=\left(\frac{yy'^2-x^2x'}{xy-x'y'}\right)^3+\left(\frac{xx'^2-y^2y'}{xy-x'y'}\right)^3.$$

Ces résultats sont-ils connus?

A. Werebrusow (Théodosia, Crimée).

2981. **[T]** Dans le numéro de février 1905 (p. 247) de la *Revue de l'hypnotisme et de la psychologie physiologique* (*voir* encore octobre 1905, p. 119), M. le Dr Paul Joire décrit un appareil, le *sthénomètre,* qui sert à l'étude et à l'enregistrement de ce qu'il appelle la *force nerveuse extériorisée.* La main ou le corps humain exercerait sur

une aiguille horizontale, portée par un axe, une action (habituellement une attraction) variable avec les personnes.

M. le D[r] Joire a cherché à montrer que cette action n'était due ni au son, ni à la chaleur, ni à la lumière, ni à l'électricité; il ne parle pas de l'attraction newtonienne, peut-être négligeable. Je désirerais savoir si des expériences ont été faites pour mesurer la variation d'intensité de cette force avec la distance? *Higrec.*

2982. [**B 3 a**] Je désire connaître le résultat de l'élimination de φ entre les deux équations

$$\sqrt{\frac{ax}{\cos\varphi}} + \sqrt{\frac{by}{\sin\varphi}} = c,$$

$$\sqrt{ax\cos\varphi} + \sqrt{by\sin\varphi} = c.$$

Crut.

2983. [**V 9**] Où peut-on se procurer le Livre intitulé : *L'Ame dans la Nature,* du grand physicien danois Hans Christian Œrsted? ÉMILE WEBER (Liége).

2984. [**S 4**] Je désirerais avoir une bibliographie aussi complète que possible des Ouvrages où l'on parle des cycles non réversibles. ÉMILE WEBER (Liége).

2985. [**H 2**] Quand est-il possible d'effectuer complètement l'intégration de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0,$$

où

$$P = a + \frac{b}{X - x} + \frac{b}{x}, \qquad Q = c + \frac{d}{X - x} - \frac{d}{x},$$

a, b, c, d, X étant des constantes?

Autrement dit, pour quelles valeurs des constantes peut-on effectuer les quadratures auxquelles conduit l'intégration de

cette équation différentielle, ou les ramener à des transcendantes connues (exemple, si b est entier, on est ramené au logarithme intégral $\int \frac{e^x\,dx}{x}$)?

Même question quand

$$P = a + \frac{b}{X - x} - \frac{b}{x}, \qquad Q = c + \frac{d}{X - x} + \frac{d}{x}.$$

Necker.

2986. [**I 24c**] Dans les *Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire* de M. F. Klein (traduction Griess, Paris, Nony, 1896), à la page 89 (¹), se trouve énoncé ce corollaire de M. Lindemann :

Le nombre e ne peut vérifier une identité de la forme

(1) $$C'_0 + C'_1 e^{k_1} + C'_2 e^{l_1} + \ldots = 0,$$

où les coefficients sont des nombres entiers non tous nuls et les exposants des nombres algébriques quelconques différents et $\neq 0$.

L'auteur, pour le montrer, déduit de (1) qu'une identité de la forme

(2) $$C''_0 + C''_1 (e^{k'_1} + \ldots + e^{k'_r}) + \ldots = 0,$$

analogue à celle considérée au théorème de la page 82, devrait être vérifiée. Mais il n'établit pas, ce me semble, que $C''_0 \neq 0$; or, sauf erreur de ma part, on ne pourrait appliquer ce dernier théorème, d'après sa démonstration, à (2), que si $C''_0 \neq 0$.

Une observation analogue s'applique *a fortiori* à la proposition formulée à la page 90.

(¹) *Voir* p. 61, 54, 62 de l'édition allemande *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (rédaction Tägert). Leipzig, Teubner, 1895.

Pour me résumer, je ne vois pas que l'on puisse conclure du texte, sans compléments, que e^{α_1} n'est pas algébrique ([1]) lorsque α_1 est algébrique $\neq 0$.

Je serais bien reconnaissant au correspondant de l'*Intermédiaire* qui voudrait lever mes doutes à cet égard.

Doubt.

2987. [**A 3 b**] Je désire connaître le résultat qu'on obtient en formant le produit des 2^n facteurs

$$\sqrt{x_0} \pm \sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2} \pm \sqrt{x_3} \pm \ldots \pm \sqrt{x_n}$$

pris avec toutes les combinaisons possibles de signes.

Comment se simplifie ce produit sous la condition

$$\sum_{i=0}^{i=n} x_i = 0 ?$$

P.-H. Schoute (Groningue).

2988. [**D 2 b α**] Soit une série

$$f(z) = \sum_0^\infty a_p z^p ;$$

la série

$$\log[1 + f(z)] = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{q-1} \overline{f(z)}^q}{q} = \sum_0^\infty b_q z^q$$

n'est convergente que si $f(z)$ non seulement converge, mais reste, de plus, de module < 1.

Inversement, la série

$$e^{f(z)} = 1 + \sum_1^\infty \frac{\overline{f(z)}^m}{m!} = 1 + \sum_0^\infty c_m z^m$$

([1]) Je peux néanmoins en conclure, grâce à un artifice spécial, que e^{α_1} n'est pas rationnel.

est convergente, sans que $f(z)$ le soit, quand $\sum_0^\infty c_m z^m$ a pour limite une quantité de module > 1.

Je demande comment on peut reconnaître *a priori* si $\sum_0^\infty c_m z^m$ sera convergente ou divergente, sachant que $f(z)$ est divergente?

P. HENDLÉ.

2989. [**I 23a**] Sait-on quelque chose sur le développement en fraction continue de $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, où A et B sont entiers, ou encore sur le développement en fraction continue des racines de l'équation bicarrée à coefficients entiers? (Comp. *I. M.*, 1897, p. 41-42, rép. de M. R. de Montessus à 879.)

Plus généralement, x et y étant deux irrationnelles quadratiques, sait-on quelque chose sur le développement en fraction continue de $x+y$ ou xy?

Je laisse de côté, bien entendu, le cas banal où $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, $x+y$, xy sont racines d'une équation du deuxième degré à coefficients entiers.

E. MAILLET.

2990. [**I 22**] Les entiers algébriques réels, qui sont racines des équations algébriques irréductibles à coefficients entiers où le coefficient de la plus haute puissance de x est l'unité, peuvent se diviser en deux classes :

1° Ceux qui n'ont d'autres entiers conjugués (à savoir les racines de la même équation irréductible) que des nombres réels;

2° Les autres.

Cette distinction a-t-elle été utilisée quelque part dans la théorie des nombres algébriques, ou ailleurs?

E. MAILLET.

RÉPONSES.

2595. (**1903**, 149) (J. Amodeo). — *Sur le mathématicien Jourdan ou Giordano* (**1903**, 272; **1904**, 219; **1905**, 158; **1905**, 227). — Je signalerai d'abord qu'il faut changer J. Amodeo en F. Amodeo.

A la réponse de l'illustre M. Cantor, j'ajouterai que le mathématicien en question s'appelait *Annibale-Nicolò Giordano,* et qu'il est né à Astalunga, partie de la ville d'Ottaiano, située près du Vésuve. Sa première publication est de 1786 et se trouve dans le Volume I de la *R. Accademia delle Scienze di Napoli* (1788); en 1787 (il avait à peine 16 ans) il écrivit le Mémoire publié dans le Volume IV des *Memorie della Societa italiana dei* XL, sous le titre : *Considerazioni sintetiche sopra di un celebre problema piano, e risoluzione di alquanti altri problemi affini,* où, au Problème VI, il traite de la question, improprement appelée *Problème d'Ottaiano,* et que l'on doit nommer *Problème de Giordano.* On peut consulter mes travaux : *Lezioni di Geometria proiettiva,* p. 424 (Napoli, 1905); *Vita matematica napoletana,* Parte I, p. 132-136 (Napoli, Gionnini, 1905); et *Nicolò Fergola* (*Atti Accademia Pontaniana,* 1903).

Enfin, je ferai remarquer que je n'ai pas encore reçu de réponse satisfaisante à la question 2595 (**1903**, 149, 272; **1904**, 219; **1905**, 158, 227) posée par moi et qui m'intéresse encore : je désire savoir quels Mémoires a publiés en France le mathématicien susdit sous le nom de *A.-N. Jourdan,* qu'il y avait pris après avoir quitté Naples en 1799. J'ajouterai aux indications données par moi qu'il fut *géomètre en chef du département de l'Aube,* et mourut en 1835.

Federico Amodeo (Naples).
[Traduit de l'italien. (La Réd.)]

2766. (**1904**, 94) (*Doubt*). — *Inflexions réelles de cubiques sans points doubles* (**1905**, 81). — Une cubique qui n'a pas de point double à tangentes réelles possède nécessairement trois points d'in-

flexion réels. On peut dire que cela est du domaine sensoriel, et force est bien que le calcul, compliqué ou non, aboutisse à la même conclusion. La courbe comprend en effet deux parties : une branche paire, dont l'existence est contingente et dont, au point de vue où l'on se place, il n'y a lieu de tenir aucun compte; et une branche impaire, obligatoirement existante. On peut admettre que cette branche impaire n'a qu'une asymptote réelle et que cette asymptote est à distance finie, car, dans le cas contraire, on peut réaliser une infinité de projections qui rentrent dans cette hypothèse, et une tangente stationnaire est une singularité non affectée par la mise en perspective d'une figure plane sur un autre plan.

Cela posé, on observera que l'asymptote, tangente à la courbe à l'infini, coupe forcément encore une fois cette courbe à distance infinie ou finie : on se bornera, d'ailleurs, à ce dernier cas qui est le cas habituel, l'autre ne donnant lieu, du reste, qu'à des modifications insignifiantes dans le raisonnement. Considérant donc un arc très éloigné, il est clair que celui-ci tournera sa convexité vers l'asymptote; mais, à mesure qu'on en considérera de moins éloignés, il faudra que le sens de la courbure change, puisque l'asymptote doit être traversée, et cela ne peut arriver que si la courbure devient infinie ou nulle : or, ce dernier cas est exclu. Maintenant, une alternative se présente : ou bien la courbure change de nouveau avant la traversée de l'asymptote, ou bien le contraire arrive. La première supposition peut être écartée : en effet, l'existence de deux points d'inflexion réels, qu'elle admet, implique qu'il y en ait trois; reste donc la deuxième : mais, si la courbure ne changeait plus de sens, la branche se traverserait elle-même, contrairement à l'hypothèse initiale. Il y a donc, après la traversée de l'asymptote, un second point d'inflexion réel qui rend de nouveau la courbe concave vers l'asymptote, et, comme celle-ci ne peut plus être traversée, il est clair, indépendamment de la raison déjà invoquée, qu'il existe un troisième point d'inflexion.

L'existence d'un point double conjugué, ou acnodal, ne modifie en rien la conclusion à laquelle on vient de parvenir, car, comme on l'a observé, elle est indépendante de l'existence de la branche paire, de l'ovale adventice que la courbe peut comporter, et qui, dans l'espèce, n'embrasse plus qu'une aire nulle.

Il n'en est point de même d'un point double à tangentes réelles, d'un nœud, qui correspond à la soudure des deux branches paire

et impaire; et l'on remarquera que les deux courbes, infiniment voisines de la courbe nodale, avant et après la soudure, présentent aussi bien l'une que l'autre deux points d'inflexion infiniment voisins du point double de la courbe de transmission. Mais, distincts tant qu'elle se prépare, ils disparaissent au moment même où cette autre irrégularité apparaît.

Les exemples indiqués par M. Brocard (**1905**, 81) n'infirment point les conclusions qui précèdent. Ainsi la courbe

$$3y = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$$

qu'on peut écrire

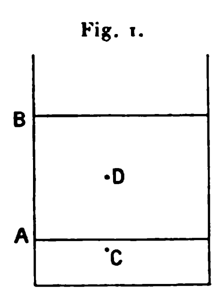
$$ax^3 + 3bx^2z + 3z^2(cx - y) + dz^3 = 0,$$

en mettant en évidence l'unité de longueur, dont l'évanouissement correspond à la considération de points infiniment éloignés, n'a bien qu'un point d'inflexion réel; mais aussi admet-elle un point de rebroussement à l'infini. *No Doubt.*

2855. (**1905**, 285) (E. Maillet). — *Erreurs des mathématiciens.* — J. Bernoulli. — On trouve, dans la Correspondance de J. Bernoulli avec Leibniz, une Lettre où Bernoulli indique deux moyens d'élever le centre de gravité d'un corps sans employer aucune force. Je ne me rappelle pas le premier : il s'agit, autant que je peux m'en souvenir, des eaux de la pluie. Quant au second moyen, voici ce que c'est :

Soit un récipient dans lequel on verse du mercure jusqu'en A, et par-dessus de l'acide azotique jusqu'en B (*fig.* 1). On obtient une

Fig. 1.



masse liquide, dout le centre de gravité sera eu un point tel que C, c'est-à-dire très bas, et cela, par suite de la grande différence de densité des deux liquides. Maintenant, l'acide attaque le mercure;

quand la réaction est terminée, tout le mercure se dissout, et l'on a une masse liquide homogène, dont le centre de gravité est en D, Ainsi le centre de gravité s'est élevé de C en D, sans l'intervention d'aucune force.

L'erreur est bien évidente, puisque la force qui entre en jeu est l'affinité chimique, qui produit d'autres effets encore.

Leibniz, dans sa réponse, relève et démontre les fautes commises. Mais Bernoulli revient à la charge, et il se montre mécontent de la critique de Leibniz qui, dans une deuxième réponse, s'excuse, et dit :

« Au reste, je n'ai pas voulu tourner en ridicule votre ingénieuse dissertation. Les premiers mots de la phrase latine me reviennent encore : *Cæterum illam tuam... disquisitionem...?* »

La Correspondance dont il s'agit n'est pas un livre bien rare. Je sais particulièrement qu'elle se trouve à la Bibliothèque Nationale de Paris.

GALILÉE. — Les *Dialogues sur le système du monde* renferment beaucoup d'erreurs. Voici les plus intéressantes :

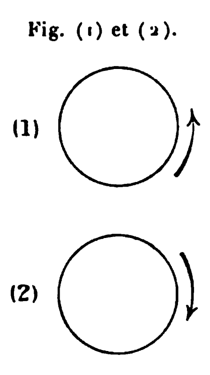
1° La dernière *Giornata* n'est qu'un long réquisitoire contre l'opinion qui attribue le phénomène des marées à l'action de la Lune. Galilée cherche à prouver le mouvement propre de la Terre; il cherche partout des moyens d'y arriver, et il a la malheureuse idée de chercher dans ce mouvement la cause des marées. La Lune, dit-il, n'y est pour rien, si ce n'est qu'elle rend lunatiques certains individus qui, par suite de cette aberration, lui attribuent des influences qu'elle n'exerce pas.

2° Galilée affirme sans cesse que tout corps abandonné à lui-même, et qui n'est soumis à l'action d'aucune force, prend un mouvement circulaire et uniforme.

3° Ayant observé, ce qui est exact, que le mouvement du Soleil autour de son axe se manifeste par les trajectoires des taches, et que ces courbes sont dans des plans inclinés sur l'écliptique, il cherche à démontrer qu'il y a là une preuve des plus nettes du mouvement de la Terre autour du Soleil. Il lui semble que le Soleil ne saurait tourner autour de la Terre dans ces conditions, et qu'il faudrait, pour qu'un tel mouvement fût possible, que l'axe de rotation du Soleil fût perpendiculaire à l'écliptique.

4° Certaines figures indiquent les mouvements de rotation des astres en sens contraire du sens véritable. Pour un observateur qui se trouve en Europe, les mouvements des astres sur le zodiaque se font dans le sens indiqué sur la figure (1); Galilée figure, notamment, le mouvement de Mars dans le sens indiqué sur la figure (2).

Fig. (1) et (2).



Beaucoup d'écrits ont été publiés sur les *Dialogues*. Du temps même de Galilée, une critique très violente et très passionnée, organisée surtout par les Jésuites, s'est adressée à tous ses Ouvrages. Cette critique a trouvé quelquefois le point faible. On en voit des exemples dans le *Saggiatore;* ils sont rapportés par Galilée lui-même. Mais, en général, les adversaires de Galilée se sont montrés incapables de saisir et de signaler ses fautes.

Bertrand a publié, il y a assez longtemps, dans la *Revue des Deux-Mondes,* un article critique fort bien fait (*Galilée : sa vie et son œuvre scientifique,* 1er novembre 1864); je ne sais pas s'il en a fait plus tard un Livre. Je ne saurais dire non plus si sa critique est complète, et si elle indique toutes les erreurs. Il se pourrait qu'il y ait dans ce qu'il a dit quelques fautes tenant à la difficulté de comprendre le sens littéral du texte. Bertrand ne savait pas l'italien, et il croyait le savoir : je me souviens d'avoir eu avec lui une discussion très singulière ; il traduisait en français quelque chose que j'avais écrit moi-même ; je lui disais qu'il traduisait à contre-sens, et il ne voulait pas en convenir.

Si vous voulez lire vous-même les *Dialogues,* vous trouverez les fautes tout de suite : c'est du reste un des Livres les plus amusants qui aient jamais été écrits. Je ne sais pas si l'on en trouve des édi-

tions qui soient dans le commerce à Paris. En Italie, on en a fait des éditions populaires : si cela vous est agréable, il me serait facile de vous envoyer un de ces Volumes; je soulignerais toutes les pages où il y a des fautes; de cette manière les recherches seraient très faciles.

LEGENDRE. — 1° *Éléments de Géométrie* (Livre III, prop. XII).

Legendre veut prouver que dans un carré le rapport de la diagonale au côté est incommensurable. Il fait voir, au moyen d'une construction assez élégante, que ce rapport est représenté par la fraction continue

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$$

Après quoi il ajoute :

« De là on voit que l'opération ne sera jamais terminée, et qu'ainsi il n'y a pas de commune mesure, etc. »

La conclusion est exacte; le raisonnement ne l'est pas : ce que dit Legendre revient à poser en principe que toute quantité est incommensurable quand elle est la somme d'une série indéfinie de quantités qui décroissent sans limite.

S'il en était ainsi, la somme des termes d'une progression géométrique serait incommensurable; et, en général, il en serait de même de toute expression de la forme $\int dx\, f(x)$: car on peut prouver, comme vous le ferez facilement, que toute intégrale peut être mise sous la forme

$$F(x)+F'(x)+F''(x)+\ldots,$$

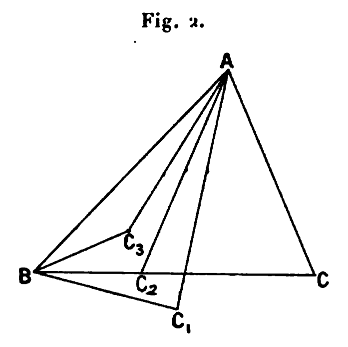
expression dans laquelle $F(x)$, $F'(x)$, ... sont des quantités en nombre indéfini, et qui décroissent indéfiniment; je n'ai pas besoin d'ajouter que $F'(x)$ ne désigne pas ici la dérivée de $F(x)$.

2° *Éléments* (Livre I, prop. X).

Cette proposition est la même que la proposition XXIV du Livre I d'Euclide.

Soient un triangle ABC et un autre triangle qui aura deux côtés égaux aux côtés AB, AC (*fig.* 2), comprenant entre eux un angle

Fig. 2.



moindre que l'angle A. Dans ce triangle le côté opposé à cet angle sera plus petit que BC.

Euclide dit qu'on peut superposer les deux triangles de manière qu'ils aient un côté commun AB. Alors le second côté du petit triangle, qui est égal à AC, prendra l'une des positions AC_1, AC_2, AC_3. S'il prend la position AC_2, le principe est démontré. S'il prend l'une des positions AC_1, AC_3, Euclide démontre le principe par un raisonnement élégant, et qui s'applique à la fois aux deux cas, en changeant la position d'une lettre.

Il semble que cette démonstration soit rigoureuse, elle ne l'est pas; il y manque un point essentiel.

Euclide n'indique pas la manière de faire la figure.

Si vous examinez la question, vous verrez aussitôt qu'il y a deux cas à considérer : les côtés AB, AC peuvent être égaux ou inégaux.

S'ils sont égaux, la seule position qu'on puisse obtenir est la position ABC_1.

S'ils sont inégaux on peut faire la superposition en choisissant, comme je l'ai fait, le plus grand côté AB pour le faire coïncider dans les triangles proposés; les trois combinaisons C_1, C_2, C_3 sont possibles à l'aide de ce procédé. Mais, si l'on fait coïncider le plus petit côté, il n'y a qu'une seule figuration possible : c'est, comme dans le cas du triangle isoscèle, la combinaison ABC_1.

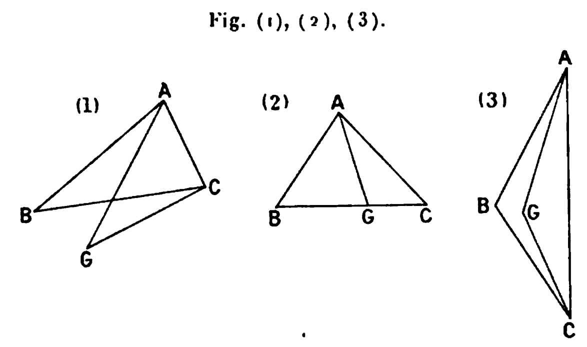
Cela se voit en se basant sur les propriétés du triangle isoscèle;

or Euclide les suppose connues : elles forment les propositions v et vi.

Il y a une conclusion qui s'impose : c'est que le géomètre grec n'a pas compris la manière de faire la figure. S'il l'avait comprise il aurait fait sa superposition de manière à n'avoir qu'un seul cas à considérer; son raisonnement aurait été plus simple et plus clair.

Legendre a abandonné le raisonnement d'Euclide; mais il a conservé les trois cas [*fig.* (1), (2), (3)] : il les représente dans

Fig. (1), (2), (3).



trois figures différentes que je recopie.

Dans la figure (1), Legendre superpose le plus petit côté. Il en résulte que, pour faire les figures (2) et (3), il est obligé de changer de système : le côté qu'il superpose est le plus grand, ABC étant toujours pour lui le triangle qui a le plus grand angle, et AGC celui qui a le plus petit angle.

La figure (3) est d'ailleurs tourmentée et peu élégante.

Enfin, si Legendre avait compris la manière de faire les figures, il aurait pu s'en tenir à la figure (1). Il est vrai qu'il place au n° xii les propriétés du triangle isoscèle; mais rien ne l'aurait empêché de conserver l'ordre d'Euclide et de les mettre avant sa proposition x.

Ce qu'il y a de plus curieux dans tout cela, c'est que Blanchet paraît ne pas avoir compris la difficulté.

J'ai eu Blanchet pour professeur : c'était un homme extrêmement soigneux, son enseignement était d'une clarté merveilleuse, mais il n'avait aucune initiative; il suivait ses auteurs lettre par lettre; en Géométrie descriptive, ses figures au Tableau reproduisaient celles de Leroy avec une précision incroyable. En Géométrie élémentaire,

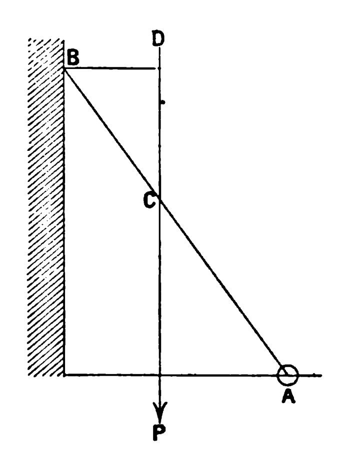
il ne s'est écarté de Legendre que quand il a vu une difficulté dont les élèves ne pouvaient pas venir à bout.

Or, dans le théorème dont il s'agit, il a donné une démonstration toute différente de celles de Legendre et d'Euclide; il a dû lui en coûter beaucoup, et, connaissant son caractère et sa manière d'être, je ne crains pas d'affirmer que, s'il s'est résolu à une telle extrémité, c'est parce qu'il ne réussissait pas lui-même à comprendre la question telle que ses auteurs l'avaient posée.

Cette discussion est un peu longue, mais il est très difficile de critiquer Euclide. C'est aussi difficile que de trouver des fautes de dessin à la Vénus de Milo. On en trouve cependant.

On peut faire, sur les *Éléments*, d'autres remarques du même genre. Dr Prompt.

Je me rappelle avoir lu dans le *Recueil de problèmes* du Père Jullien que Bernoulli a commis l'erreur suivante : soit AB une barre



pesante, s'appuyant en B contre un mur et en A dans une charnière; il admettait que la pression de la barre contre la charnière était dirigée dans le sens BA, ce qui est évidemment faux; on voit de suite que, le frottement étant négligé, la réaction de la charnière a la direction AD. A. Cikot (Bois-le-Duc, Hollande).

Dans une Note présentée le 12 novembre 1894 par un membre de l'Académie des Sciences et insérée aux *Comptes rendus* de la

séance, j'ai signalé l'erreur suivante, rencontrée dans la *Théorie des Nombres* de Legendre.

Après avoir donné, en divers Chapitres, les procédés de résolution de l'équation indéterminée du second degré, réduits à ses trois termes du second degré, Legendre revient dans le Chapitre XII à l'équation générale pour achever la théorie.

Mais, dans ce Chapitre complémentaire, il a commis la faute de faire usage d'une équation indéterminée du premier degré, sans remarquer que les coefficients des inconnues ne sont pas premiers entre eux; erreur étonnante de sa part, car, dans le cours de son Ouvrage, il ne manque jamais de faire cette vérification indispensable.

Sa théorie est par suite complètement faussée.

J'ai été mis sur la trace de cette erreur en cherchant à faire une application numérique. DUJARDIN.

W.-W.-R. BALL, dans son *History of Mathematics* (London, 1893), à la page 338, visant les *Newton's Principia,* Book I, Section VI, dit que celui-ci essaie de montrer l'impossibilité de la quadrature exacte de toute courbe ovale fermée n'ayant pas une infinité de branches; la démonstration n'est pas correcte, car le résultat est faux pour les ovales de la forme

$$y^{2m} = (2n)^{2m} x^{2m(2n-1)}(a^{2n} - x^{2n}),$$

où m et n sont des entiers positifs. Newton semble lui-même s'en être douté en publiant la démonstration, bien qu'il considère le résultat comme exact.

A la page 369 de l'*Histoire de Ball,* l'auteur indique que dans les Mémoires de Leibniz sur les courbes osculatrices, publiés en 1686 et 1692, celui-ci commet diverses fautes. Une des erreurs fut signalée par Jean Bernoulli. Leibniz a publié aussi divers Mémoires de Mécanique; certains contiennent des erreurs montrant qu'il n'a pas compris les principes de ce sujet. En 1685, il donne une solution fausse de ce problème : *Trouver les pressions exercées par une sphère placée entre deux plans inclinés.* En 1689, il écrivit sur les mouvements des planètes produits par un mouvement de l'éther. Ses équations du mouvement sont fausses ainsi que ses déductions. Dans un autre Mémoire de 1706, il admet avoir fait quelques erreurs dans le Mémoire précédent, mais conserve ses conclusions.

F. Cajori, dans son *History of Mathematics* (New-York, 1894) dit que Leibniz et Jean Bernoulli discutent la question de savoir si un nombre négatif a un logarithme. Bernoulli prétend que, puisque $(-a)^2 = (+a)^2$,

$$2\log(-a) = 2\log(+a) \quad \text{et} \quad \log(-a) = \log(+a).$$

Ni Leibniz, ni Jacob Bernoulli, ni Jean Bernoulli n'ont eu de doutes sérieux sur la correction de l'égalité

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Guido Grandi arrive à en conclure

$$\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

(*voir* R. Reif, *Geschichte der unendlichen Reihen,* Tübingen, 1889).

Euler donne la démonstration suivante : puisque

$$n + n^2 + \ldots = \frac{n}{1-n} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{n}{n-1},$$

on a

$$\ldots \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 = \ldots = 0.$$

Euler écrit encore

$$1 - 3 + 5 - 7 + \ldots = 0.$$

W.-W.-R. Ball, dans ses *Mathematical Recreations,* p. 163 (London, 1892), dit que les démonstrations de l'impossibilité de la quadrature du cercle par James Gregory, *Vera circuli et hyperbolæ quadratura,* Padua, 1668, et reproduites dans Huygens, *Opera varia,* p. 405-462 (Leyden, 1724) et par Newton, *Principia,* Book I, Section vi, lemma 28, ne sont pas concluantes.

E.-B. Escott (Ann Arbor).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

Un de nos correspondants nous adresse la Note suivante :

Pour déterminer le plan invariable on a à chercher la somme des quantités de mouvement d'une certaine planète par rapport à un axe GZ. Il faudra d'abord réduire la planète à un point matériel de

masse M; puis il faudra ajouter le moment de la quantité de mouvement par rapport à un axe parallèle à GZ et passant par le centre de la planète. Laplace avait négligé cette seconde partie et cette erreur a été relevée par Poinsot. LA RÉDACTION.

2884. (**1905**, 49) (E. MAILLET). — *Nombres transcendants.* — A propos des deux dernières lignes de cette question, je me permettrai de signaler ces résultats énoncés par moi dans les *Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris* (28 août 1905) :

« A. On peut définir des familles de fonctions entières à coefficients rationnels $f_i(x)$ jouissant de ces propriétés :

» *a.* Elles ne prennent pour x rationnel ou algébrique $\neq 0$ que des valeurs transcendantes.

» *b.* Les coefficients rationnels étant positifs, si le produit des substitutions $|x; f_1(x)|$, $|x; f_2(x)|$, ..., $|x; f_k(x)|$ est $|x; \Phi(x)|$, $\Phi(x)$ est transcendant pour $x > 0$.

» *Exemple :*

$$f_i(x) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n^{(i)} x^n}{b_k(n)^{\rho n}}$$

($|a_n^{(i)}| \leqq a$ entier fixe; b, ρ entiers; $k \geqq 3$). »

E. MAILLET.

2914. (**1905**, 106) (PAULMIER). — *Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde* (**1905**, 236). — Soient ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$), (b, $\gamma'\delta'$) et ($\varepsilon\varphi$, b') les trois axes de l'ellipsoïde scalène donné, le premier parallèle à la ligne de terre, le deuxième vertical et le troisième debout, ou perpendiculaire au plan vertical; et soient cd, $c'd'$ les projections de la droite donnée DC, dont on veut déterminer les points de percement avec cet ellipsoïde.

Considérons la section produite dans l'ellipsoïde par le plan projetant verticalement la droite (cd, $c'd'$), dont la projection verticale sera un segment $c'_1 d'_1$ de la projection verticale $c'd'$ de cette droite, déterminé par l'ellipse $\alpha'\gamma'\beta'\delta'$, qui représente le contour apparent de cet ellipsoïde par rapport au plan vertical de projection.

Comme cette ellipse est donnée par ses axes $\alpha'\beta'$ et $\gamma'\delta'$, on peut trouver ses points d'intersection c'_1 et d'_1 avec $c'd'$ sans tracer cette conique, ou en n'employant que le cercle et la droite.

Si l'on prend cette section pour directrice d'une surface conique ayant pour sommet le point (b, γ') ou (b, δ'), le problème proposé se réduit à trouver les points d'intersection de cette surface conique avec la droite donnée $(cd, c'd')$.

Or la trace horizontale de cette surface conique auxiliaire est une ellipse homothétique de l'ellipse horizontale $(\alpha\varepsilon\beta\varphi, \alpha'\beta')$ ayant pour l'un des axes le segment $c_0 d_0$ de la droite $\alpha\beta$, déterminé par les traces horizontales c_0 et d_0 des génératrices $(bc_0, \gamma' c'_1 c'_0)$ et $(bd_0, \gamma' d'_1 d'_0)$ du contour apparent de cette surface conique, par rapport au plan vertical de projection; et, par suite, la grandeur de l'autre demi-axe Oe, dont la direction est eOf, s'obtiendra en menant par c_0 une droite αe parallèle à la corde $\alpha\varepsilon$ de l'ellipse $\alpha\varepsilon\beta\varphi$, qui coupera eOf au point e, tel que $eO = Of$ sera la grandeur de ce demi-axe.

Il en sera de même si l'on prend pour sommet de la surface conique auxiliaire le point (b, δ').

En faisant passer un plan par le sommet de cette surface conique et par la droite $(cd, c'd')$, si la trace horizontale P de ce plan coupe la trace horizontale $c_0 e d_0 f$ de cette surface, on aura deux de ses génératrices, qui couperont cette droite, et ces points d'intersection seront les points demandés (x, x') et (y, y').

Or les points d'intersection (i, i') et (j, j') de la trace P avec l'ellipse $c_0 e d_0 f$, donnée par les axes $c_0 d_0$ et ef, peuvent s'obtenir sans tracer cette conique, en employant seulement le cercle et la droite : donc le problème se trouve résolu d'après les indications de M. Paulmier.

Observations. — On *peut* de même employer comme surface conique auxiliaire celle qui aura pour directrices l'ellipse $(\alpha\varepsilon\beta\varphi, \alpha'\beta')$ et l'ellipse déterminée, sur l'ellipsoïde, par le plan projetant verticalement la droite donnée $(cd, c'd')$ ou CD; mais dans ce cas le sommet de cette surface conique, en général, ne se trouve pas convenablement disposé pour les tracés graphiques.

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO (Lisbonne).

2935. (**1905**, 148) (HOFFBAUER). — *Sur les imaginaires de Despeyrous.* — Sous le titre de *Théorie de la quantité composée*, Despeyrous a exposé les principes et les applications de sa représentation des imaginaires, nouvelle et surtout commode pour l'espace à trois dimensions, dans quatre articles insérés aux *Mémoires de*

l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, pour les années 1866 (6e série, t. IV, p. 255), 1868 (6e série, t. VI, p. 159), 1869 (7e série, t. I, p. 174), 1870 (7e série, t. II, p. 274).

Voici comment il procède pour l'espace à trois dimensions :

Tout point d'un pareil espace étant déterminé par ses coordonnées polaires, savoir le rayon vecteur a, la longitude p et la latitude q, la quantité composée la plus générale, qui est l'affixe d'un tel point, sera d'abord représentée par

$$a_{p,q},$$

ou, en introduisant les coordonnées rectangulaires x, y, z, puis deux nouvelles quantités définies par les relations

$$1_{\frac{\pi}{2},0} = i, \qquad 1_{0,\frac{\pi}{2}} = j,$$

par

$$x + iy + jze^{ip} = ae^{ip+jq}.$$

Après avoir fait connaître, pour ces nouvelles expressions, des règles de calcul, d'ailleurs analogues à celles de l'espace plan, Despeyrous étend, dans le dernier des articles précités, les théorèmes de D'Alembert et de Cauchy aux équations entières dont les coefficients sont des quantités composées de la forme la plus générale, et en déduit ensuite, pour le cas des coefficients réels, les théorèmes de Sturm et de Fourier. ROUQUET.

2942. (**1905**, 171) (FITZ-PATRICK). — *Problème de la citerne.* — Dans un Mémoire du 11 janvier 1769, qui fut imprimé par les soins de l'Académie des Sciences, Fourcroy, alors ingénieur du Roi à Calais, établit la formule qui donne les proportions entre la capacité d'une citerne et la surface des toits qui doivent l'alimenter dans des circonstances données.

Il appliqua ensuite sa théorie à la mise en état de la citerne de Calais qui existe encore et qui reçoit les eaux des toits de l'église de cette ville. F. FARJON.

2943. (**1905**, 171) (FITZ-PATRICK). — *Sur les Œuvres de Viète.* — M. Ritter a écrit plusieurs Mémoires sur Viète, dont voici les principaux :

1° *François Viète inventeur de l'algèbre moderne* (1540-1603),

Essai sur sa vie et son œuvre (*Revue occidentale*, 2e série, t. X, p. 234-274 et 354-415; Paris, 1895). Étude magistrale, incontestablement la meilleure sur le grand algébriste français.

2° Une traduction des Œuvres de Viète, restée en grande partie inédite, mais dont deux Traités ont néanmoins paru dans le *Bullettino* du prince Boncompagni (t. I; Rome, 1868). Ce sont l'*Introduction à l'art analytique* (p. 228-244) et la *première série des formules de l'arithmétique spécieuse* (p. 245-276).

3° Plusieurs autres Notices, moins importantes, par exemple : *A propos d'une Lettre de Fermat sur le fameux problème d'Adrien Romain résolu par Viète* (*Bulletin des Sciences mathématiques* de Darboux, 2e série, t. IV, 1880, Ire Partie, p. 171-182).

H. Braid.

2945. (**1905**, 172) (Fitz-Patrick). — *Bibliographie des courbes algébriques.* — L'Ouvrage de M. Brocard : *Notes sur la bibliographie des courbes algébriques*, se compose de deux Volumes lithographiés, l'un de 1897 et l'autre de 1899, publiés à Bar-le-Duc, par l'imprimerie et lithographie Comte-Jacquet, Facdouel, directeur. Le premier Volume comprend 296 pages plus 3 suppléments d'un total de xxx pages et le second 243 pages.

Godeye.

Réponse analogue de M. Lez.

2936 et **2937.** (**1905**, 221) (G. Lemaire). — *Angles dans les levers topographiques.* — De pareilles questions ne devraient pas être posées; elles résultent d'une lacune regrettable dans nos programmes : nulle part, en effet, ni dans nos lycées, ni dans nos grandes écoles, on n'apprend à résoudre cette question qui sans cesse se pose dans la pratique :

Étant proposé un problème dont les données sont entachées d'erreurs dont on connaît des limites supérieures, quelles sont les limites des erreurs qui en résultent pour les inconnues?

Voici la solution bien simple de cette question :

1° Supposons le problème résolu; soient a, b, c les valeurs exactes des données, x celle de l'inconnue et

$$x = f(a, b, c).$$

Si δa, δb, δc, δx sont les erreurs de a, b, c, x, on a

$$x + \delta x = f(a + \delta a, b + \delta b, c + \delta c)$$

et

$$\delta x = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)\delta a + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)\delta b + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)\delta c,$$

les parenthèses indiquant que l'on doit remplacer a, b, c par $a + \theta\,\delta a$, $b + \theta\,\delta b$, $c + \theta\,\delta c$ où $0 < \theta < 1$.

Pour avoir une limite supérieure de δx, *on peut* remplacer δa, δb, δc par leurs limites supérieures prises en valeur absolue et $\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)$, ... par des quantités que l'on sait être plus grandes.

2° Si le problème n'est pas résolu, soient

$$f(x, y, \ldots, a, b, \ldots) = 0, \qquad \ldots$$

ses équations. a, b, ... sont les données; x, y, ... les inconnues; on aura

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)\delta a + \ldots = 0,$$

on en tire δx, δy, ... et des limites supérieures de ces quantités.

Je traite l'exemple choisi par M. Lemaire; a, b, c sont les côtés connus d'un triangle, A, B, C les angles. On a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b^2 \cos A,$$

$$(a)\,\delta a = (b)\,\delta b + (c)\,\delta c$$
$$- (b)\,\delta c(\cos A) - (c)\,\delta b(\cos A) + (bc)(\sin A)\,\delta A,$$

donc

$$\delta A = \frac{(a)\,\delta a - (b)\,\delta b - (c)\,\delta c - (b)\,\delta c(\cos A) - (c)\,\delta b(\cos A)}{(bc)(\sin A)};$$

or on a facilement des limites inférieures et supérieures de A, ne fût-ce qu'en construisant le triangle à une échelle donnée; alors

$$\delta A < \frac{a\,\delta a + b(\delta b + \delta c) + c(\delta b + \delta c)}{bc \sin A},$$

et, dans le second membre, on remplacera au numérateur a, b, c, δb, δc, δa par leurs limites supérieures, puis, au dénominateur, bc, A par leurs limites supérieures. H. LAURENT.

TABLE DES QUESTIONS ET RÉPONSES.

Chacune des questions publiées dans le Tome XII porte le numéro d'ordre, avec lequel elle a été publiée. Les autres nombres de la Table indiquent les pages du Volume.

Nous avons cru inutile de continuer à signaler les Réponses ou Notes en portefeuille (désignées dans les Tables antérieures par la lettre R). L'indication des solutions reçues est, en effet, toujours mentionnée au fur et à mesure dans les *Avis divers* annexés aux numéros mensuels de l'*Intermédiaire* [troisième page de la couverture ([1])].

([1]) La Rédaction tient à jour une Table générale manuscrite qui a servi pour la préparation de la Table des questions et réponses.

Questions posées. Tome IV (1897).	Pages.	Réponses. Tome XII. Pages.	Questions posées. Tome IV (1897).	Pages.	Réponses. Tome XII. Pages.
962.	3	34.	968.	5	110.

Tome V (1898).	Pages.	Tome XII. Pages.	Tome V (1898).	Pages	Tome XII. Pages
1208.	5	34.	1286.	123	36.
1213.	6	14.	1293.	124	223.
1271.	80	34, 152.	1299.	126	14, 152.

Tome VI (1899).	Pages.	Tome XII. Pages.	Tome VI (1899).	Pages.	Tome XII. Pages.
1477.	74	14.	1658.	243	16.
1522.	128	36.	1660.	244	77, 176.
1523.	129	36.	1669.	247	77.
1628.	218	15.			

Tome VII (1900).	Pages.	Tome XII. Pages.	Tome VII (1900).	Pages.	Tome XII. Pages.
1734.	9	16.	1836.	157	37.
1749.	46	226.	1837.	157	53.
1771.	79	226.	1945.	333	247.
1788.	84	16, 112.	1986.	404, 442	37.

Tome VIII (1901).	Pages.	Tome XII. Pages.	Tome VIII (1901).	Pages.	Tome XII. Pages.
2088.	131	37.	2181.	249	112.
2125.	186	78.	2182.	249	177.
2130.	187	176.	2183.	249	177.
2168.	221	37.	2208.	255	37.
2169.	221	112.	2222.	276	113.
2174.	222	112.	2245.	309	152.
2175.	223	16, 152.	2248.	310	17, 177.

Tome IX (1902).	Pages.	Tome XII. Pages.	Tome IX (1902).	Pages.	Tome XII. Pages.
2253.	2	37.	2402.	205	39, 154, 226.
2255.	3	78.	2411.	226	131.
2269.	7	79.	2420.	229	21.
2339.	114	38.	2446.	263	131.
2380.	171	19.	2447.	264	131.
2381.	172	21.	2464.	292	39.
2382.	173	153.	2465.	293	39.
2394.	203	116.	2481.	314	155.
2397.	203	153.	2484.	316	39.

Questions posées. Tome X (1903). Pages.		Réponses. Tome XII. Pages.	Questions posées. Tome X (1903). Pages.		Réponses. Tome XII. Pages.
2509.	12	40.	2608.	154	80.
2512.	34	43, 79, 156.	2654.	251	158.
2518.	36	157.	2663.	255	45.
2550.	71	79.	2667.	257	45, 181.
2559.	97	157.	2680.	277	81.
2571.	102	53, 249.	2682.	277	46.
2573.	103	79.	2688.	280	134.
2585.	147	21.	2699.	303	56, 81.
2595.	149	158, 227, 273.			

Tome XI (1904). Pages.		Tome XII. Pages.	Tome XI (1904). Pages.		Tome XII. Pages.
2701.	1	159.	2818.	213	84.
2708.	4	22.	2819.	213	59.
2709.	4	22.	2820.	213	48.
2720.	9	81.	2827.	239	60, 228.
2721.	9	134.	2828.	239	60.
2728.	37	22.	2829.	239	63.
2736.	42	46.	2831.	257	48.
2740.	66	23.	2832.	257	24.
2744.	67	81, 135, 251.	2834.	258	63, 139.
2745.	67	81.	2837.	259	64, 181.
2760.	90	46.	2839.	259	64.
2766.	94	81, 273.	2840.	260.	66.
2767.	94	47.	2843.	261	69.
2779.	115	57.	2845.	262	140.
2780.	116	135.	2846.	262	160, 182.
2782.	117	227.	2847.	262	182.
2783.	117	82.	2848.	282	160.
2786.	118	82, 160.	2850.	283	86, 228.
2790.	137	83.	2851.	283	72, 140.
2793.	138	58, 83, 136.	2853.	283	230.
2806.	165	138.	2854.	285	72.
2814.	211	24.	2855.	285	275.
2815.	211	59.			

Tome XII (1905). Pages.		Tome XII. Pages.	Tome XII (1905). Pages.		Tome XII. Pages.
2856.	5	182.	2862.	6	93, 161.
2857.	5	72, 140.	2864.	8	94.
2858.	5	90, 161.	2865.	9	119.
2859.	5	91, 183, 251.	2866.	9	162.
2860.	6	119, 232.	2867.	9	142.
2861.	6	183.	2870.	10	143.

Questions posées. Tome XII (1905).	Pages.	Réponses. Tome XII. Pages.
2872.	25	143.
2873.	26	119, 144.
2874.	26	184.
2879.	27	233, 251.
2882.	28	184, 251.
2884.	49	284.
2885.	50	187.
2886.	50	167, 190.
2887.	50	167.
2888.	51	251.
2891.	52	191.
2892.	52	96.
2893.	52	167.
2897.	74	201.
2898.	74	233.
2899.	74	253.
2901.	75	203.
2903.	76	207.
2906.	169	

Questions posées. Tome XII (1905).	Pages.	Réponses. Tome XII. Pages.
2907.	103	234.
2908.	103	211.
2909.	103	234, 255.
2910.	103	235.
2911.	104	236, 255.
2913.	105	213.
2914.	106	236, 284.
2915.	106	255.
2921.	127	236.
2925.	129	255.
2928.	130	256.
2929.	130	257.
2933.	146	258.
2935.	148	285.
2942.	171	286.
2943.	171	286.
2945.	172	287.
2956.	221	287.
2957.	221	287.

Note. — Dans ce Tableau nous n'avons indiqué, lorsqu'il y a plusieurs réponses à une même question qui se suivent immédiatement, que la page où se trouve la première de ces réponses consécutives.

Rappel de questions non résolues antérieurement et reproduites au Tome XII (1905) ou rectifications.

Questions posées. Tome III (1896).	Pages.	Réimpression. Tome XII. Pages.
705.	8	97.
711.	9	97.
718.	11	97.
720.	11	97.
721.	12	98.
726.	29	98.
728.	30	98.
729.	30	99.
731.	31	99.
739.	32	99.
741.	33	99.
754.	37	99.

Questions posées. Tome III (1896).	Pages.	Réimpression. Tome XII. Pages.
755.	37	100.
758.	38	100.
763.	53	100.
767.	54	101.
790.	60	101.
791.	60	101.
793.	77	121.
794.	77	121.
795.	78	121.
796.	78	122.
798.	79	122.
807.	82	123.

Questions posées : Tome III (1896).	Pages.	Réimpression. Tome XII. Pages.
809.	82	123.
819.	85	123.
821.	86	124.
823.	101	193.
824.	101	193.
829.	102	194.
832.	104	194.
834.	104	194.
835.	105	195.
837.	107	217.
840.	108	218.
843.	126	218.
846.	128	218.
847.	129	219.
850.	130	220.
852.	149	220.
853.	149	241.

Tome V (1898).	Pages.	Tome XII. Pages.
1293.	124	102.
1294.	124	102.

Tome X (1903).	Pages.	Tome XII. Pages.
2608.	154	102.

A l'exemple déjà suivi dans plusieurs journaux mathématiques, la Rédaction continue à reproduire les énoncés de questions demeurées sans réponse depuis la fondation de l'*Intermédiaire*.

TABLE DES QUESTIONS

CLASSÉES SUIVANT LES DIVISIONS DE L'INDEX DU RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La Table qui suit fait connaître le sujet général des différentes questions proposées.

Les nombres de cette Table sont les *numéros* des questions auxquelles se rapporte la division de l'Index du Répertoire susmentionné.

La lettre Σ désigne les sujets d'étude de recherches ou d'études pour lesquels une subdivision spéciale a été adoptée dans l'*Intermédiaire* (*voir* t. II, 1895, p. 177).

TABLE PAR NOMS D'AUTEURS.

Les noms inscrits sont exclusivement ceux des auteurs de questions ou de réponses.

L'*italique* désigne les pseudonymes.

Les chiffres ordinaires indiquent les numéros des pages. Les numéros sans astérisque se rapportent aux QUESTIONS POSÉES; avec astérisque, ils désignent le rappel des questions au moment de la publication des réponses; en **caractères gras**, ils indiquent les **réponses** annoncées dans le texte ou publiées; en caractères romains les pages du Supplément.

Les Tables ont été rédigées, cette année, par M. E. Maillet et vérifiées par M. A. Grévy.

La Rédaction.

ERRATA.

TOME III (1896).

Page 154, ligne 1, *au lieu de :* 2^{5^n+4}, *lire :* $2^{5^n.4}$.

TOME X (1903).

Page 275, ligne 7, *après :* indice, *ajouter* : *n*.

TOME XI (1904).

Page 74, question 266, ligne 2, *au lieu de :* 1904, *lire :* 1903.
» 148, question 2114, ligne 2, *avant :* La théorie ..., *ajouter :* (**1903**, 105; **1904**, 80).
» 262, *au lieu de :* où deux des nombres sont égaux, *lire :* où la somme de deux des nombres est égale au troisième.

TOME XII (1905).

Page 11, ligne 4, *au lieu de :* Théorie, *lire :* Theory.
» » ligne 15, *au lieu de : elevationen, lire : ekvationen.*
» 19, ligne 19, *effacer :* A. Cunningham (*P. L. M. S.*, 1901).
» 29, ligne 12, *après :* **1904**, 161), *ajouter :* (*Anonyme*).
» » ligne 14, *après :* **1904**, 235), *ajouter :* (E. Lemoine).
» 40, ligne 10, *au lieu de :* α^2+1, *lire :* 2^2+1.
» 45, ligne 6 en remontant, *effacer :* et des facteurs des nombres composés.
» 62, ligne 7, *au lieu de :* $(x^2+y^2)x^2$, *lire :* $(x^2+y^2)^2$.
» » ligne 13, *au lieu de :* $(4a^2+b^2)y^4$, *lire :* $(4a^2+b^2)^2y^4$.
» » ligne 5 en remontant, *lire :* $\frac{x^2+y^2}{ax}=\pm 1$.
» 81, question 2699, ligne 2, *après :* degré, *ajouter :* (**1905**, 256).
» 87, ligne 12, *effacer* le coefficient 2 au dénominateur, et *lire :* $\frac{\pi}{2}$.

[illegible] *au lieu de* : $x+1)x(x+1$ [illegible]

[illegible] *au lieu de* la *Geométrie*, [illegible]

[illegible] *après* [illegible] *ajouter* : **1905**, 8[illegible]

[illegible] *après* : 58, *ajou*[illegible]

[illegible] *après* *refraction*, *ajo*[illegible]

[illegible] *au lieu de* : Po[illegible]

[illegible] *lire* : $d^1 p$[illegible]

[illegible] **1905**. [illegible]

[illegible] **1904**. [illegible]

[illegible] *lire* [illegible]

[illegible] *lire* [illegible]

[illegible]

